オペレーションズ・リサーチ基礎

ネットワーク最適化：最大流問題

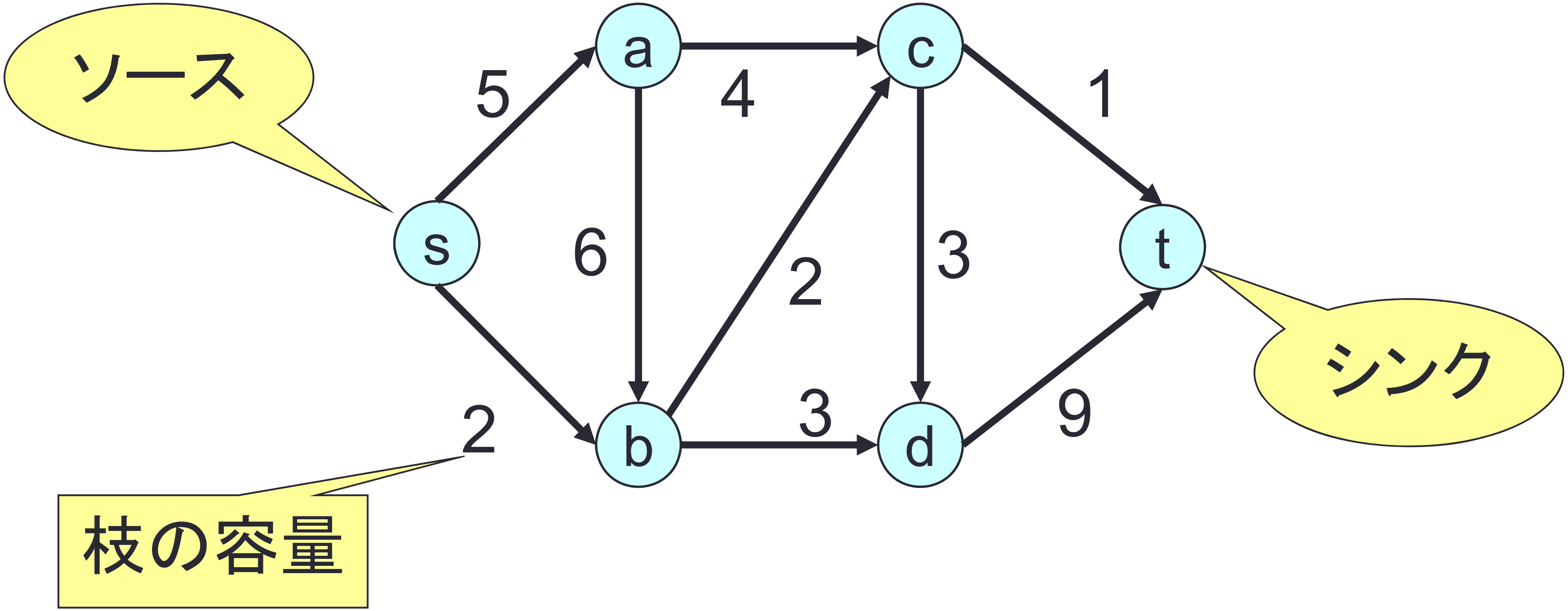
塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

最大流問題の定義（その1）

入力：有向グラフ G = (V, E)

ソース（供給点） $s \in V$, シンク（需要点） $t \in V$

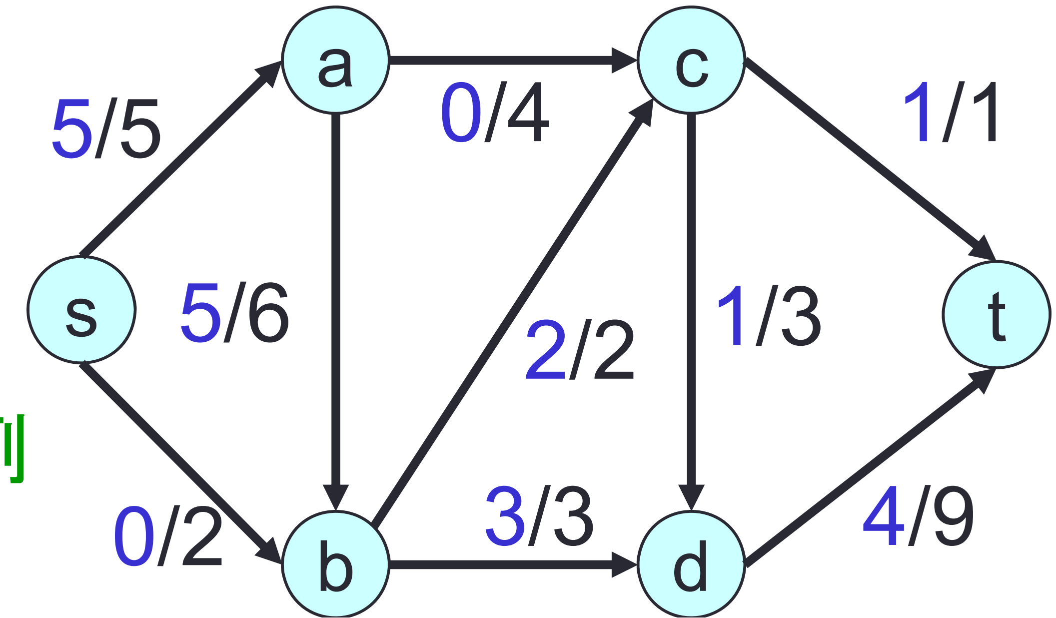
各枝 $(i, j) \in V$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$



最大流問題の定義(その2)

目的:ソースからシンクに向けて，枝と頂点を経由して
「もの」を出来るだけたくさん流す

条件1(容量条件):
0 ≦ 各枝を流れる「もの」の量 ≦ 枝の容量
条件2(流量保存条件):
頂点から流れ出す「もの」の量＝ 流れ込む「もの」の量

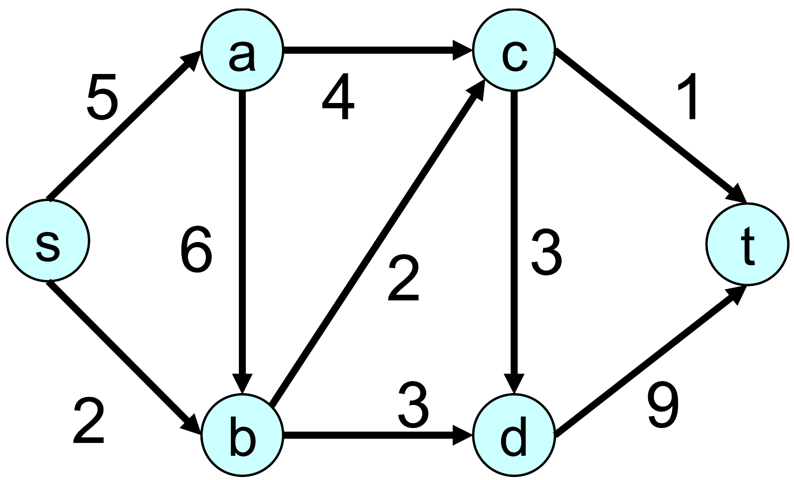


実行可能解の例

最大流問題の定式化：変数，目的関数と容量条件

変数 x_{ij}： フロー＝枝 (i, j) を流れる「もの」の量
変数 f： 総流量　＝ シンクに流れ込む「もの」の総量
　　　　　　　　＝ ソースから流れ出す「もの」の総量

目的：ソースからシンクに「もの」を出来るだけ多く流したい
　⇒ 最大化　f
容量条件：0 ≦ 各枝を流れる「もの」の量 ≦ 枝の容量
　⇒ $0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$　　($(i,j) \in E$)



最大化　f
容量条件：
$0 \leqq x_{sa} \leqq 5$, $0 \leqq x_{sb} \leqq 2$, $0 \leqq x_{ab} \leqq 6$,
$0 \leqq x_{ac} \leqq 4$, $0 \leqq x_{bc} \leqq 2$,
…

最大流問題の定式化：流量保存条件

流量保存条件：

(頂点から流れ出す「もの」の量) − (流れ込む「もの」の量) ＝ 0

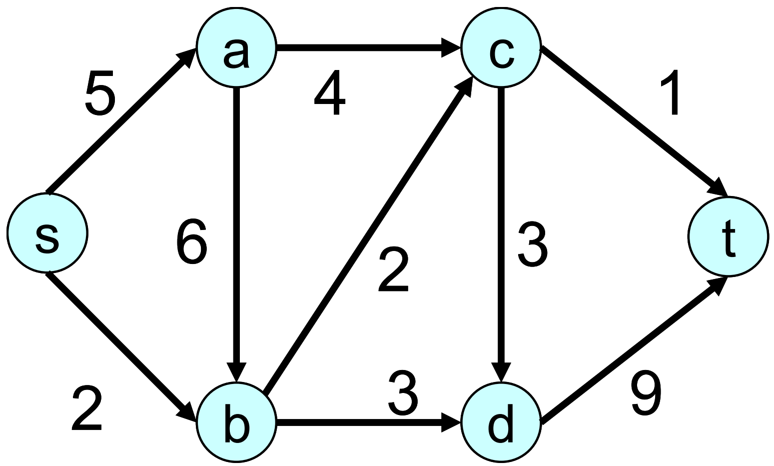
⇒ $\sum\{x_{kj}$ | 枝 (k,j) は 頂点 k から出る$\}$

　　− $\sum\{x_{ik}$ | 枝 (i,k) は 頂点 k に入る$\}$ ＝ 0 　$(k \in V - \{s, t\})$

ソースとシンクに関する条件：

$\sum\{x_{sj}$ | (s,j) は s から出る$\}$ - $\sum\{x_{is}$ | (i,s) は s に入る$\}$ = f

$\sum\{x_{tj}$ | (t,j) は t から出る$\}$ - $\sum\{x_{it}$ | (i,t) は t に入る$\}$ = - f



流量保存条件の例：

$x_{ac} + x_{ab} - x_{sa} = 0$

$x_{bc} + x_{bd} - x_{ab} - x_{sb} = 0$

$x_{ct} + x_{cd} - x_{ac} - x_{cb} = 0$

$x_{dt} - x_{cd} - x_{bd} = 0$

$x_{sa} + x_{sb} = f$, 　　$- x_{ct} - x_{dt} = - f$

最大流問題の定式化:まとめ

最大化　f

条件　$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$　　$((i,j) \in E)$

$\sum\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\} - \sum\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0$

(k : s, t 以外の頂点)

$\sum\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\} - \sum\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = f$

$\sum\{x_{tj} \mid (t,j)$ は t から出る$\} - \sum\{x_{it} \mid (i,t)$ は t に入る$\} = -f$

この問題の実行可能解 x_{ij} --- 実行可能フロー
総流量が最大の実行可能フロー --- 最大フロー

最大流問題の応用例

- 物流
- シーズン途中でのプロ野球チームの優勝可能性判定
  - 残り試合全勝しても優勝の可能性がないかどうか？
- 画像処理における物体の切り出し
  - 画像内の物体のみ取り出す
- その他多数

最大流問題の解法

最大流問題は線形計画問題の特殊ケース

⇒　単体法で解くことが可能

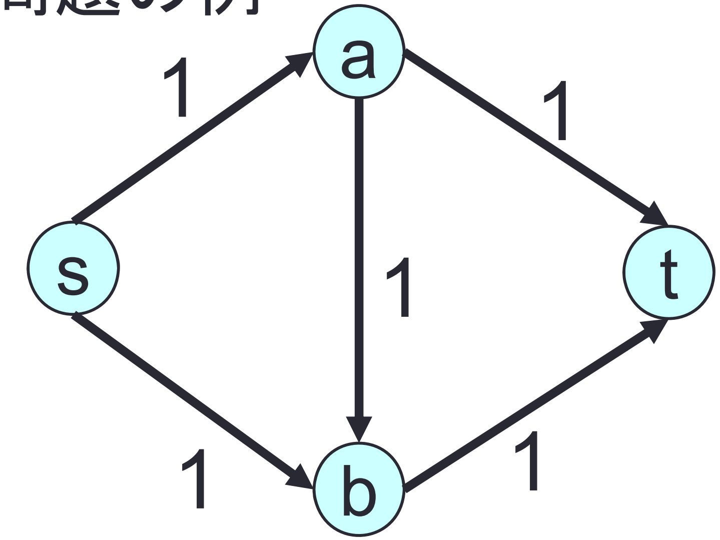
最大流問題は良い（数学的な）構造をもつ

⇒　この問題専用の解法（増加路アルゴリズムなど）

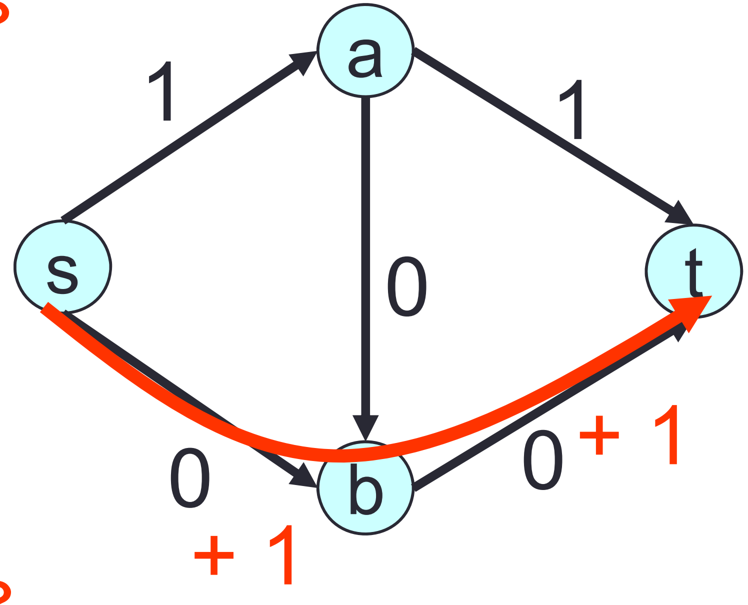
を使うと，より簡単＆より高速に解くことが可能

最大フローの判定

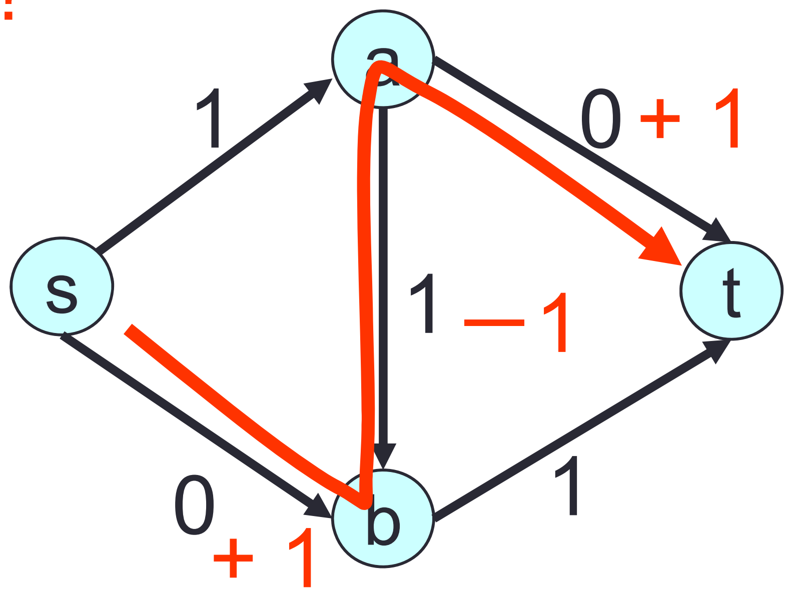
問題の例



フロー例1：最大？
最大ではない



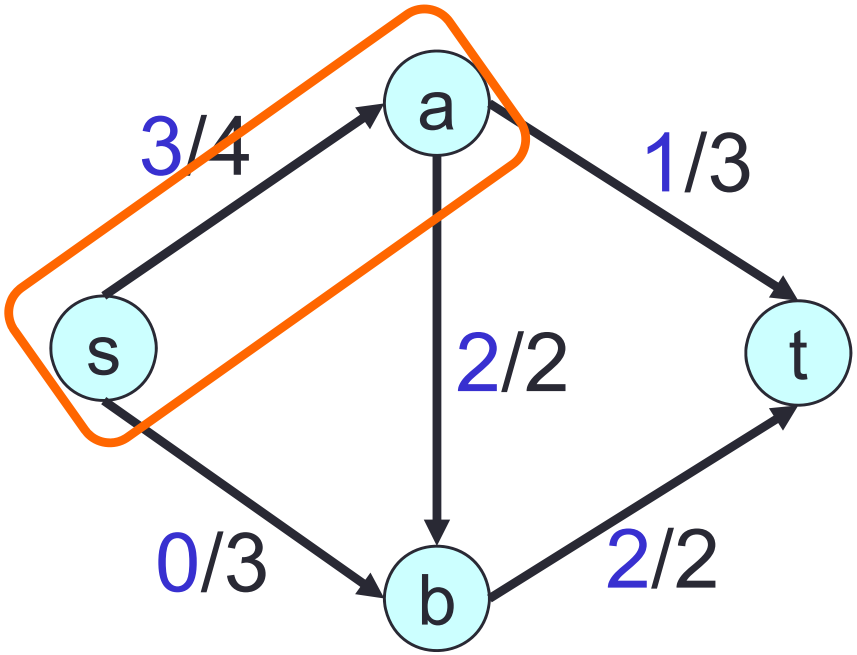
フロー例2：最大？
最大ではない



最大フローであることの判定を
効率よく行うには？
⇒　残余ネットワークを利用

残余ネットワークの定義

残余ネットワークの作り方



問題例とフロー

各枝のデータは

（フロー量/容量）

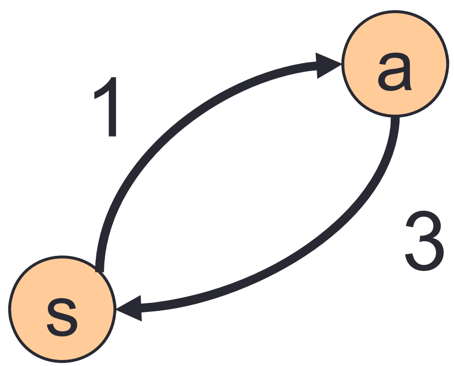
枝(s,a)において

☆さらに4－3＝1だけフロー

を流せる

⇒　残余ネットワークに

容量1の枝(s,a)を加える



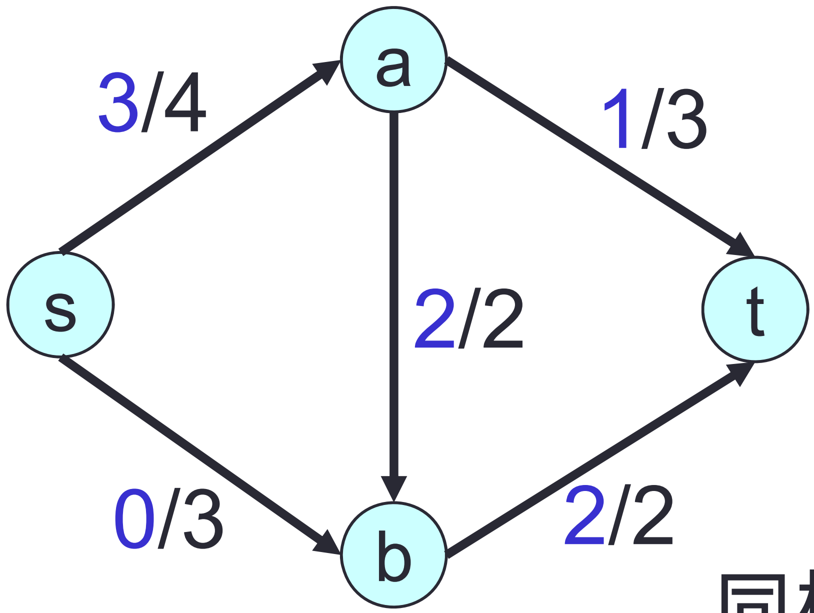
☆現在のフロー3を逆流させて

0にすることが出来る

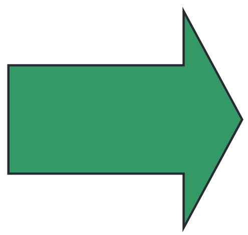
⇒　容量3の枝(a,s)を加える

残余ネットワークの定義

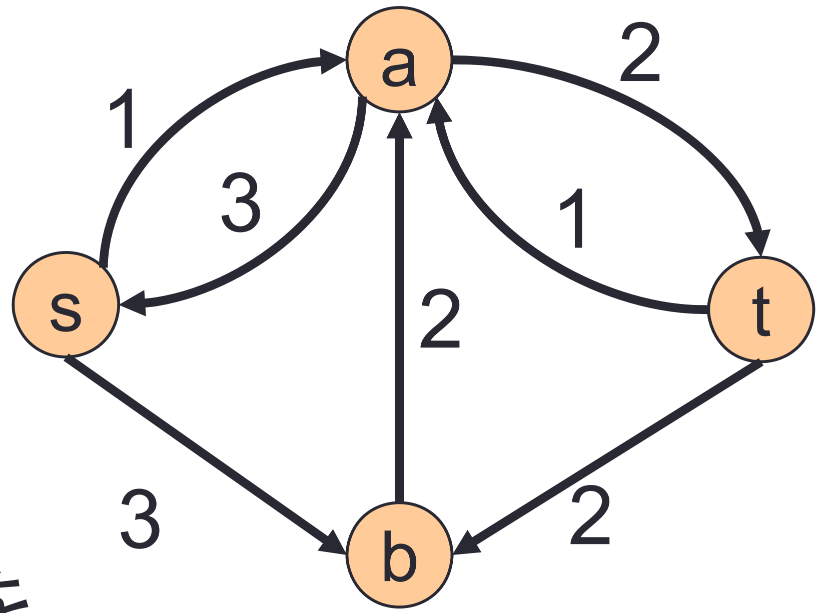
残余ネットワークの作り方



問題例とフロー



同様の操作を
各枝に行う



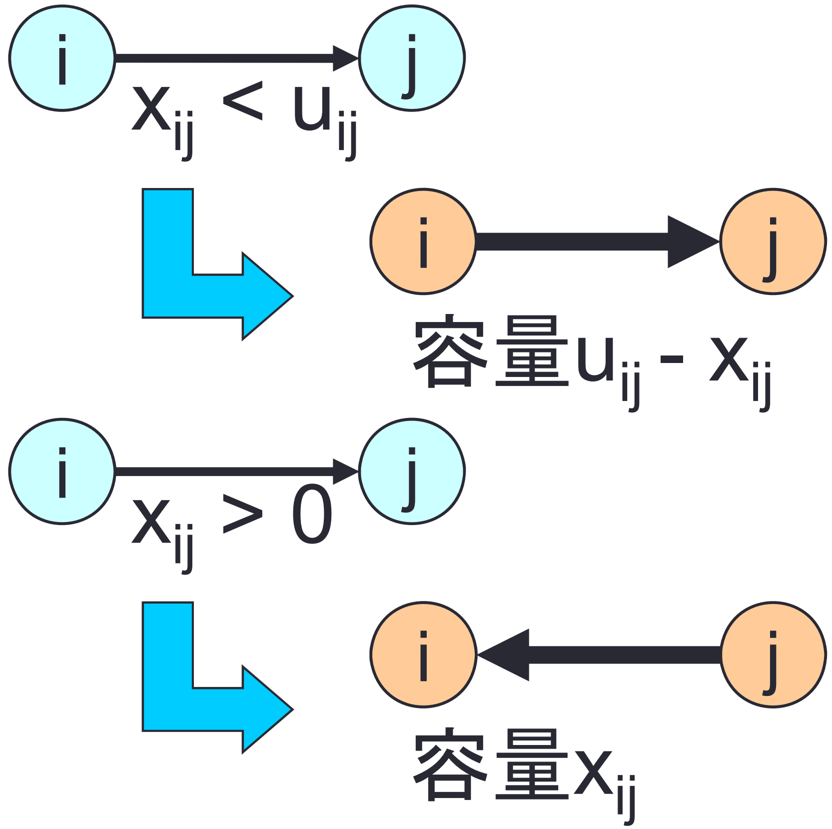
残余ネットワーク
の完成

残余ネットワークの定義(まとめ)

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

$E^x = F^x \cup R^x$



順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij} \}$

各枝の容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$

逆向きの枝集合

$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0 \}$

各枝の容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$

注意！ :現在のフローが変わると残余ネットワークも変わる

残余ネットワークに関する定理

増加路：残余ネットワークでの
ソース s からシンク t へのパス（路・みち）

定理1：残余ネットワークに 増加路が存在する
➔ 現在のフローの総流量は増加可能

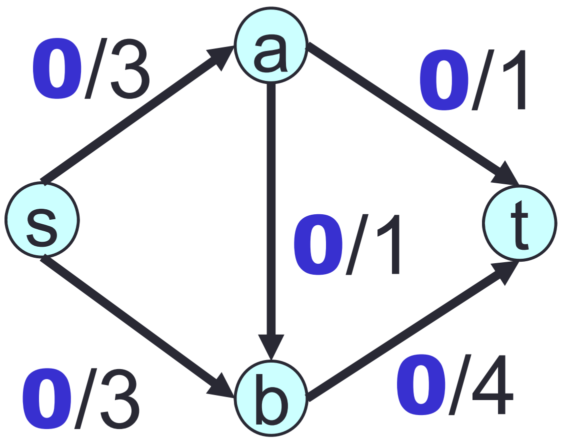
定理2：残余ネットワークに 増加路が存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

定理1の例

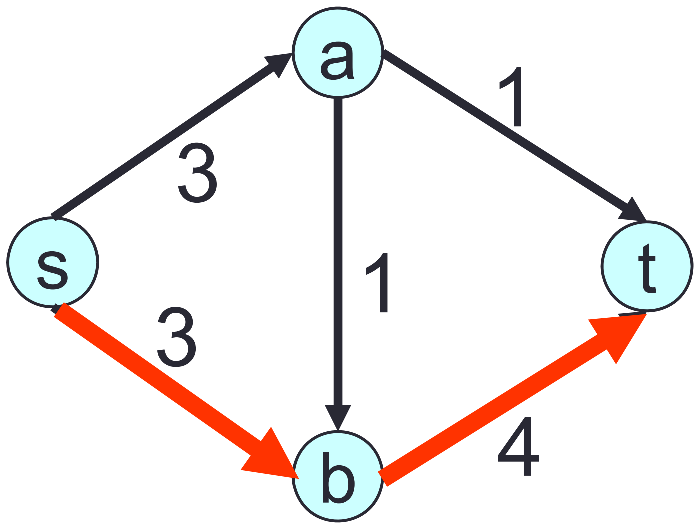
定理1：残余ネットワークに増加路が存在する
➔ 現在のフローの総流量は増加可能

証明：増加路(s-tパス)を使うと，本当に総流量を増加できる

現在のフロー**x**

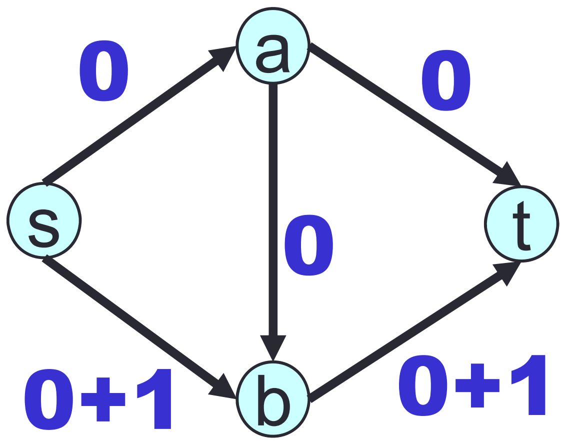


残余ネットワーク



増加路が存在

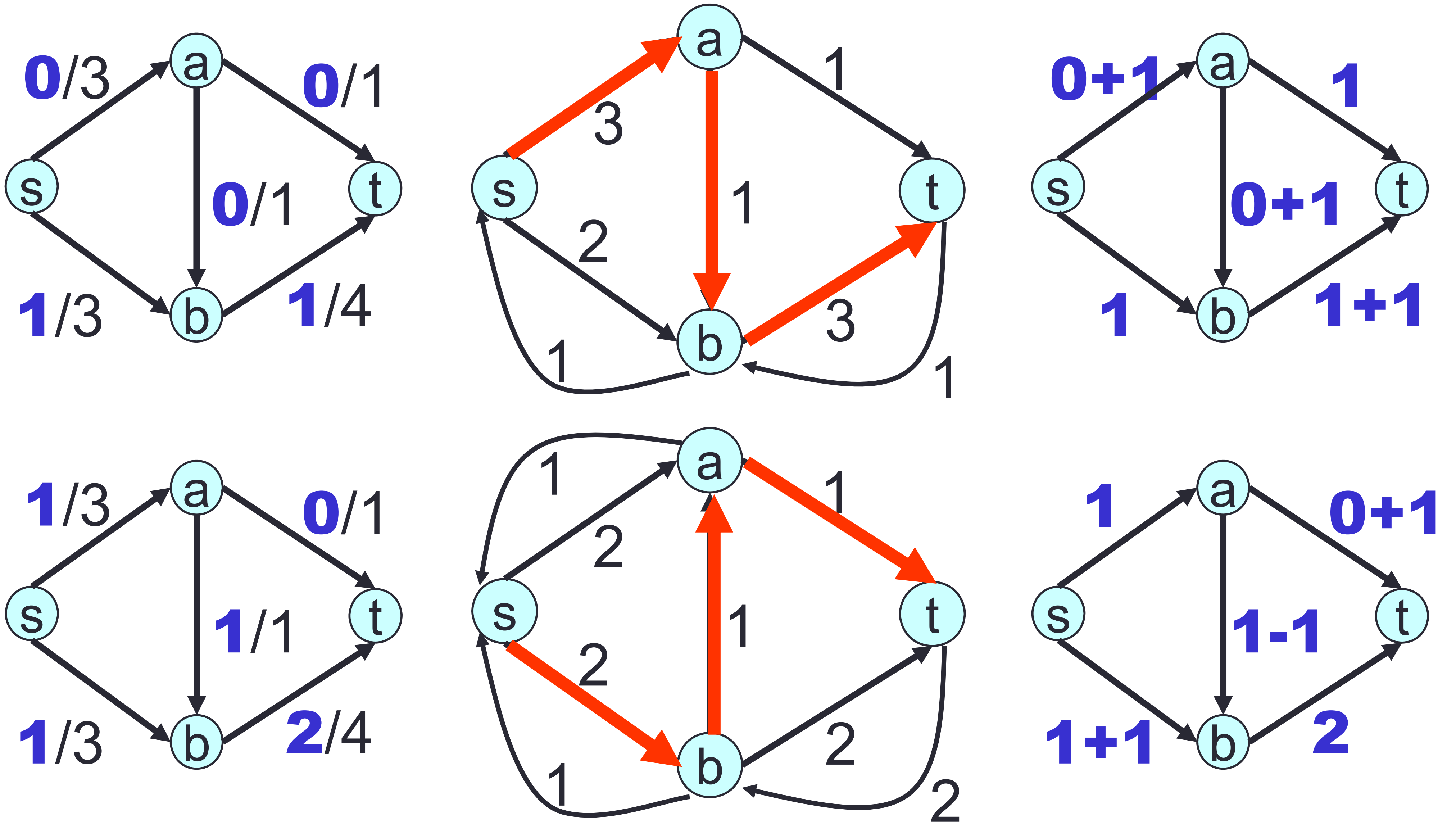
新しいフロー**x'**



総流量が
1増えた

定理1の例

現在のフローx　　残余ネットワーク　　新しいフローx'

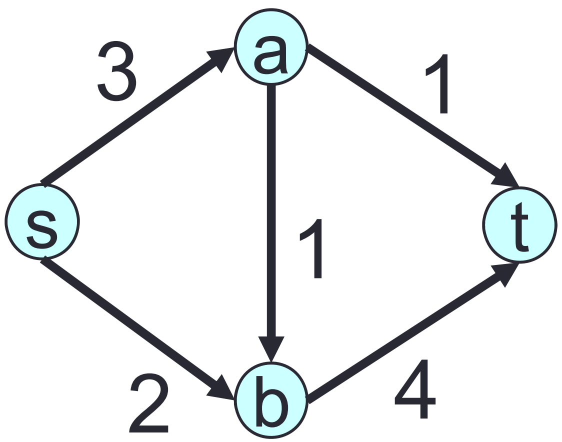


定理2の例

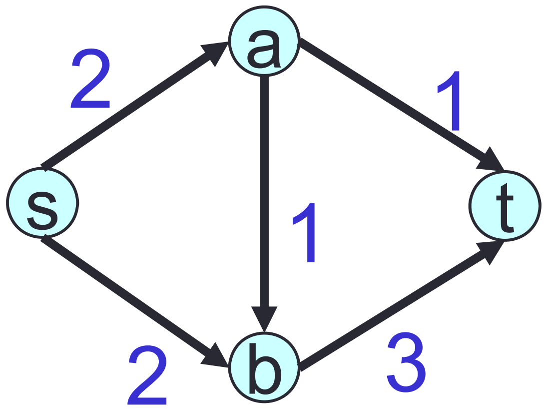
定理2：残余ネットワークに s-t パスが存在しない
➔ 現在のフローは最大フロー

証明は後ほど

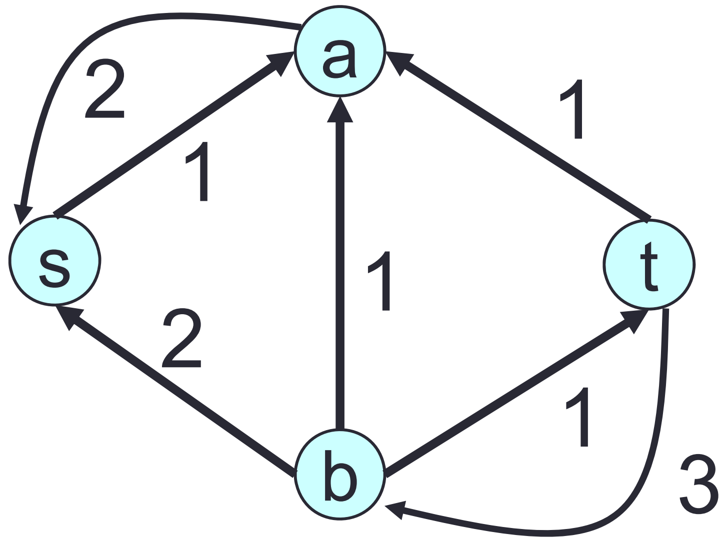
与えられた問題



現在のフロー



残余ネットワーク



s-t パスがない
➔現在のフローは最適！

増加路アルゴリズム

最大フローを求めるアルゴリズム

ステップ0：初期の実行可能フローとして，
　　全ての枝のフロー量を0とする

ステップ1：現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2：残余ネットワークに 増加路が存在しない　⇒　終了

ステップ3：残余ネットワークの増加路をひとつ求め，
　　それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4：ステップ1へ戻る

増加路アルゴリズムの計算時間

※各枝の容量は整数と仮定
　U = 容量の最大値
　m = 枝の数，n = 頂点の数

各反復において総流量が1以上増加
➔反復回数 ≦ 総流量の最大値 ≦ m U

各反復での計算時間
　＝ 残余ネットワークの増加路を求める時間
➔深さ優先探索，幅優先探索などを使うと O(m + n) 時間

∴ 計算時間は O((m+n) m U)
　（入力サイズは m + n + log U なので，指数時間）

増加路アルゴリズムの改良

反復回数を少なくしたい

➔ 各反復での増加路の選び方を工夫する

(改良法1) 各反復での総流量の増加量を大きくする

➔各反復で容量最大の増加路を選ぶ

➔反復回数 O(m log (n U)), 計算時間 $O(m^2 \log (n U))$

(改良法2) 各反復で最短(枝数最小)の増加路を選ぶ

➔反復回数 O(m n), 計算時間 $O(m^2 n)$

※この他にも, 増加路アルゴリズムの計算時間を短縮するための様々なテクニックが存在

全く違うアイディアのアルゴリズム:「プリフロー」を利用

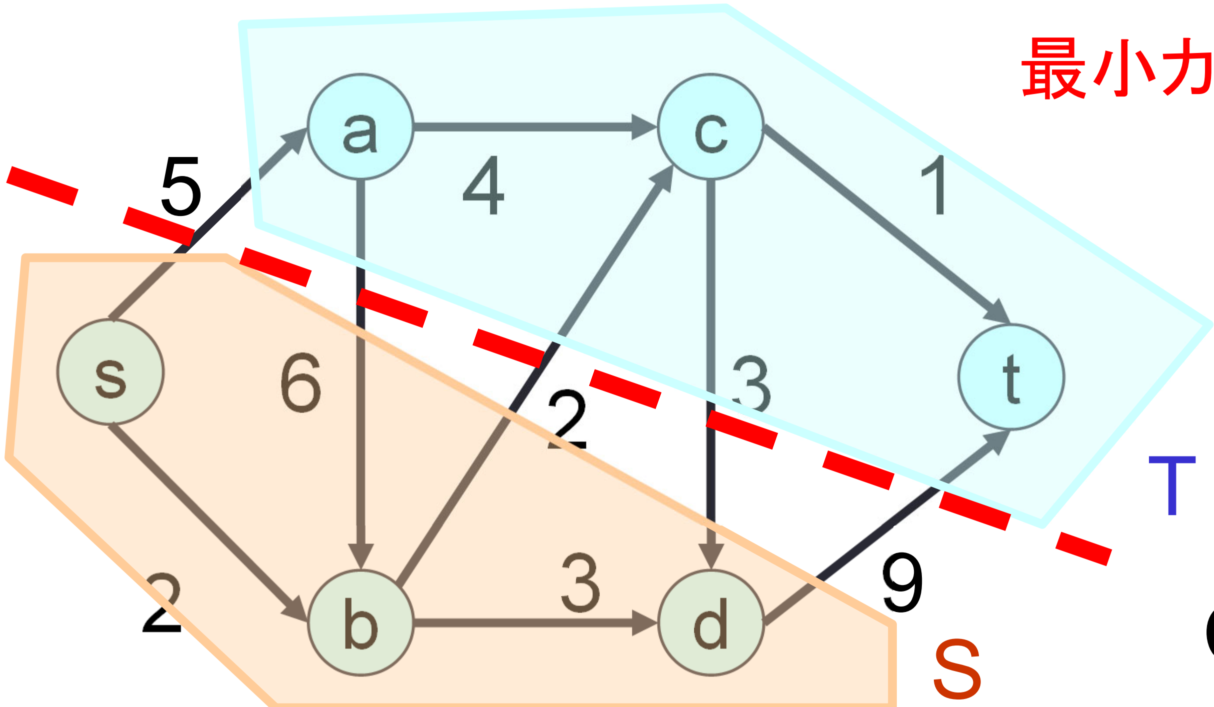
カット

フローを流すとき，ネットワークのボトルネックはどこ？

カット (S, T): S, T は頂点集合Vの分割（$S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$）
S はソース s を含む，Tはシンク t を含む

カット (S, T) の容量C(S,T) ＝ SからTへ向かう枝の容量の和

最小カット：容量が最小のカット



C(S,T)=5+2+9=16

カットの性質（その1）

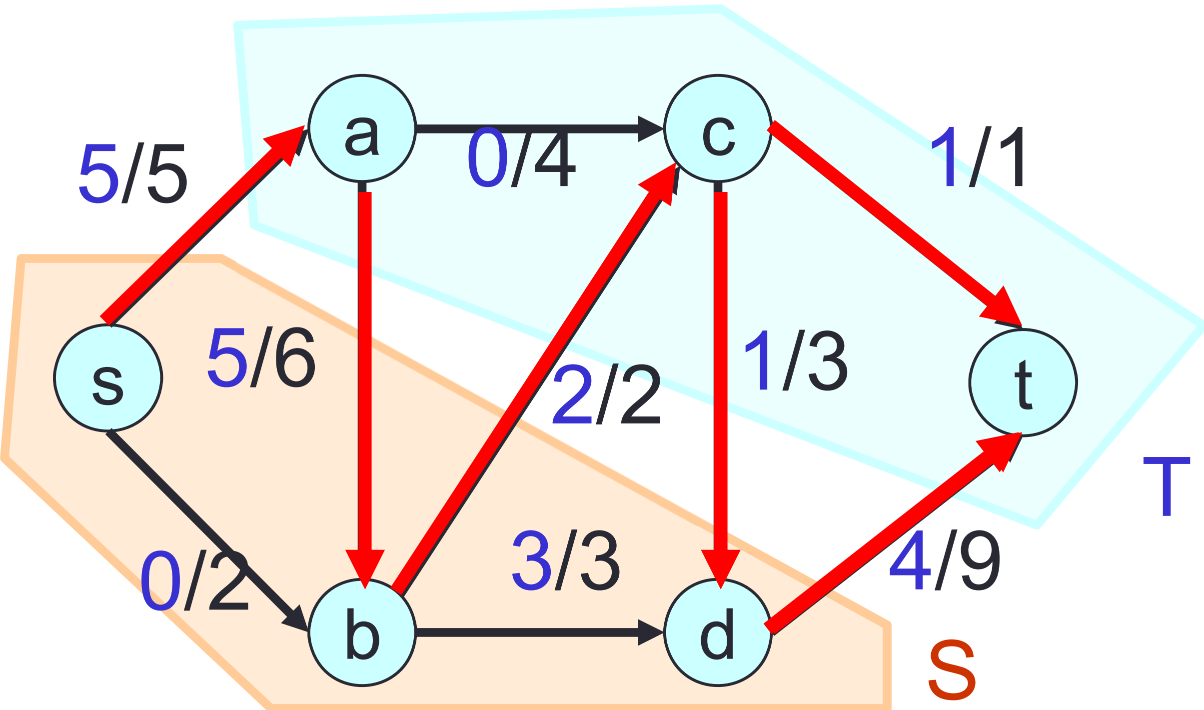
性質1：

任意のカット(S, T) と任意の実行可能フロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し

SからTへの枝のフローの和 x(S,T)

ー TからSへの枝のフローの和 x(T,S)

＝ フローの総流量 f



f = 1 + 4 = 5

x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11

x(T, S) = 5 + 1 = 6

f = 11 – 6 = 5

カットの性質（その1）

一般の場合の証明：下記の制約式を足し合わせる

$\sum\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\}$
　　　$- \sum\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0$　　　$(k \in S - \{s\})$

$\sum\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\} - \sum\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = f$

左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は係数が＋1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は係数が－1

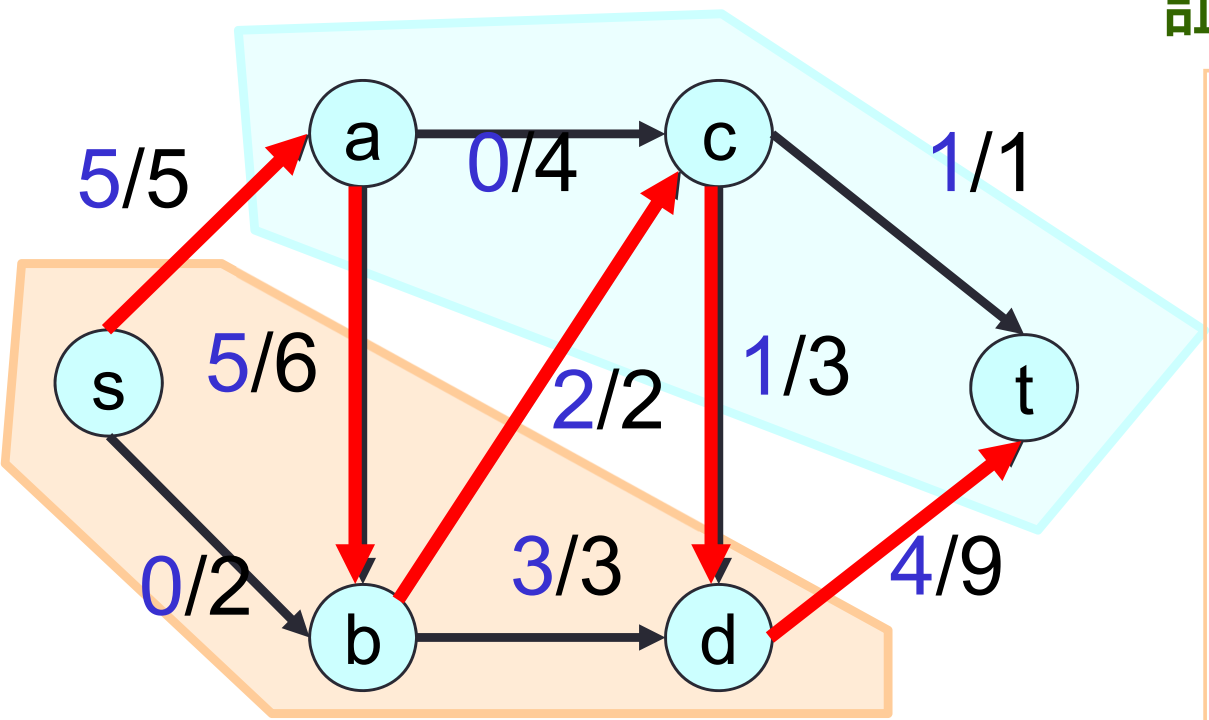
SからSへの枝 の変数 x_{ij} は打ち消される

TからTへの枝 の変数 x_{ij} は登場しない

⇒ 左辺＝ $x(S, T) - x(T, S)$

カットの性質（その2）

性質2：任意のカット(S, T) とフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ に対し
フローの総流量 f ≦ カットの容量 C(S,T)



f = 5 ≦ 16 = C(S, T)

証明:

f = x(S, T) – x(T,S)
（性質1）
x(S, T) ≦ C(S, T)
（容量条件）
x(T, S) ≧ 0
（フローは非負）
∴ f ≦ C(S, T) – 0
= C(S, T)

最小カット問題

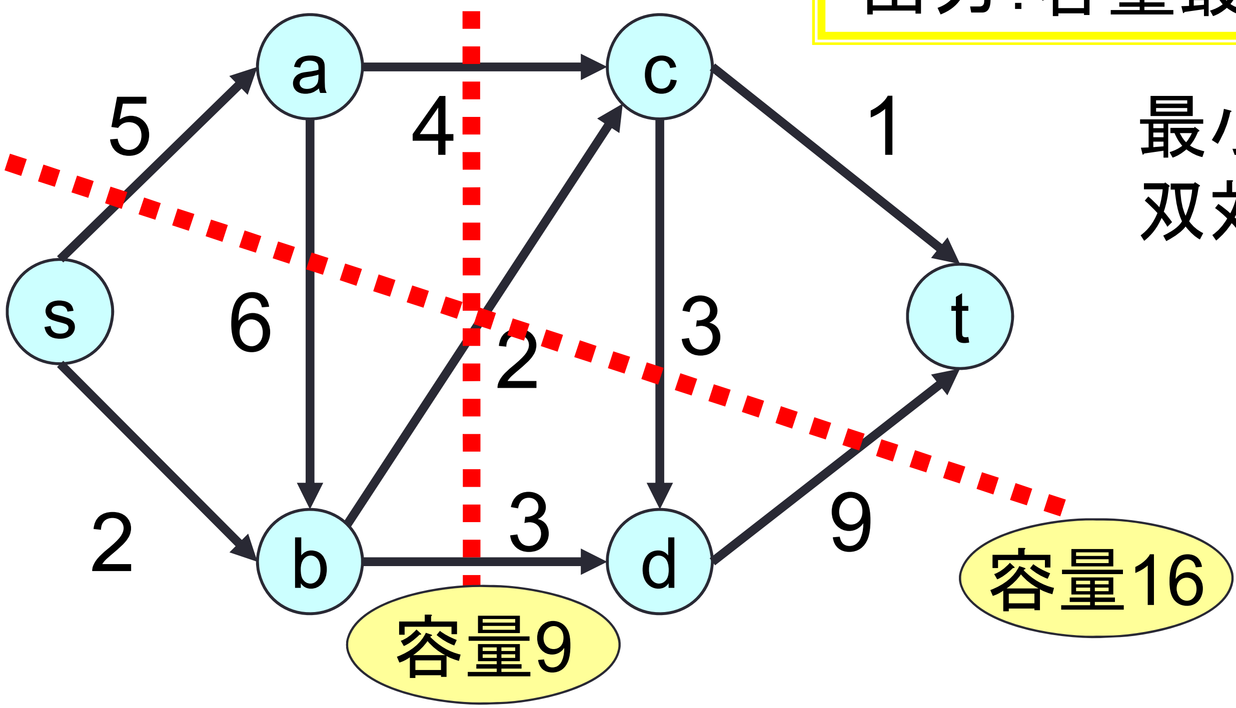
性質2： 任意のカットとフローに対し
フローの総流量 ≦ カットの容量

LPの弱双対定理
に対応

⇒ カットの容量は，最大フローの総流量に対する上界

より良い上界を求めたい⇒

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V
出力：容量最小の s-t カット（最小カット）



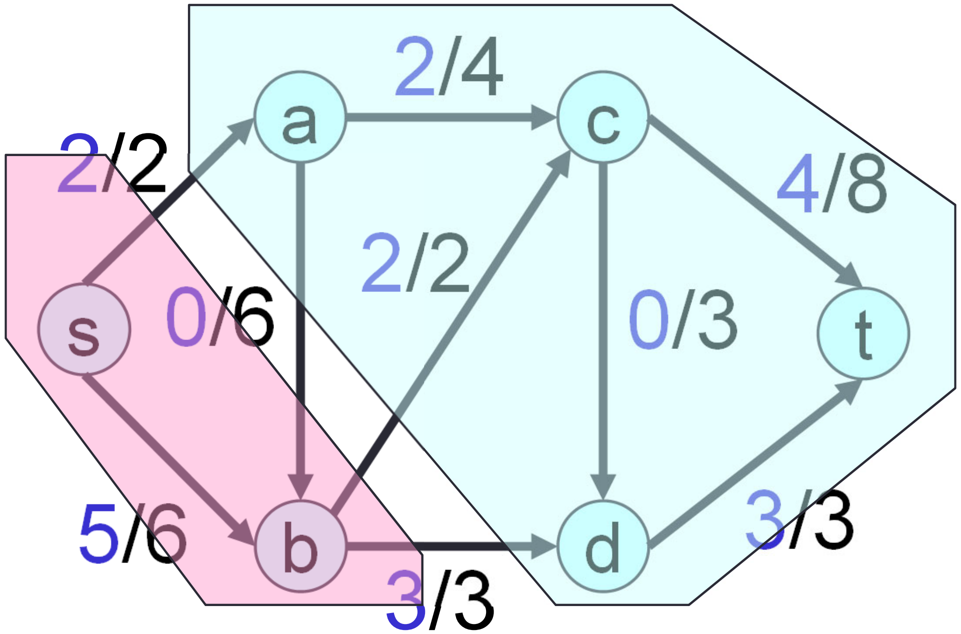
最小カット問題は最大流問題の
双対問題

カットの性質(その3)

性質2より次が導かれる

性質3：任意のカット(S, T) と実行可能フロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し
フローの総流量 f = カットの容量 C(S,T) が成り立つ
➔ 現在のフローは最大フロー，カットは最小カット

[証明] 性質2を使えば，LPに対する弱双対定理の系と同様に示せる.



※増加路アルゴリズムの正当性の証明に使用

f = 7， C(S, T) = 7
➔ 現在のフローは最大フロー，カットは最小カット

最大フロー最小カット定理

増加路アルゴリズムの正当性の証明

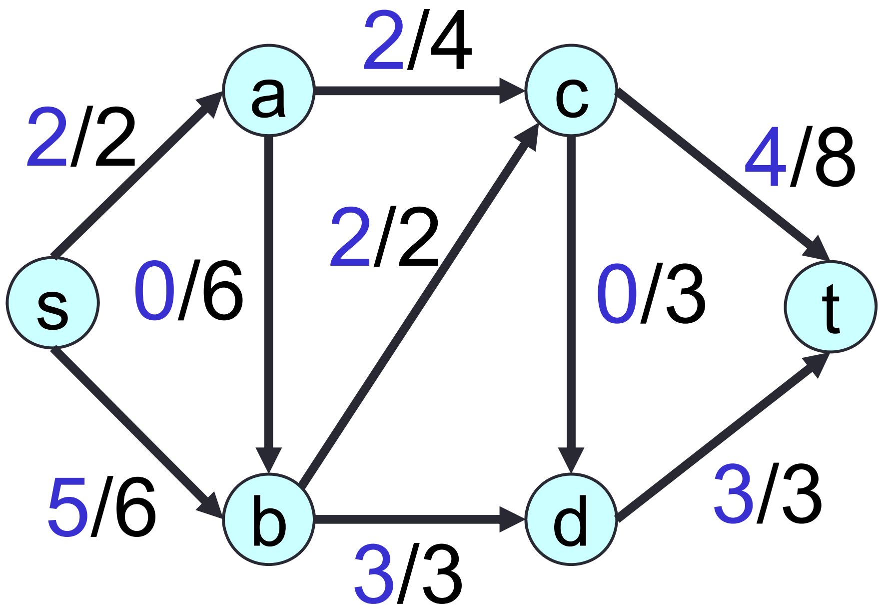
定理：増加路アルゴリズムは最大フローを求める.
また,
　　S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合
　　T = V – S
とすると、(S, T) は 最小カット .
さらに,　$f = C(S,T)$　が成立

この性質と性質3より「最大フローの総流量＝最小カットの容量」

最大フロー最小カット定理：
最大フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ と最小カット(S,T)に対し

$$f = C(S,T)$$

増加路アルゴリズムの正当性(その1)



目標: アルゴリズム終了時のフローに対し, f = C(S,T)を満たすカット(S,T)を見つける➔性質3より最大フロー

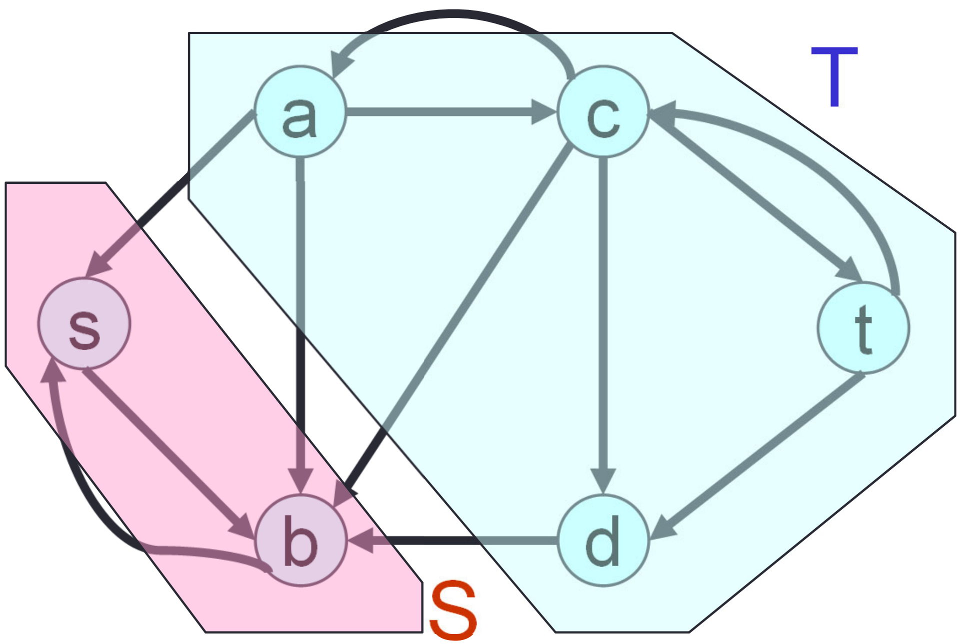
アルゴリズム終了時のフローに対して残余ネットワークを作る

残余ネットワークには増加路がない

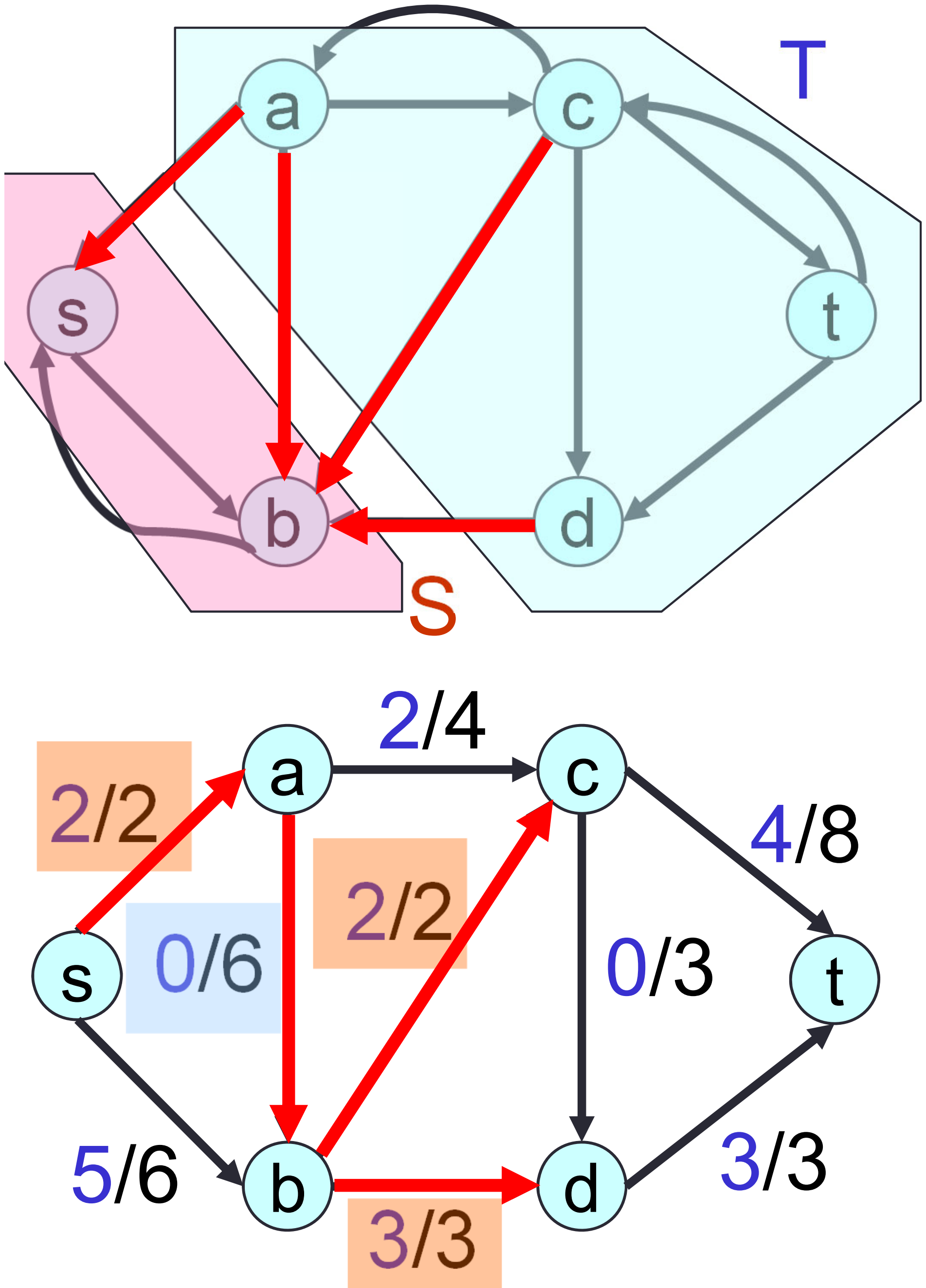
S = 残余ネットワークにおいて
　　s から到達可能な頂点集合

T = V – S

に対し、(S, T) はカット



増加路アルゴリズムの正当性(その2)

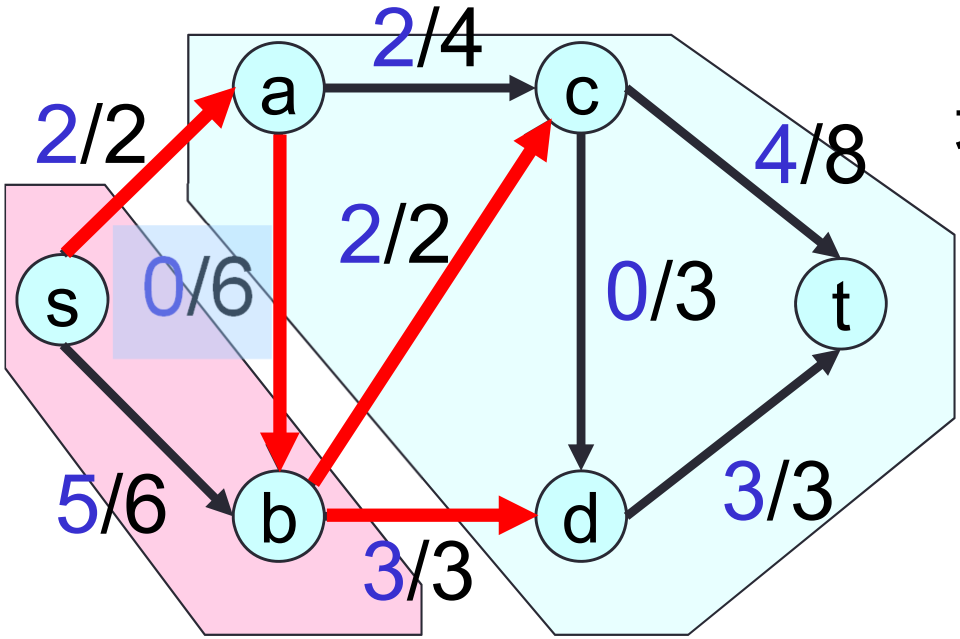


S = s から到達可能な頂点集合
T = V – S

残余ネットワークにおいて
SからTに向かう枝は存在しない

元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

増加路アルゴリズムの正当性(その3)



元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

$x(S, T) = \sum\{x_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\}$
$= \sum\{u_{ij} \mid (i,j)$ はSからTへ向かう枝$\} = C(S, T)$
$x(T, S) = \sum\{x_{ij} \mid (i,j)$ はTからSへ向かう枝$\} = 0$
$\therefore\ x(S, T) - x(T, S) = C(S, T)$

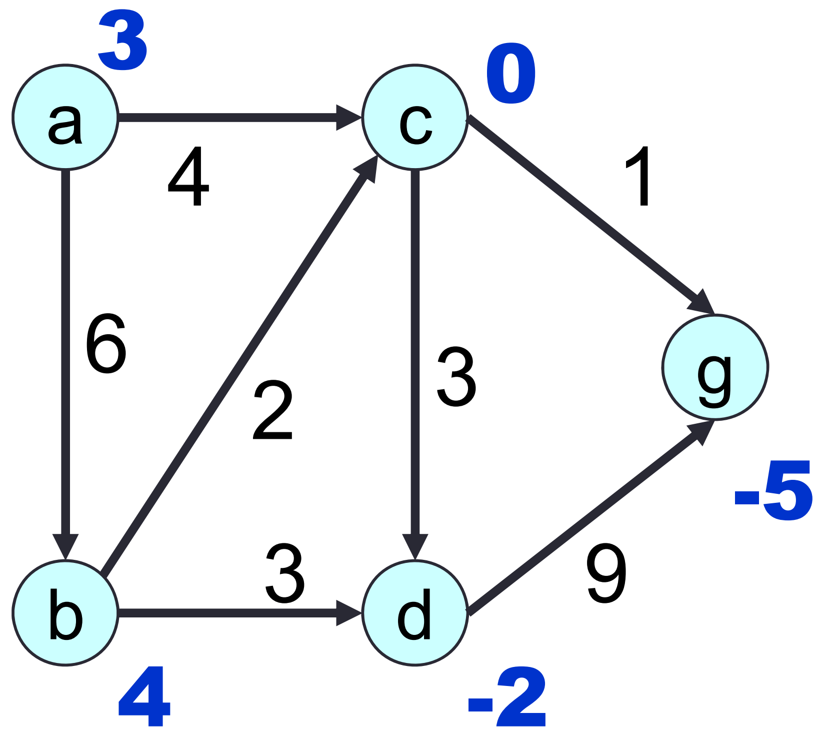
性質1より $f = x(S,T) - x(T, S)$

$\therefore\ f = C(S, T)$ (証明終わり)

応用：供給・需要を満たすフローを求める

入力： 有向グラフ G = (V, E)
各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$
各頂点 $i \in V$の供給・需要量 b_i（ただし b_i の和は0）
($b_i > 0$➔ i は供給点, <0➔ i は需要点, $=0$➔ i は通過点)

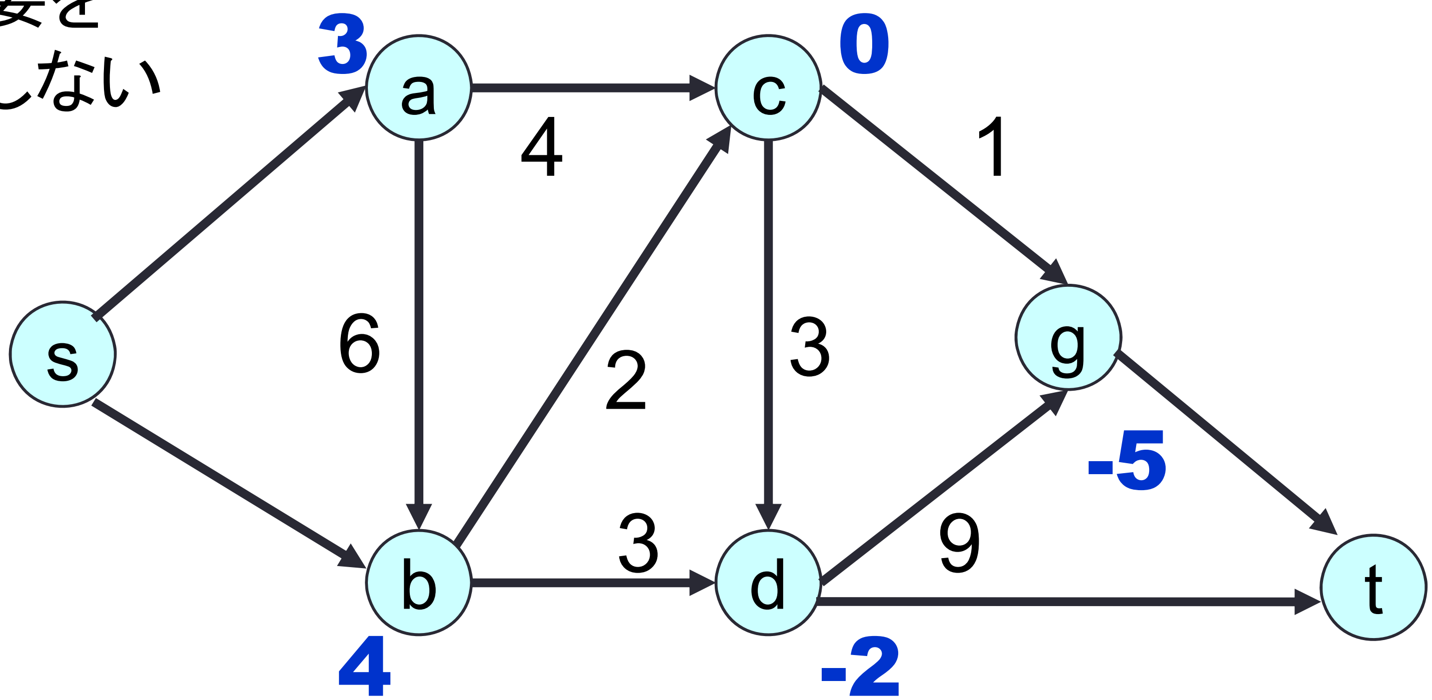
出力： 次の条件を満たすフロー
●各頂点 $i \in V$ での供給・需要条件
（i から流出するフロー量）
　　ー（i に流入するフロー量）＝b_i
●各枝 (i, j) の容量条件
$$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$$



応用：供給・需要を満たすフローを求める

最大流問題に帰着

(1)新たな頂点 s（ソース），t（シンク）を追加
(2)b_i > 0 ならば枝(s, i)を追加，容量はb_i
(3)b_i < 0 ならば枝(i, t)を追加，容量は - b_i
(4)最大フローを求める.
(5)各枝(s, i)に対し $x_{si} = b_i$ ➔供給・需要を満たすフローが得られる
それ以外➔供給・需要を満たすフローは存在しない



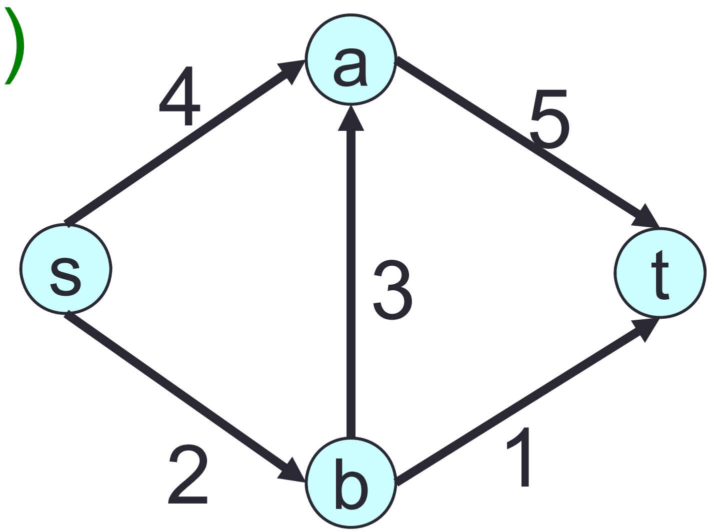
レポート問題

問1：次の2つの最大流問題に対する定式化を書きなさい

問2：次の2つの問題に対して，増加路アルゴリズムで最大流を求めよ（各反復での残余ネットワークやフローを省略せずに書くこと）

問3：2つの問題の最小カットを求めよ

(a)



(b)