2017 年度 数理経済学 期末試験問題［50 点満点］

2017 年 8 月 4 日(金)15 時 05 分～16 時 30 分（85 分）

※問題は問 1 から問 4 である．　それぞれ，解答用紙の表裏を使って解答を書くこと．

※A4 用紙を持ち込んでいる場合には，名前と学籍番号を書いて必ず提出すること．

問１

（１）（最大化版）資源配分問題について考える．

最大化　$\sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$　　条件　$\sum_{i=1}^{n} x_i = r,\ x_i \geq 0$, 整数

ここで，r は正の整数，$g_i(x_i)$ は（離散）凹関数とする．このとき，以下の条件を満たす実行可能解（許容解）$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は最適解ではないことを証明せよ．

$$\max\{g_j(x_j+1) - g_j(x_j) \mid j = 1,2,\ldots,n\} > \min\{g_k(x_k) - g_k(x_k-1) \mid k = 1,2,\ldots,n, x_k > 0\}$$

（２）以下の（最小化版）資源配分問題について考える．

最小化　$|6x_1 - 3| + |2x_2 - 3| + |x_3 - 3|$

条件　　$x_1 + x_2 + x_3 = 6,\ x_i \geq 0$, 整数

（２－１）この問題の最適解を，**貪欲アルゴリズム**を使って計算せよ．アルゴリズムの**各反復において，変数x_1, x_2, x_3がどのように変化する**のか，説明すること．

（２－２）解$(x_1, x_2, x_3) = (4,1,1)$ は最適解ではない．このとき，ある変数を１増やし，別の変数を１減らすことで目的関数値を減らすことができる．そのような変数を求めると共に，変数値を変化させたときの目的関数値の減少量を計算せよ．結果のみ書けば良い．

（３）ナップサック問題について考える．ここで，b, c_i, a_i はいずれも正の整数とする．

最大化：$\sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i$

制約：$\sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i \leq b$

$x_i \in \{0,1\}\ (i = 1,2,\ldots,n)$

この問題に対する改良版貪欲アルゴリズムは右のように記述される．

ステップ1: n 個の品物を $\frac{c_{i_1}}{a_{i_1}} \geq \frac{c_{i_2}}{a_{i_2}} \geq \cdots \geq \frac{c_{i_n}}{a_{i_n}}$ を満たすように並べる．
$S = S' = \emptyset,\ j := 1$ とおく

ステップ2: $\sum_{i \in S} a_i + a_{i_j} \leq b$ ならば S に i_j を追加．
$\sum_{i \in S} a_i + a_{i_j} > b$ かつ$S' = \emptyset$ならば S′ に i_j を追加．

ステップ3: $j = n$ ならば S と S′ の良い方を出力して終了．
そうでなければ，j:=j+1 としてステップ2へ戻る

（３－１）連続ナップサック問題の最適解を求める貪欲アルゴリズムを記述せよ．

（３－２）改良版貪欲アルゴリズムで求めた２つの解 S と S’ の目的関数値の合計値と，連続ナップサック問題の最適値の関係を，不等式を使って述べよ．
また，その不等式を証明せよ．

（３－３）右のナップサック問題（ただし $b = 1$，ϵ は 0.1 未満の正の実数）に対し，**改良版貪欲アルゴリズム**を使って**近似解**を求めるとともに，その解の**近似比**を計算せよ．計算の過程も（大まかでよいので）書くこと．

i	1	2
c_i	ϵ	1
a_i	ϵ^2	1

（３－４）右のナップサック問題（ただし $b = 2$，ϵ は 0.1 未満の正の実数）に対し，**改良版貪欲アルゴリズム**を使って**近似解**を求めるとともに，その解の**近似比**を計算せよ．
計算の過程も（大まかでよいので）書くこと．

i	1	2	3
c_i	ϵ	1	1
a_i	ϵ^2	1	1

問２　平面上の n 点に対する巡回セールスマン問題について考える．２点間の距離はユークリッド距離で与えられるとする．

（１）点の数 n は偶数と仮定する．このとき，巡回セールスマン問題の最適解（最短巡回路）の距離は，同じ点集合に対する最小完全マッチングの総距離の２倍以上であることを証明せよ．

（２）最小全域木と最小完全マッチングを用いて 1.5 近似解を求めるアルゴリズムは，大きく分けて４つの手順からなる．この４つの手順を説明せよ．

（３）解答用紙の問題例に対し，（２）の手順に従って，1.5 近似解を求めよ．解答用紙の４つの図には，アルゴリズムの４つの手順で得られる枝集合を書くこと．なお，計算途中で使う最小全域木および最小完全マッチングについては，最適解を厳密に計算しなくても良い．

問３　財の交換の問題について考える．

（１）トップトレーディングサイクル・アルゴリズムで求められる財の配分は，常に個人合理性を満たす．**個人合理性の定義を書く**と共に，これを**証明せよ**．

（２）７人の財に対する選好順序が右のように与えられたとする．このとき，トップトレーディングサイクル・アルゴリズムを使って財の配分を計算せよ．**計算の過程も書くこと**．

①	7632451
②	1764753
③	7126534
④	1762354
⑤	7621453
⑥	7124356
⑦	1234765

（３）４人の財に対する選好が下のように与えられたとする．このとき，財の配分として，①−2，②−4，③−3，④−1 を考える．この配分が (A) 個人合理性，(B) 効率性，(C) 強コア性のそれぞれを満たすかどうか判定せよ (途中の計算過程は書く必要なし)．また，(A)，(B)，(C) のうち，満たさない性質については，なぜその性質が満たされないか，定義を踏まえて理由を説明せよ．

①	4321
②	3241
③	1234
④	4213

問４

（１）男女の人数が同数の安定結婚問題について考える．

（１−１）マッチング M に関するブロッキングペアの定義を書け．

（１−２）受入保留アルゴリズムにより得られたマッチングにおいて，ブロッキングペアが存在しないことを証明せよ．

（２）独身を許した安定結婚問題について考える．右の選好リストに対する安定マッチングを，受入保留アルゴリズム（の修正版）を用いて求めよ．計算の過程も書くこと．

男性			女性	
A	2413		1	BADC
B	143		2	DCAB
C	23		3	ADCB
D	412		4	BADC

（３）研修医マッチング問題について考える．**病院側がプロポーズする**受入保留アルゴリズム（の修正版）を使って，右下の選好リストに対する安定割当を求めよ．計算の過程も書くこと．なお，**病院１，３ の定員は２，病院２の定員は１**とする．

研修医			病院	
A	213		1	ABCD
B	213		2	CBAD
C	132		3	DABC
D	312			