オペレーションズ･リサーチ基礎

ネットワーク最適化：最小費用問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

最小費用流問題
(Minimum Cost Flow Problem)

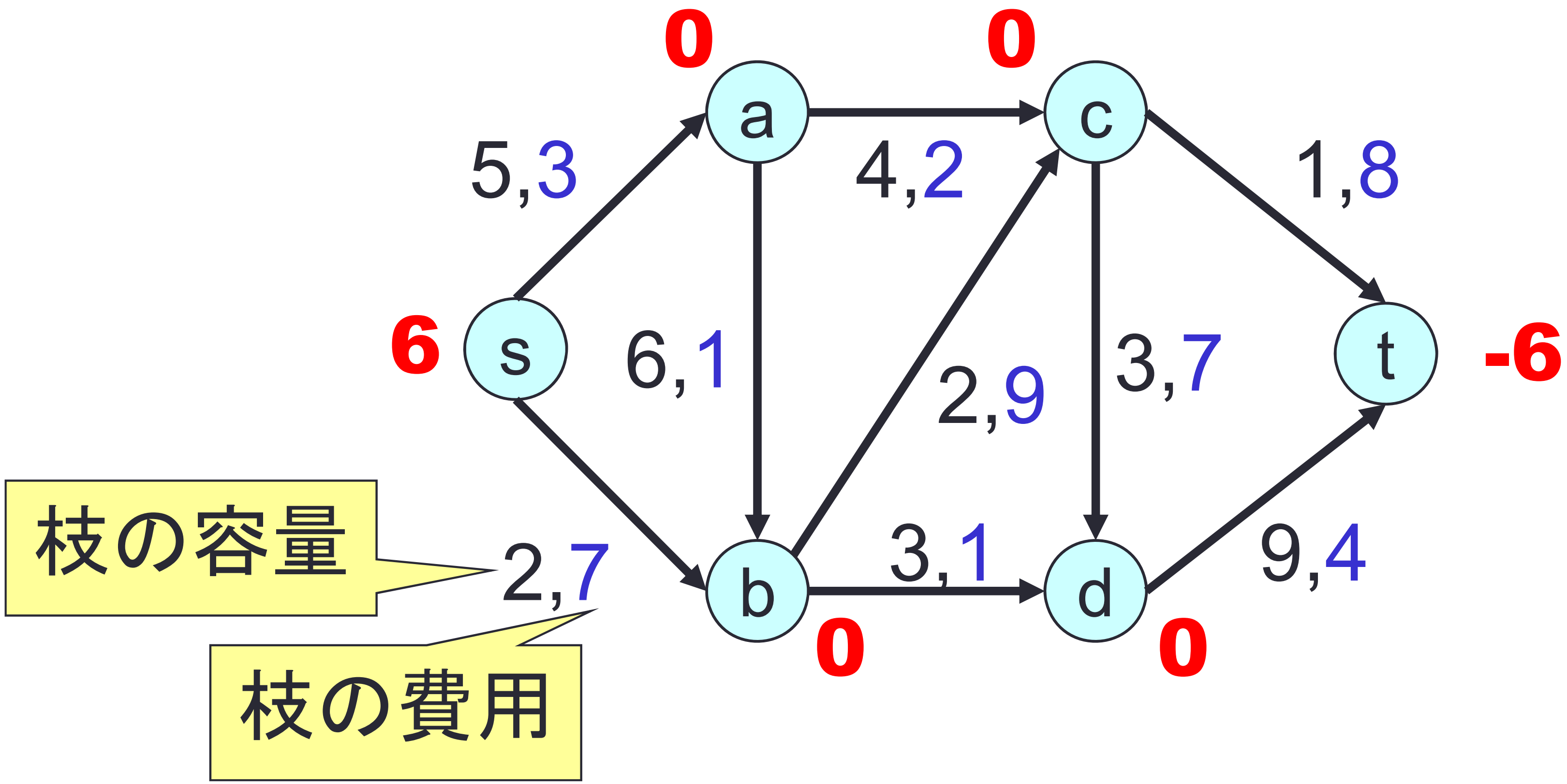
入力 : 有向グラフ G = (V, E)

各頂点 i ∈Vの供給・需要量 b_i （ただし b_i の和は0）

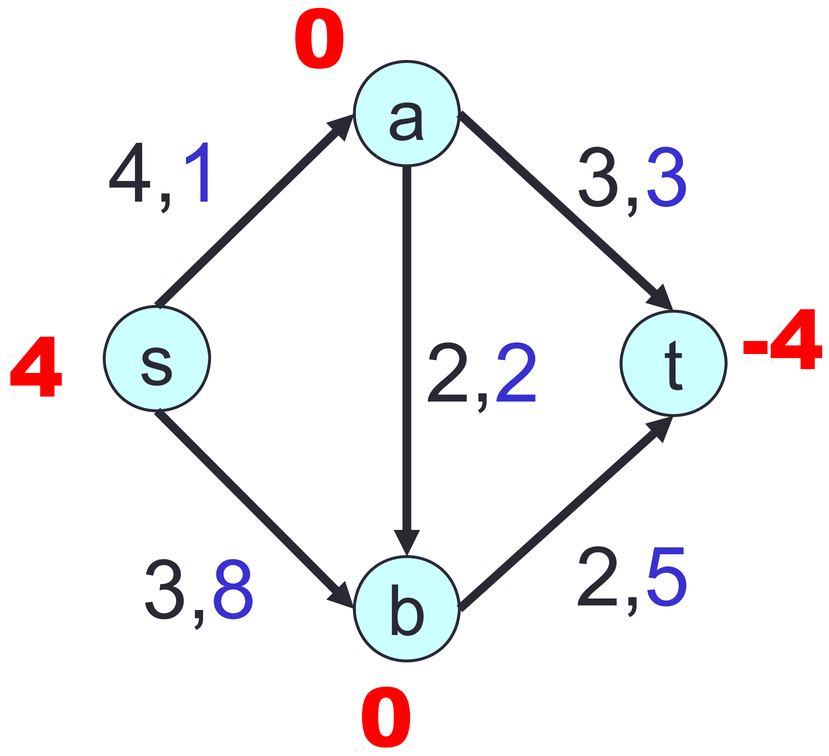
(b_i >0➔ i は供給点, <0➔ i は需要点, =0➔ i は通過点)

各枝 (i, j) ∈ E の容量 $u_{ij} \geqq 0$, 費用 c_{ij}

出力 : 需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの

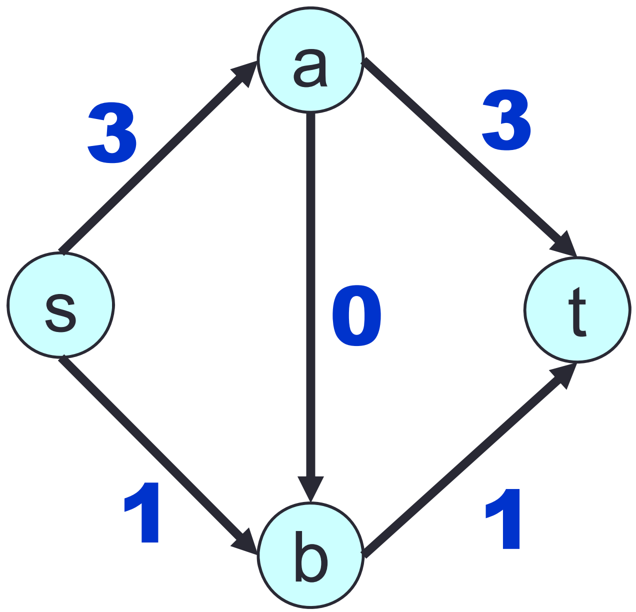


フローの最適性判定



問題例

フローの例



フローの費用＝25
最小か？

どうやって最小費用フローであることを判定するか？

ーーー　残余ネットワークの利用

残余ネットワークの作り方(その1)

最大流のときとほとんど同じ作り方

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

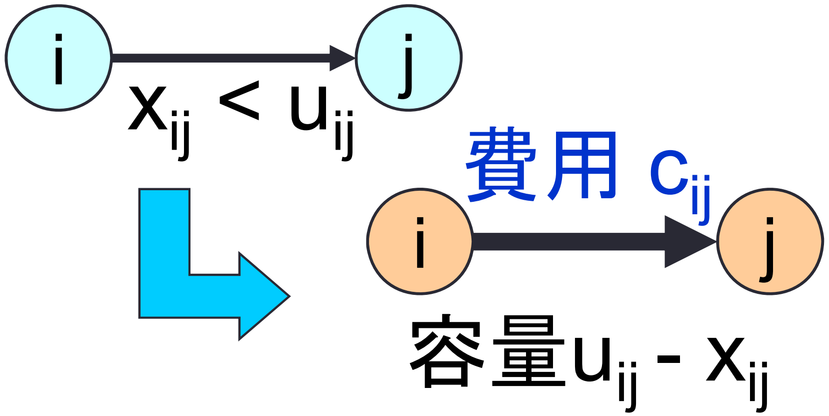
⇒ フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$

順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$

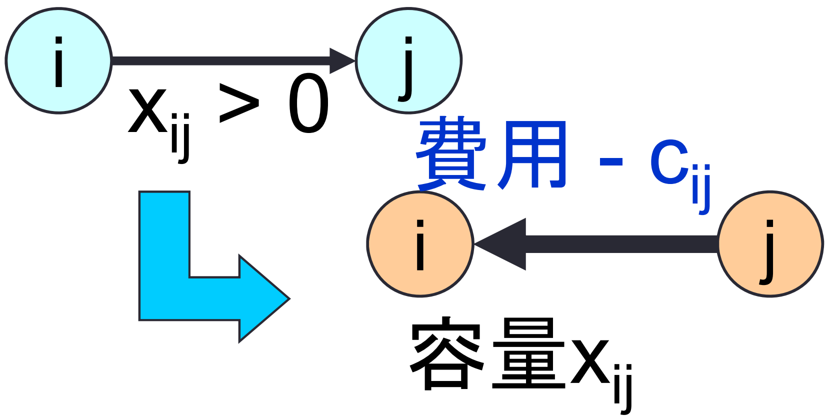
容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}



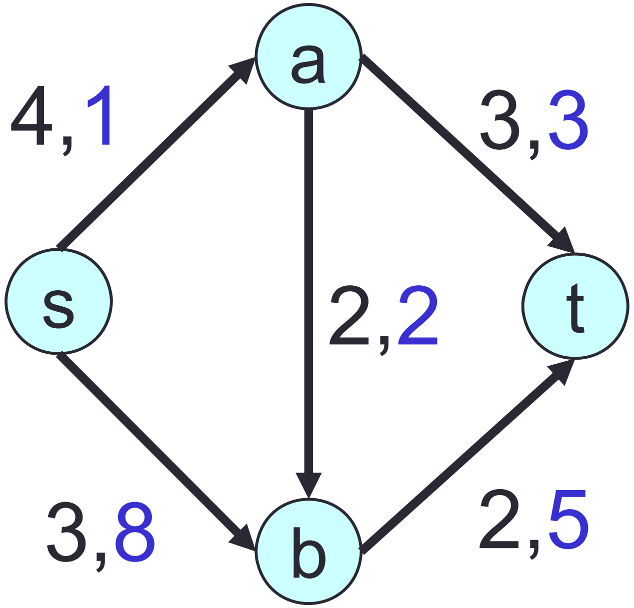
逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0 \}$

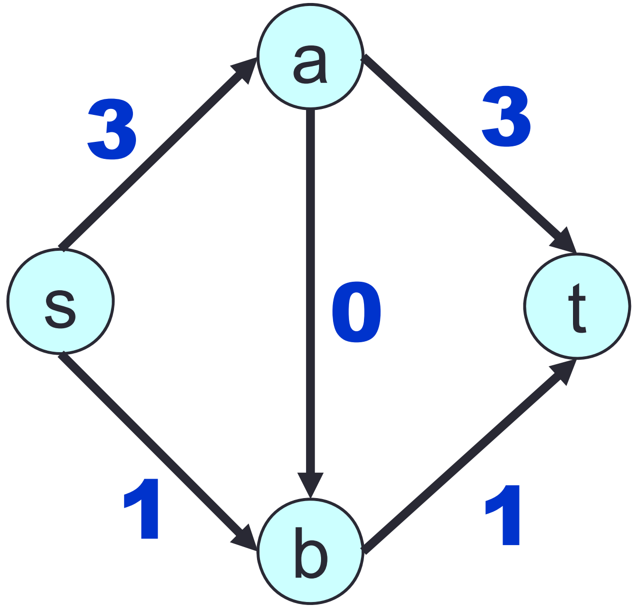
容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$, 費用 $- c_{ij}$



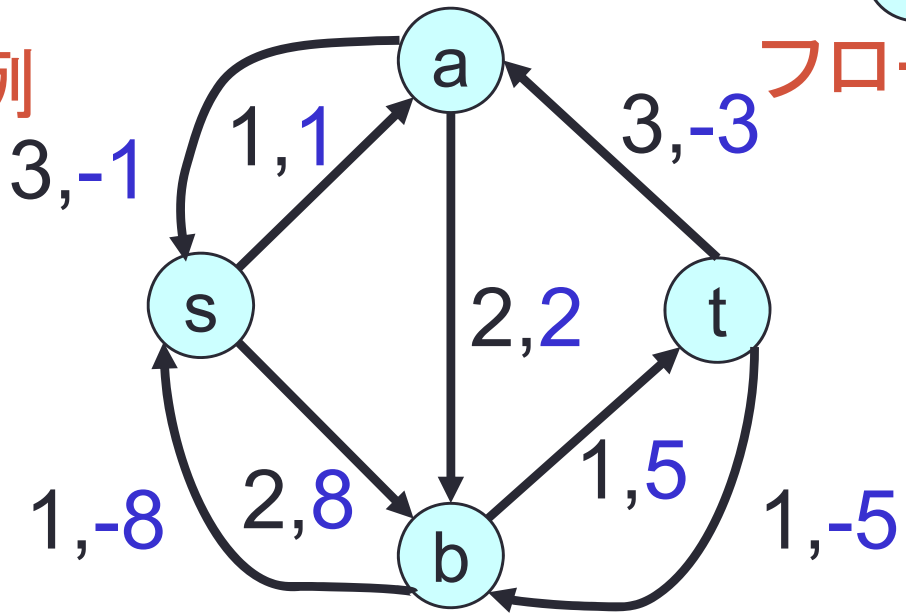
残余ネットワークの作り方（その2）



問題例



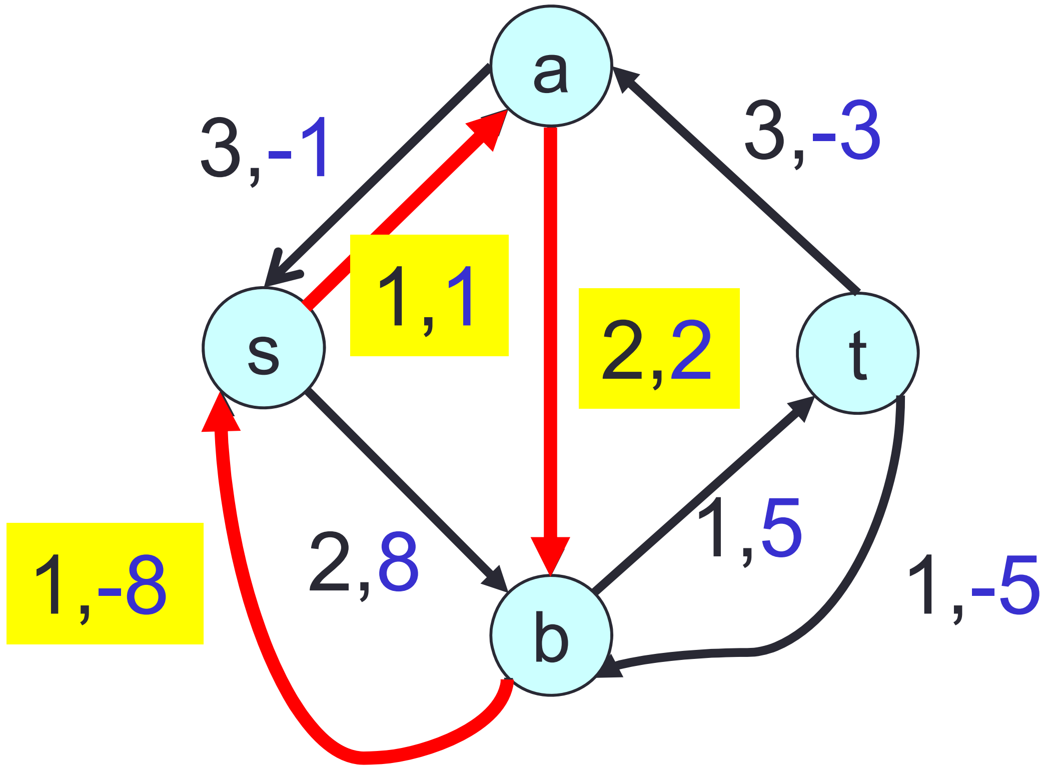
フローの例



残余ネットワーク

残余ネットワークの性質(その1)

残余ネットワークの閉路に注目



閉路の容量 α

＝閉路に含まれる枝の容量の最小値=1

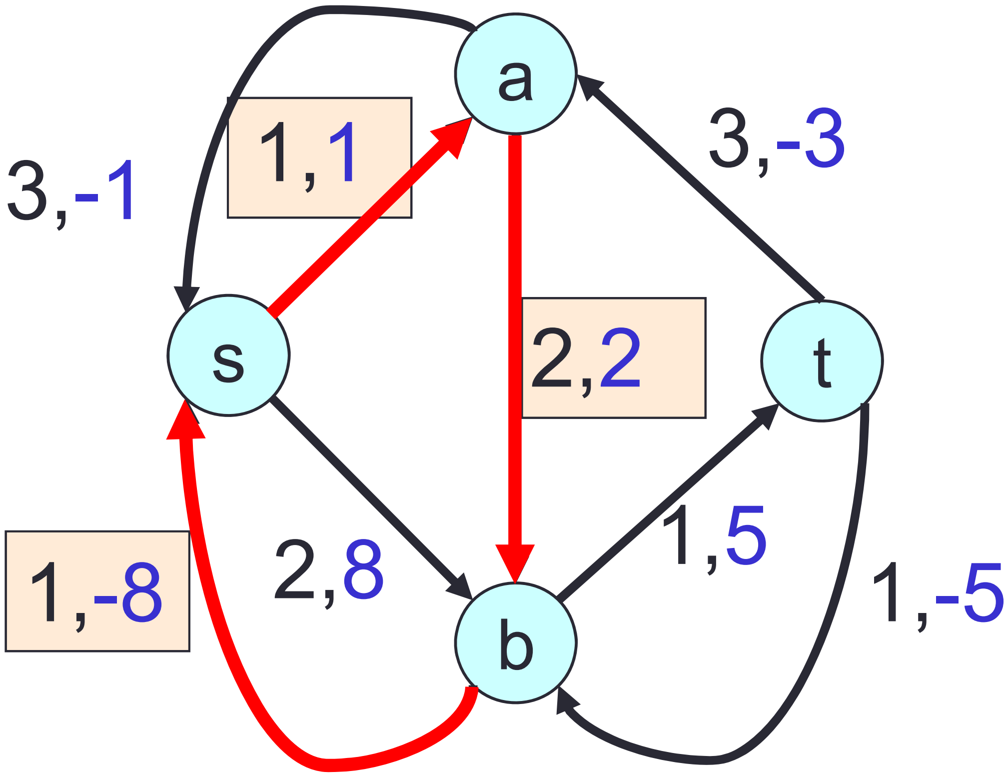
閉路の費用 γ

＝閉路に含まれる枝の費用の和=-5

残余ネットワークの性質(その2)

残余ネットワークの閉路を用いてフローを更新

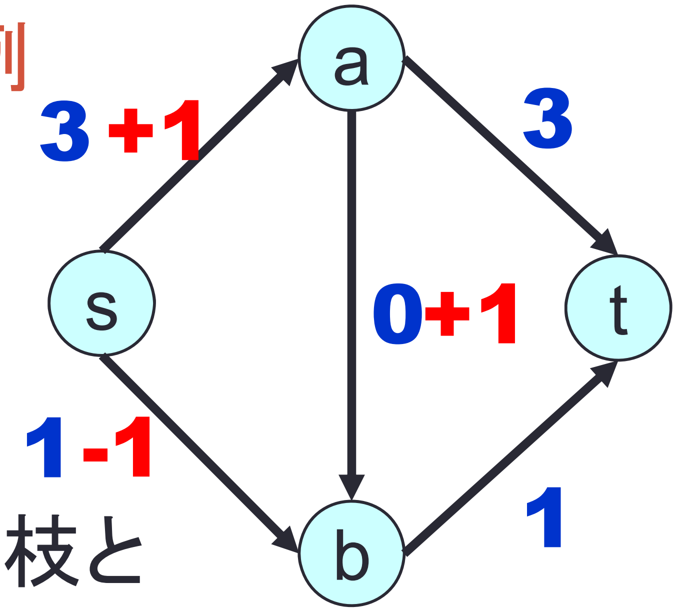
残余ネットワーク



閉路の容量 α=1

閉路の費用 γ=−5

フローの例



閉路の枝と

同じ向き⇒フロー値に＋α

逆の向き⇒フロー値に－α

無関係⇒フロー値は不変

この更新により、フローの費用は$\alpha\gamma$（＝－5）増加

残余ネットワークの性質（その3）

以上の議論より、以下が成り立つ

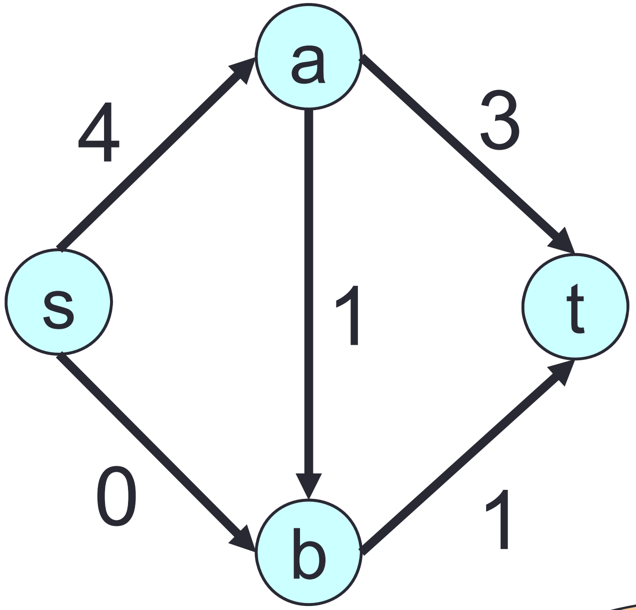
定理1：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒　フローの費用を減少させることが可能
⇒　現在のフローは費用最小でない

実は、逆も成り立つ（証明はあとで）

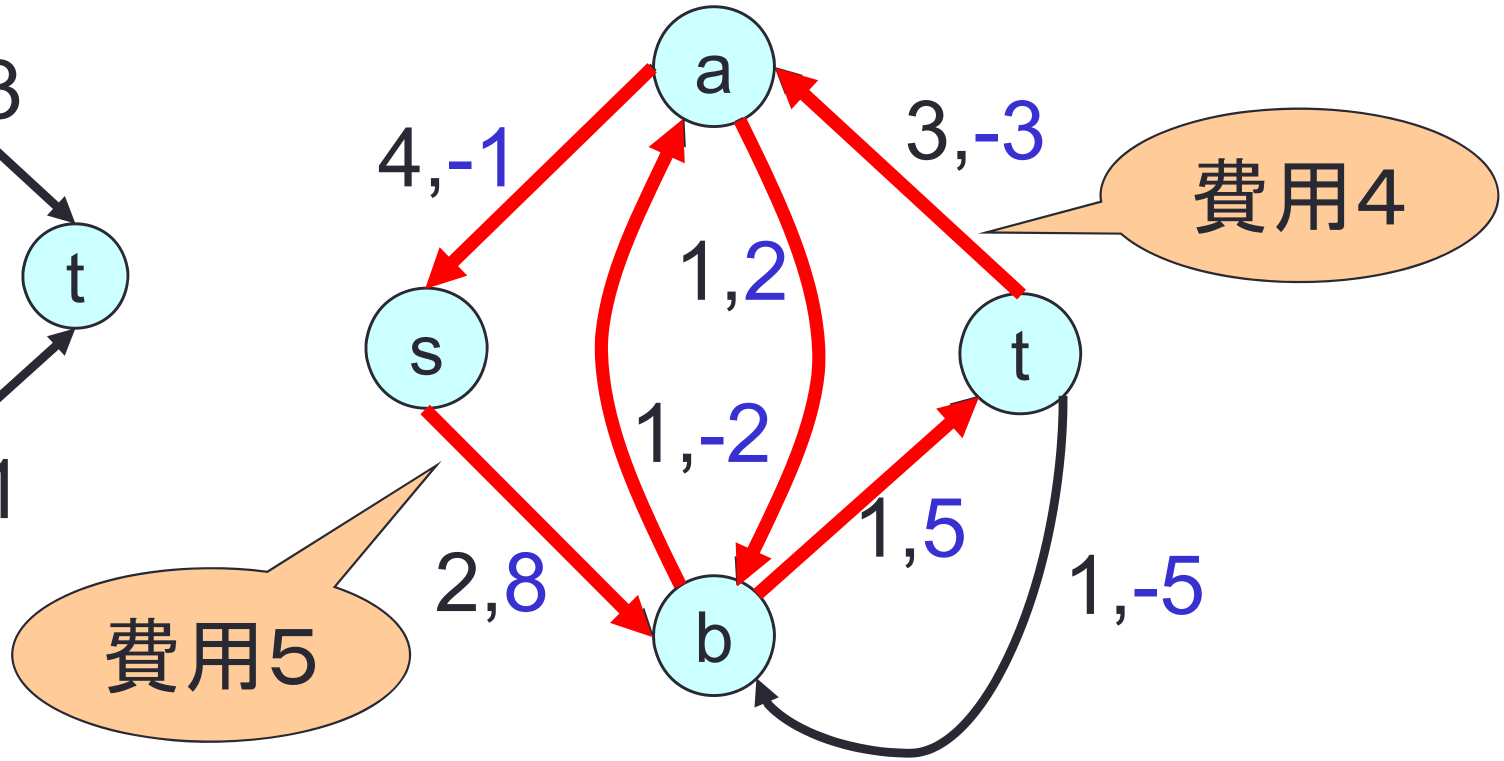
定理2：現在のフローは費用最小でない
⇒　残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

残余ネットワークの性質(その4)

修正後のフロー



残余ネットワーク



費用が負の閉路がない

⇒　現在のフローは費用最小

負閉路消去アルゴリズム

最小費用フローを求めるためのアルゴリズムのひとつ

ステップ0：人工問題を解いて，需要供給量を満たすフローを求める

ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在しない

⇒ 現在のフローは費用最小（終了）

ステップ3：残余ネットワークの費用が負の閉路を求め、

それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4：ステップ1へ戻る

負閉路消去アルゴリズムの計算時間

※各枝の容量，費用は整数と仮定

U = 枝容量の最大値，

C = 枝費用の絶対値の最大値

m = 枝の数， n = 頂点の数

- 各反復においてフローの費用が1以上減る
- −mCU ≦ フローの費用 ≦ mCU

➔ 反復回数 ≦ 2mCU

- 各反復での計算時間

＝ 残余ネットワークの負閉路を求める時間

➔最短路問題のアルゴリズムを使うと O(m n) 時間

∴ 計算時間は $O(m^2 n C U)$

（入力サイズは m + n + log U + log C なので，指数時間）

負閉路消去アルゴリズムの改良

負閉路消去アルゴリズムの反復回数を少なくしたい
➔ 各反復での負閉路の選び方を工夫する

（改良法１） 費用減少量最大の負閉路を選ぶ
反復回数 O(m log (n U))
ただし，費用減少量最大の負閉路を求めるのはNP困難
➔ 費用減少量が最大に近い負閉路で代用可能

（改良法２）
“（閉路の費用）／（閉路の枝数）”が最小の負閉路を選ぶ
反復回数 $O(n\,m^2 \log n)$，一回の反復 $O(n\,m)$

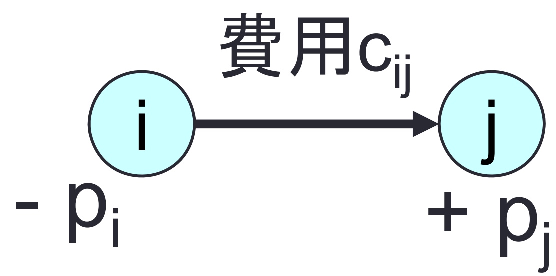
※この他にも，負閉路消去アルゴリズムの計算時間を短縮するための様々なテクニックが存在する

ネットワークのポテンシャル

定義：ポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$

--- 各頂点に付随する実数変数（からなるベクトル）

- イメージ：輸送に伴う補助金・手数料
  - 枝(i, j) にフローを1単位 流すとき，
    始点 i では p_i 円もらえる，終点 j では p_j 円支払う
  - ➔ 枝 (i, j) でのフローの実質的なコストは $c_{ij} - p_i + p_j$
  - 実質的なコスト > 0 → 枝 (i, j) のフローを減らしたい
  - 実質的なコスト < 0 → 枝 (i, j) のフローを増やしたい

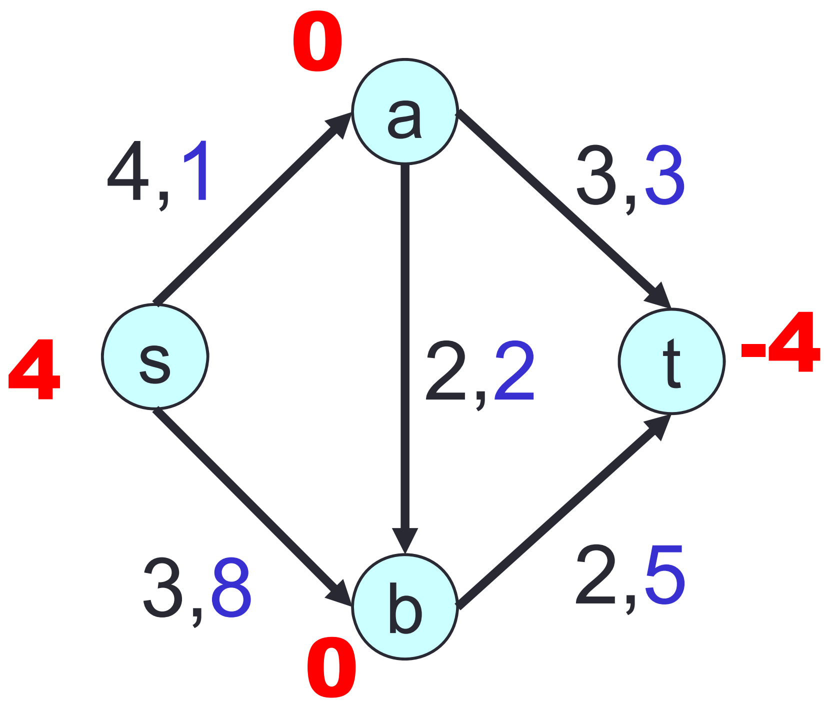


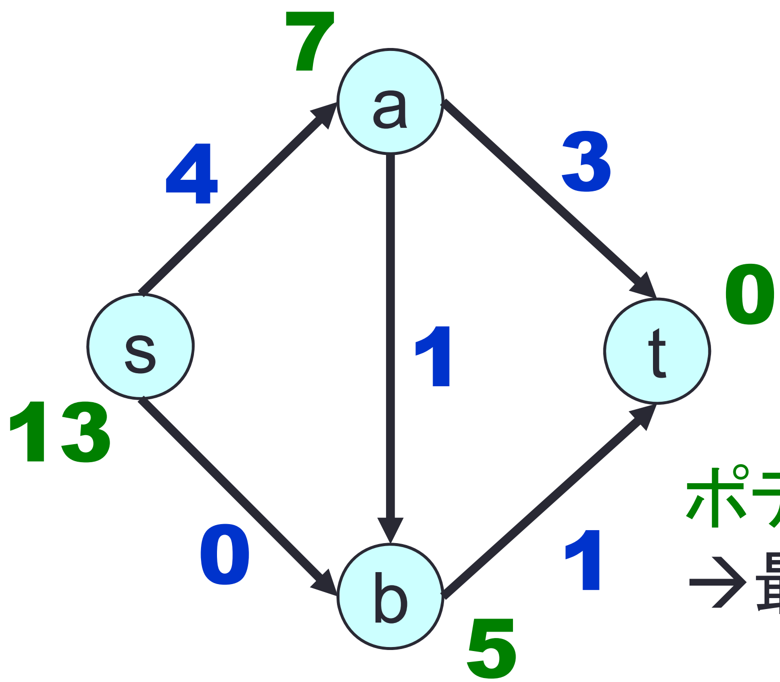
ポテンシャルを用いた最適性条件

定理３：現在のフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ は費用最小
←→ 以下の条件を満たすポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在：
(i) $c_{ij} - p_i + p_j > 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = 0$
(ii) $c_{ij} - p_i + p_j < 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = u_{ij}$
(iii) $0 < x_{ij} < u_{ij}$ なる枝 (i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j = 0$

証明は後で

※注意：条件(iii) は (i), (ii) から導かれるので，なくても良い





ポテンシャル存在
→最小費用フロー

ポテンシャルを用いた最適性条件

定理３：フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ は費用最小

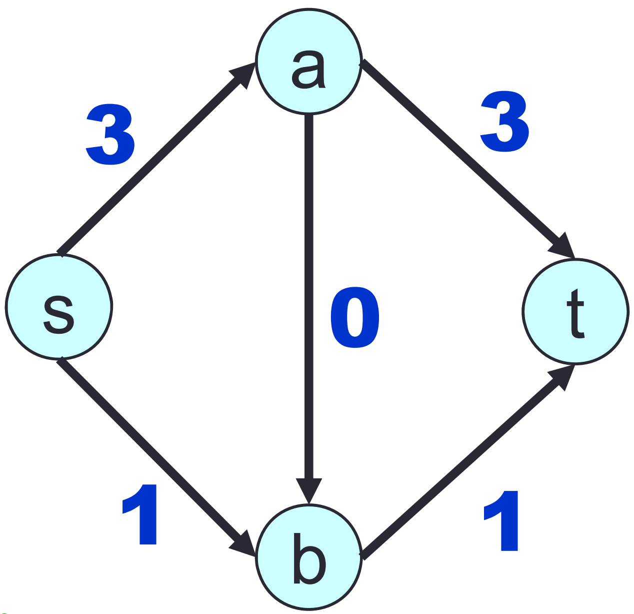
←→ 以下の条件を満たすポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在:

(i) $c_{ij} - p_i + p_j > 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = 0$

(ii) $c_{ij} - p_i + p_j < 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = u_{ij}$

(iii) $0 < x_{ij} < u_{ij}$ なる枝 (i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j = 0$

証明は後で



条件(i)（の対偶）より

$$8 - p_s + p_b \leq 0 \Rightarrow \boxed{-8 + p_s - p_b \geq 0}$$

条件(ii)（の対偶）より

$$\boxed{1 - p_s + p_a \geq 0, 2 - p_a + p_b \geq 0}$$

ポテンシャル存在しない

→最小費用フローではない

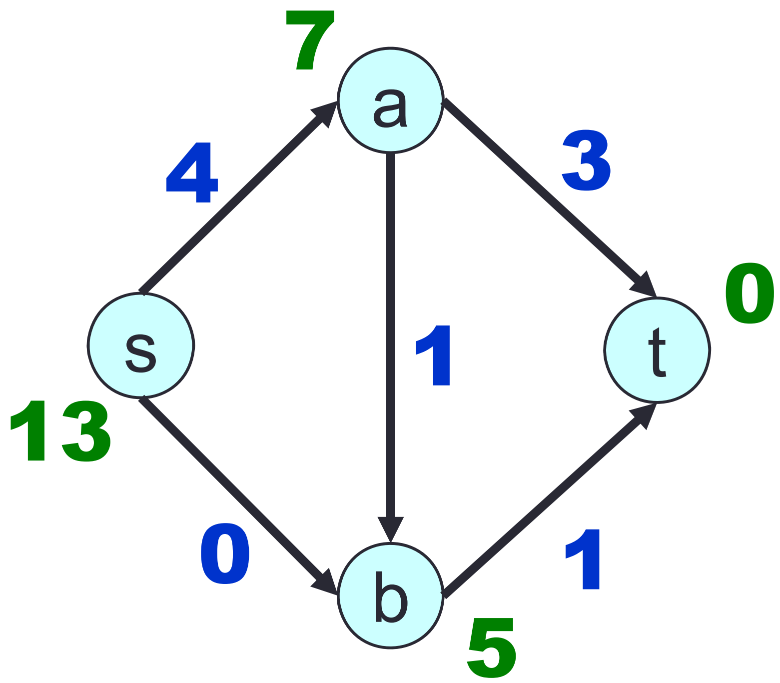
$\boxed{\quad}$ を辺々加えると - 5≧0（矛盾）

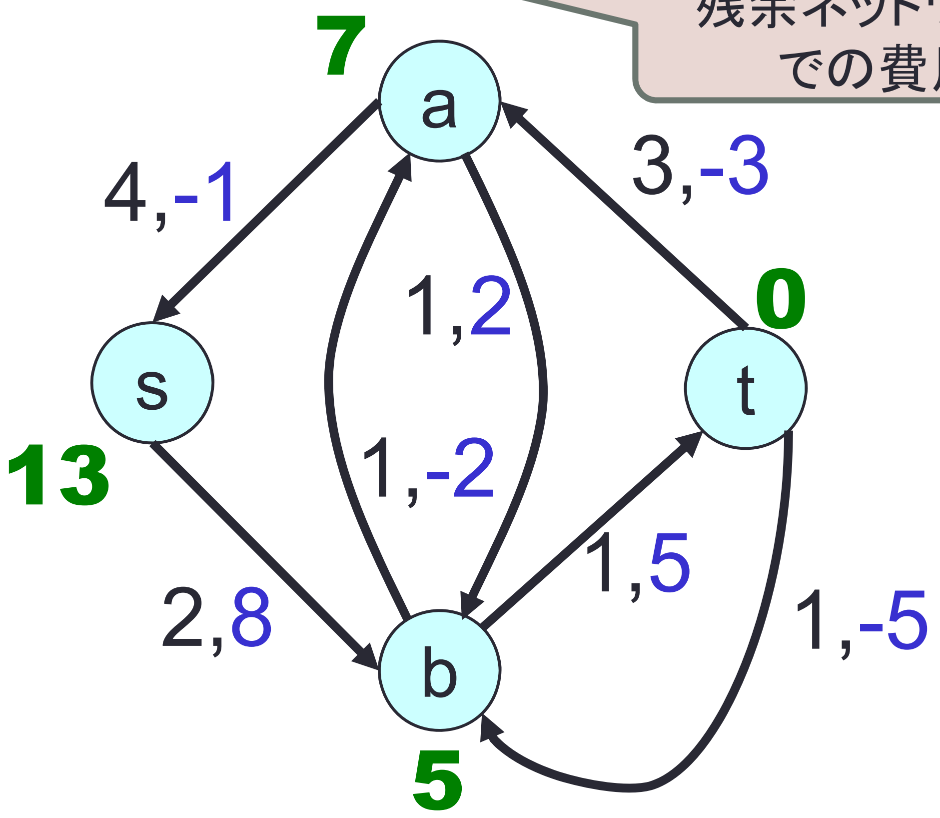
ポテンシャルを用いた最適性条件の書き換え

定理3の条件(i), (ii) は，残余ネットワークを使うと簡潔になる

定理４：現在のフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ は費用最小
←→ 以下の条件を満たすポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在：
残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$

残余ネットワーク
での費用





定理4の証明

定理3を用いて，定理4を証明する.

定理3の条件(i), (ii) と条件(∗)が等価であることを示せばよい.

(i) $c_{ij} - p_i + p_j > 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = 0$

(ii) $c_{ij} - p_i + p_j < 0$ なる枝 (i, j) に対し，$x_{ij} = u_{ij}$

(∗) 残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$

(∗)において，

残余ネットワークの順向きの枝(i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$

⇔ $x_{ij} < u_{ij}$ ならば $c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$ ⇔ (ii) の対偶

残余ネットワークの逆向きの枝(i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$

⇔ $x_{ji} > 0$ ならば $-c_{ji} - p_i + p_j \geqq 0$

⇔ $x_{ji} > 0$ ならば $c_{ji} - p_j + p_i \leqq 0$ ⇔ (i) の対偶

定理3の「$\leftarrow$」の証明(その1)

$d_{ij} = c_{ij} - p_i + p_j$ と定義，これを枝(i, j)の新しい費用と見なす．

示すこと

（1）条件(i), (ii), (iii) を満たすフロー x は d_{ij} に関する総費用が最小

（2）（フロー x の d_{ij} に関する総費用）

＝（x の c_{ij} に関する総費用）＋（x に依存しない）定数

（1）の証明：

条件(i), (ii), (iii) を満たすフロー x は，枝ごとに見ても

d_{ij} に関する費用が最小

$d_{ij} > 0 \Rightarrow x_{ij} = 0$,　$d_{ij} < 0 \Rightarrow x_{ij} = u_{ij}$,　$d_{ij} = 0 \Rightarrow x_{ij}$ は何でも良い

よって，総費用も最小

定理3の「🡐」の証明(その2)

（2）（フロー x の d_{ij} に関する総費用）

＝(x のc_{ij} に関する総費用）＋（x に依存しない）定数

（2）の証明：

$$\sum_{(i,j)\in E} d_{ij}\, x_{ij} = \sum_{(i,j)\in E} \left(c_{ij} - p_i + p_j\right) x_{ij}$$

$$= \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{(i,j)\in E} \left(-p_i + p_j\right) x_{ij}$$

$$= \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij}$$

$$-\sum_{k\in V} p_k \left(\sum\{x_{kj} \mid (k,j)\text{は}k\text{から出る枝}\} - \sum\{x_{ik} \mid (i,k)\text{は}k\text{に入る枝}\}\right)$$

$$= \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, x_{ij} - \sum_{k\in V} p_k\, b_k$$

各頂点ごとに
和をとる

流量保存条件より

最適性条件のまとめ

フロー x は費用最小

定理1
（証明済み）

定理2
（証明まだ）

定理3
の「🡐」
（証明済み）

定理3
の「➔」
（証明まだ）

フロー x に関する
残余ネットワークに
負閉路が存在しない

フロー x に対し，ある条件を満たす
ポテンシャル p = (p_i | $i \in V$) が存在

この部分を証明すれば，
定理2および
定理3の「➔」
の証明が完了

「負閉路なし➔ポテンシャル存在」の証明

命題: フロー x に関する残余ネットワークに負閉路が存在しない
➔ その残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し，$c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$
を満たすポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在

（証明）
ネットワーク上の最短路問題に関する既知の結果を利用

- 残余ネットワークにおいて，
  費用を枝の長さとみなした最短路問題を考える.
- 任意に選んだ頂点 u から，各頂点 v への最短路を求める.
  - u から v へのパスが存在しない場合:
    長さが十分に大きい枝 (u, v) を追加
    （これにより，負閉路は発生しない）
- 負閉路が存在しない➔最短路問題の既知の結果より，
  u から各頂点 v への最短路は必ず存在．その長さを q_v とおく

「負閉路なし➔ポテンシャル存在」の証明

（証明のつづき）

- 負閉路が存在しない➔最短路問題の既知の結果より，
  u から各頂点 v への最短路は必ず存在．その長さを q_v とおく

（注：負閉路が存在する
➔任意に短いパスが存在し，最短路が定まらない）

- 最短路の長さの性質：
  残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し，$q_i + c_{ij} \geqq q_j$

（∵ i への最短路経由で j に行くパスの長さ ≧ j への最短路の長さ）

- $p_i = - q_i$ ($i \in V$) とおくと，上記の不等式より $c_{ij} - p_i + p_j \geqq 0$

最小費用流問題の応用例:研究室配属問題

- 各研究室に学生数人を割り当てる

学生A,B,C,Dの４人を研究室X,Yへ

- 各研究室に配属できる人数には上限がある

	X研究室	Y研究室
定員	3	3

- 学生の満足度の合計を最大にしたい

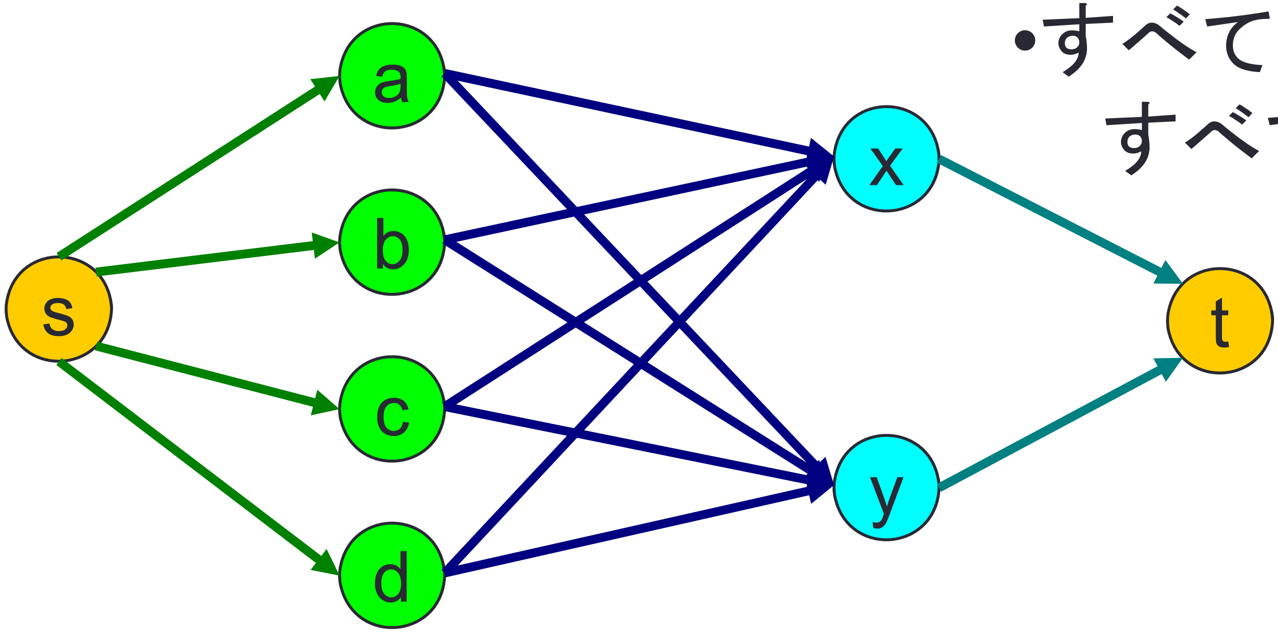
満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3

応用例：研究室配属問題

最小費用流問題に変形

- 各学生に対応する頂点 a, b, c, d（通過点）
- 各研究室に対応する頂点 x, y（通過点）
- 供給点 s, 需要点 t

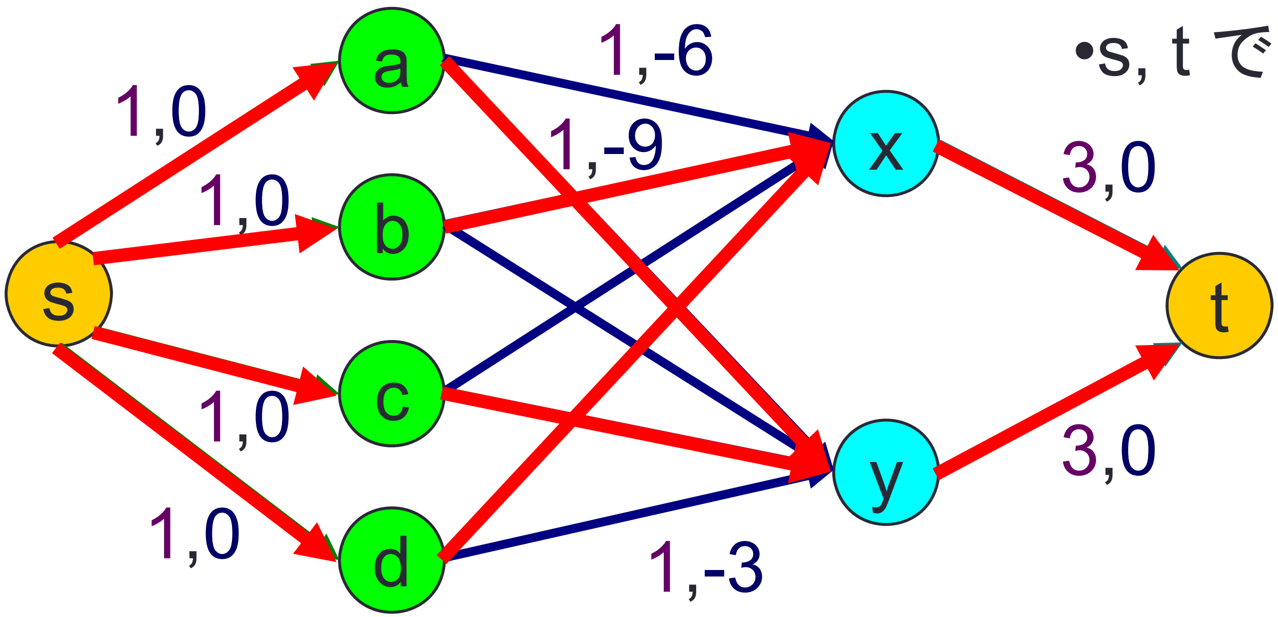
- 供給点から学生頂点への枝 (s, a), (s, b), …
- 研究室頂点から需要点への枝 (x, t), (y, t)



- すべての学生頂点から
  すべての研究室頂点への枝
  (a, x), (a, y), (b, x), …

応用例:研究室配属問題

- 供給点から学生頂点への枝:容量1、費用0
- 研究室頂点から需要点への枝:容量＝研究室の定員、費用0
- 学生頂点から研究室頂点への枝:容量1、費用＝(－1)×満足度



- s, t での需要(供給)量＝学生数

学生B,D→X研究室

学生A,C→Y研究室

この問題の(整数値)フロー⇔定員を満たす配属方法

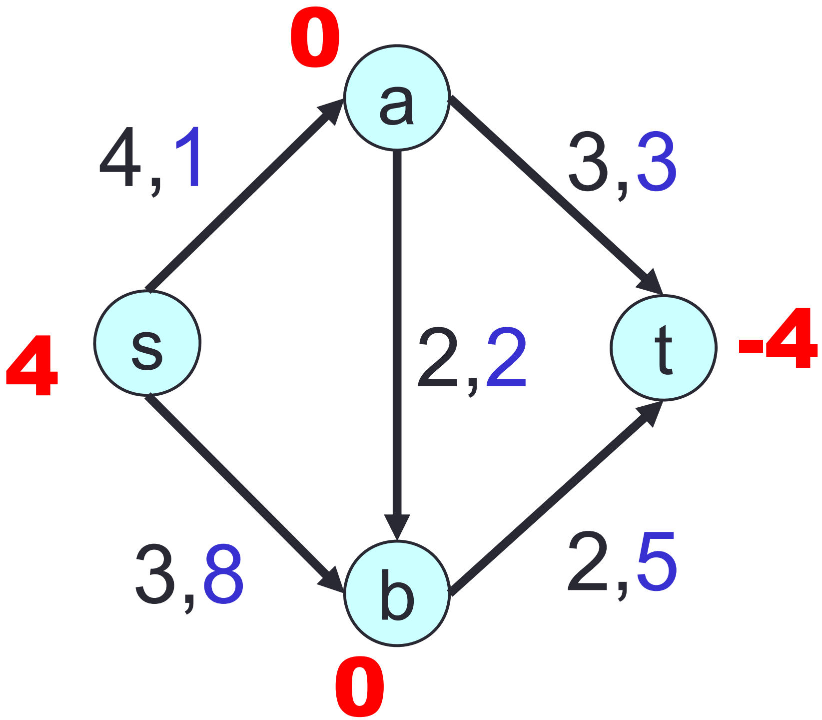
フローの費用⇔(－1)×学生の満足度の合計

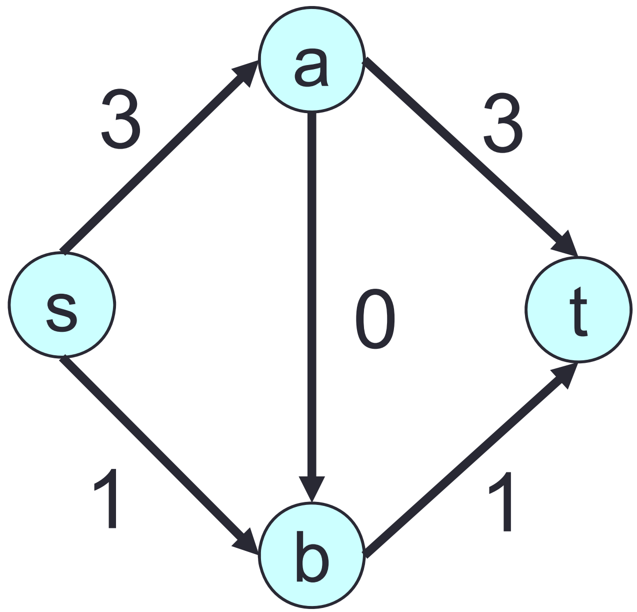
∴最小費用流問題に変形できた

レポート問題

次の最小費用フロー問題 (a), (b) に対して，以下の問いに答えよ.
(1) 定式化を書け
(2) 初期フローに対する，定理3のポテンシャルの条件を具体的に書け.
また，そのようなポテンシャルが存在しない理由を，条件を使って説明せよ.
(3) 初期フローに対して負閉路消去アルゴリズムを適用し，
最小費用フローを求めよ（途中の計算過程も省略せず書くこと）
(4) 得られた最小費用フローに対し，定理3の条件を満たすポテンシャルを求めよ.

(a)





初期フロー