2019 年度 数理経済学 期末試験問題［50 点満点］

2019 年 8 月 2 日(金)15 時 05 分～16 時 35 分（90 分）

※問題は問 1 から問 4 までである．それぞれ，解答用紙の表裏を使って解答を書くこと．
**解答用紙の裏面を使った場合は，解答用紙の右下の欄に○をつけてください**.

※A4 用紙を持ち込んでいる場合には，名前と学籍番号を書いて必ず提出すること．

問１

［1］（**最大化版**）資源配分問題について考える．

$$\text{最大化} \quad \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) \qquad \text{条件} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = r,\ x_i \geq 0,\ \text{整数}$$

ここで，$n$，$r$ は正の整数，$g_i(x_i)$ は（離散）凹関数とする．この問題に貪欲アルゴリズムを適用して得られる解 $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ は次の条件(OPT)を満たす．これを証明せよ．

(OPT) すべての異なる $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対し，$x_i^* > 0$ ならば

$$g_i(x_i^*) - g_i(x_i^* - 1) \geq g_j(x_j^* + 1) - g_j(x_j^*)$$

［2］以下の（**最小化版**）資源配分問題について考える．

最小化　$g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3) + g_4(x_4)$

条件　　$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$，$x_1 \leq 2$，$x_1 + x_2 \leq 4$，$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$，

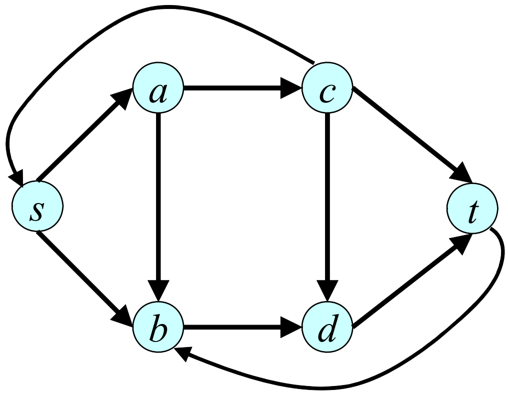
$x_i \geq 0$, 整数

なお，関数 $g_i(x_i)\ (i = 1,2,3,4)$ の関数値は右下の表の通りである．この問題の最適解を，**貪欲アルゴリズム**を使って計算せよ．アルゴリズムの**各反復において，どの変数の値を増やした**のか，説明すること．

| | $g_1(x_1)$ | $g_2(x_2)$ | $g_3(x_3)$ | $g_4(x_4)$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_i = 0$ | 0 | −4 | 2 | 0 |
| $x_i = 1$ | 0 | 0 | 3 | 8 |
| $x_i = 2$ | 2 | 6 | 8 | 16 |
| $x_i = 3$ | 5 | 12 | 13 | 24 |
| $x_i = 4$ | 10 | 19 | 19 | 32 |
| $x_i = 5$ | 15 | 26 | 26 | 40 |

問２

右図のネットワークに関する最大流問題を考える．
ただし，各枝 $(i,j)$ の容量を $u_{ij}$ とし，
頂点 $s$ がソース，頂点 $t$ がシンクを表す．




［1］頂点 $s,a,b,c,d$ における**流量保存条件の式**を書け．
ただし，枝 $(i,j)$ のフローを表す変数は $x_{ij}$，
総流量を表す変数は $f$ とする．

以下では頂点集合 $S=\{s,a,b\}$ と $T=\{c,d,t\}$ について考える．頂点集合 $S$ から $T$ に向かう枝のフローの合計値 $x(S,T)$，頂点集合 $T$ から $S$に向かう枝のフローの合計値 $x(T,S)$ とする．

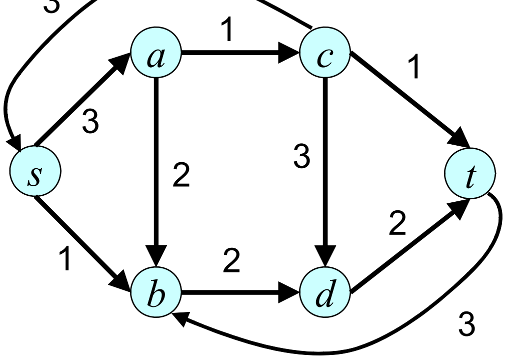
［2］$x(S,T)$ および $x(T,S)$ を，各枝のフローを表す変数 $x_{ij}$ を使って表せ．

［3］小問[1]で示した**流量保存条件の式**を用いて，等式 $x(S,T)-x(T,S)=f$ が成り立つことを証明せよ．

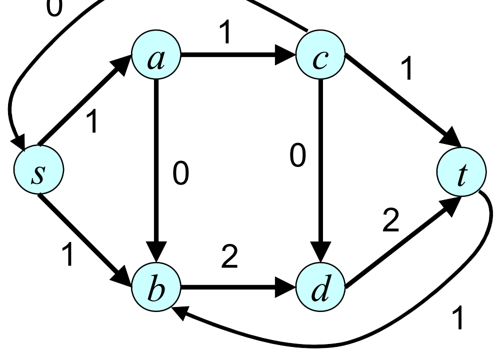
［4］このネットワークにおけるフロー $(x_{ij}\,|\,(i,j)\in E)$，およびそのフローに関する残余ネットワークを考える．残余ネットワークにおいて，ソース $s$ から有向路により到達可能な頂点集合が $S$ であるとする．このとき，**頂点集合 $S$ から $T$ に向かう各枝のフローの値**，および**頂点集合 $T$ から $S$ に向かう各枝のフローの値**がどのようになるか説明せよ．また，そのようになる**理由を説明**せよ．

［5］小問[4]におけるフロー $(x_{ij}\,|\,(i,j)\in E))$ の総流量 $f$ がカット $(S,T)$ の容量に等しいことを示せ．
小問[3]，[4] の結果を使ってもよい．

［6］各枝$(i,j)$の容量 $u_{ij}$ が左下の図のように与えられたとき，右下の図のような実行可能フローを考える．
(6-1) このフローの残余ネットワークを書け．
(6-2) このフローが最大フローか否か，答えよ（結果のみ書けばよい）．
このフローが**最大フローのとき**は，その容量がフローの総流量と等しいカット $(S,T)$ を求めよ．
このフローが**最大フローではないとき**は，増加路アルゴリズムの一反復を実行して，総流量が増加したフローを求めよ（最大フローを計算する必要はない）．



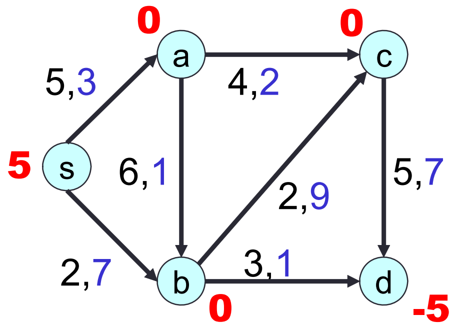

ネットワークの容量の図




実行可能フローの図

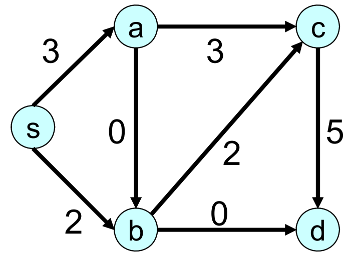
問３

右図の最小費用流問題について考える．頂点に付随する数字は，その頂点の需要供給量を表す．各枝に付随する数字は，左側が枝容量，右側が枝費用を表す．




[1] このネットワークの最小費用フローを，**逐次最短路アルゴリズム**を用いて計算せよ．なお，**各反復におけるフロー**，**残余ネットワーク**，**および利用した最短路を明記**すること．

[2] 右の実行可能フローは最小費用フローではない．このフローに関する残余ネットワークを書け．また，残余ネットワークを使って，このフローが費用最小ではない証拠を示せ．




[3] フロー $(x_{ij}\,|\,(i,j)\in E))$ が費用最小であるための必要十分条件は，以下の(i)，(ii)，(iii) を満たすポテンシャル $(p_i\,|\,i\in V)$ が存在することである：

(i) $c_{ij}-p_i+p_j>0$ なる枝 $(i,j)$ に対し，$x_{ij}=0$ が成り立つ．

(ii) $c_{ij}-p_i+p_j<0$ なる枝 $(i,j)$ に対し，$x_{ij}=u_{ij}$ が成り立つ．

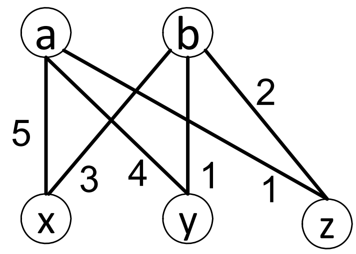
(iii) $0<x_{ij}<u_{ij}$ なる枝$(i,j)$ に対し，$c_{ij}-p_i+p_j=0$ が成り立つ．

ここで，$u_{ij}$ および $c_{ij}$ は枝 $(i,j)$ の容量と費用を表す．

右上の実行可能フローに対し，(i)，(ii)，(iii) より導かれる，ポテンシャルの満たすべき等式・不等式条件をすべて列挙せよ．

[4] 小問[3]で示した等式・不等式条件には解が存在しない．その理由を，[3]で列挙した等式・不等式条件を用いて説明せよ．

[5] 右下の図の二部グラフにおける最大重み **2** マッチング問題について考える．枝に付随する数字は，その枝の重みを表す．この問題を最小費用流問題に帰着するには，どのようなネットワークを作ればよいか？そのようなネットワークを書け．各枝の容量･費用および各頂点の需要供給量を明記すること．



問４

以下のナップサック問題について考える．ここで，$b, c_i, a_i$ はいずれも正の整数とする．また，不等式 $c_1/\mathrm{a}_1 > c_2/a_2 > \cdots > c_6/a_6$ が成り立つと仮定する．

最大化： $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_6x_6$

制約： $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_6x_6$

$x_i \in \{0,1\}\ (i = 1,2,\ldots,6)$

［1］この問題に対する連続ナップサック問題の最適解が $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_6^*) = (1,1,1,3/7,0,0)$ であるとする．また，この問題に対して改良版貪欲アルゴリズムを適用したとき，２つの解

$$(x_1', x_2', \ldots, x_6') = (1,1,1,0,0,1),\ (x_1'', x_2'', \ldots, x_6'') = (0,0,0,1,0,0)$$

のうち，目的関数値の大きい方が出力されたとする．このとき ，以下の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\max\{c_1x_1' + c_2x_2' + \cdots + c_6x_6', c_1x_1'' + c_2x_2'' + \cdots + c_6x_6''\} \geq 0.5 \times (c_1y_1^* + c_2y_2^* + \cdots + c_6y_6^*)$$

以下，$b = 10$ であり，$c_i, a_i$ が次のように与えられる場合を考える．

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c_i$ | 8 | 13 | 30 | 55 | 35 | 3 |
| $a_i$ | 1 | 2 | 5 | 10 | 7 | 2 |

このナップサック問題の最適解の目的関数値は 56 である．

［2］この問題に対し，**改良版**貪欲アルゴリズムを使って**近似解**を求めよ．また，その解の**目的関数値と近似比**を計算せよ．近似比は分数のままで良い．