2018 年度 数理経済学 期末試験問題 [50 点満点]

2018 年 8 月 3 日(金)15 時 05 分〜16 時 30 分 (85 分)

※問題は問 1 から問 4 まである．それぞれ，解答用紙の表裏を使って解答を書くこと．

※A4 用紙を持ち込んでいる場合には，名前と学籍番号を書いて必ず提出すること．

問１

（１）（最大化版）資源配分問題について考える．

最大化　$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$　　条件　$\sum_{i=1}^{n} x_i = r,\ x_i \geq 0,$ 整数

ここで，r は正の整数，$g_i(x_i)$ は（離散）凹関数とする．

（１－１）$g_i(x_i)$ が（離散）凹関数であることの定義を書け．

（１－２）任意の整数 α, β に対し，$\alpha < \beta$ ならば不等式 $g_i(\alpha) + g_i(\beta) \leq g_i(\alpha+1) + g_i(\beta-1)$ が成り立つことを証明せよ．

（１－３）この問題に貪欲アルゴリズムを適用して得られる解を$(x_1^*, \ldots, x_n^*)$とおくと，次の条件(OPT)が成り立つ．これを証明せよ．

(OPT) すべての異なる $i, j \in \{1,2,\ldots,n\}$ に対し，$x_i^* > 0$ ならば

$$g_i(x_i^*) - g_i(x_i^* - 1) \geq g_j(x_j^* + 1) - g_j(x_j^*)$$

（２）以下の（最小化版）資源配分問題について考える．

最小化　$(x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1)^2 + 2x_3$

条件　$x_1 + x_2 + x_3 = 6,\ x_i \geq 0,$ 整数

この問題の最適解を，**貪欲アルゴリズム**を使って計算せよ．アルゴリズムの**各反復において**，**どの変数の値を増やす**のか，説明すること．

問２

（１）ナップサック問題について考える．ここで，b, c_i, a_i はいずれも正の整数とする．

最大化： $\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$

制約： $\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \le b$

$x_i \in \{0,1\}\ (i = 1,2,\dots,n)$

（１－１）この問題の最適解を$(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$，連続ナップサック問題の最適解を$(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ とする．
これらの解の目的関数値の大小関係を示すと共に，それが成り立つことを証明せよ．

以下，$n = 6, b = 10$ であり，c_i, a_i が次のように与えられる場合を考える．

i	1	2	3	4	5	6
c_i	8	14	30	55	35	2
a_i	1	2	5	10	7	2

このナップサック問題の最適解の目的関数値は 57 である．

（１－２）この問題に対し，（**改良版ではない**）貪欲アルゴリズムを使って**近似解**を求めよ．
また，その解の**目的関数値と近似比**を計算せよ．近似比は分数のままで良い．
結果のみ書けば良い．

（１－３）この問題に対し，**改良版**貪欲アルゴリズムを使って**近似解**を求めよ．
また，その解の**目的関数値と近似比**を計算せよ．近似比は分数のままで良い．
結果のみ書けば良い．

（２）平面上の n 点 N={1,2,...,n} に対する巡回セールスマン問題について考える．
２点間の距離$d(i,j)$は以下の３条件を満たすとする．

（i）$d(i,j) \ge 0\ \ (\forall i,j \in N, i \ne j)$　（ii）$d(i,j) = d(j,i)\ (\forall i,j \in N, i \ne j)$

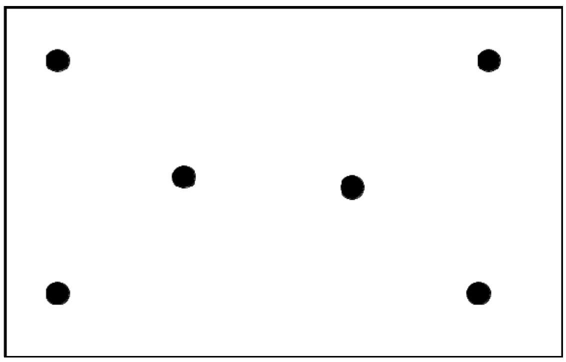
（iii）$d(i,j) + d(j,k) \ge d(i,k)\ \ (\forall i,j,k \in N,\ i,j,k$ は互いに異なる$)$

で与えられるとする．

（２－１）互いに異なる４点 $i,j,k,h \in N$ に対し，不等式 $d(i,j) + d(j,k) + d(k,h) \ge d(i,h)$ が成り立つことを証明せよ．

（２－２）n は偶数とする．このとき，巡回セールスマン問題の最適な巡回路を C とおき，
同じ n 点に対する最小重み完全マッチングを M とおく．このとき，
「C の総距離≧（M の枝長の合計値）×２」 が成り立つことを証明せよ．

（２－３）以下の点集合に対する巡回セールスマン問題を考える．２点間の距離はユークリッド距離で与えられるとする．この問題に対し，1.5 近似解を求めるアルゴリズムを適用して，近似解を計算せよ. 計算における各ステップを（簡単な）文章で説明すると共に，計算の過程を図示すること．



問３　住宅市場問題（財の交換の問題）について考える．

（１）住宅市場問題に対するアルゴリズムが「耐戦略性」を満たすとはどういう意味か，**定義を述べよ**．
また，トップトレーディングサイクル・アルゴリズムが耐戦略性を満たすことを**証明せよ**．

（２）有向グラフにおいて，各頂点から出る枝がちょうど１本であるとする．このとき，有向閉路を１つ求めるアルゴリズム（手順）を説明せよ．また，そのアルゴリズムが有限回のくり返しで終了することを説明せよ．

（３）6 人の財に対する選好順序が右のように与えられたとする．このとき，
トップトレーディングサイクル・アルゴリズムを使って財の配分を計算せよ．
計算の過程も書くこと．

1	543216
2	532416
3	512346
4	542136
5	612345
6	561234

問 4

男性の人数が女性の人数より多い安定結婚問題について考える．

（1）マッチング M に関するブロッキングペアの定義を書け．

（2）**男性の人数が女性の人数より多い**安定結婚問題において，**女性がプロポーズ**する受入保留アルゴリズムにより安定マッチングを求めたとき，**すべての女性**がかならずパートナーをもつことを証明せよ．

（3）右下の問題例に対し，**女性がプロポーズ**する受入保留アルゴリズムにより安定マッチングを計算せよ．**計算の過程も書くこと**．

（4）右下の問題例に対し，**男性がプロポーズ**する受入保留アルゴリズムにより得られる安定マッチングについて考える．このマッチングにおいて，**パートナーのいない男性**を示せ．**結果のみ書けばよい．また，安定マッチングを計算する必要はない．**

男性			女性	
A	123		1	DABCE
B	132		2	DACEB
C	231		3	ADECB
D	312			
E	321			