オペレーションズ・リサーチ基礎

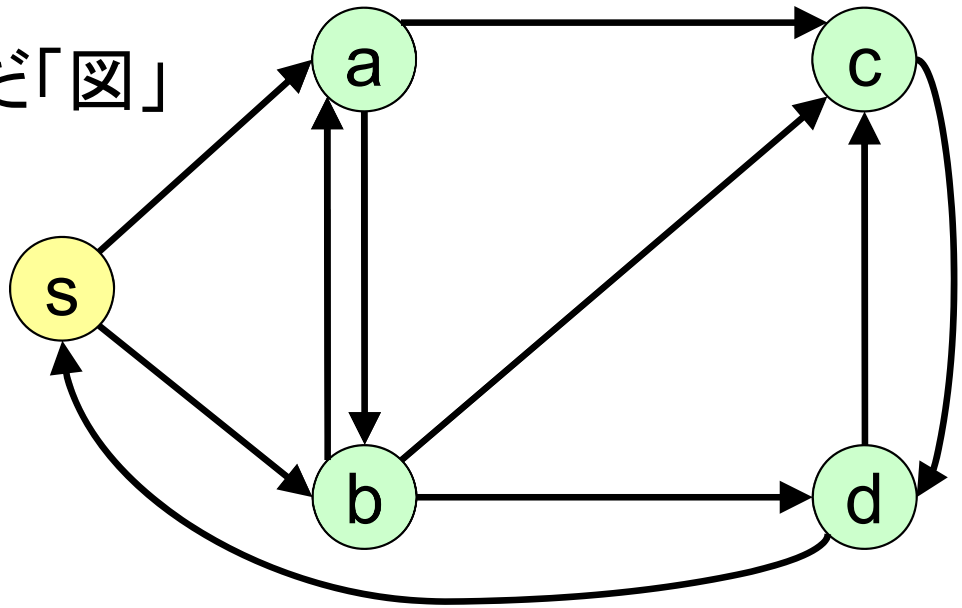
ネットワーク最適化：最短路問題

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

グラフ

最短路問題を数学的に表現するために使う

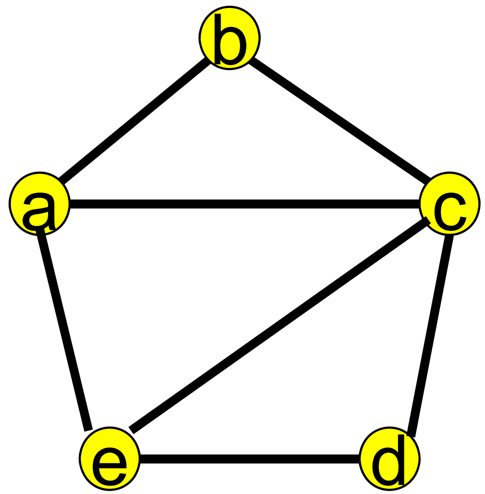
- 定義：グラフ＝「丸」を「線」で結んだ「図」
  - 頂点＝「丸」，枝＝「線」



グラフの例

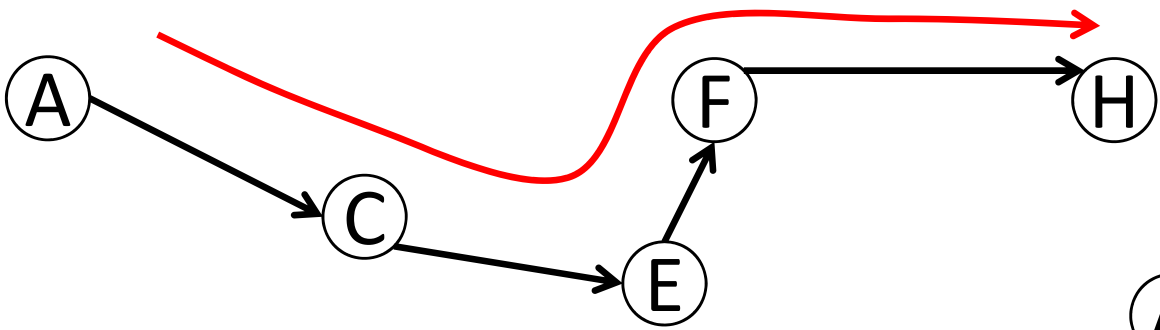
- 友人関係の図
- 鉄道路線図，道路網
- 組織図，家系図

有向グラフ：枝に向きの付いたグラフ
無向グラフ：枝の向きの付いていないグラフ

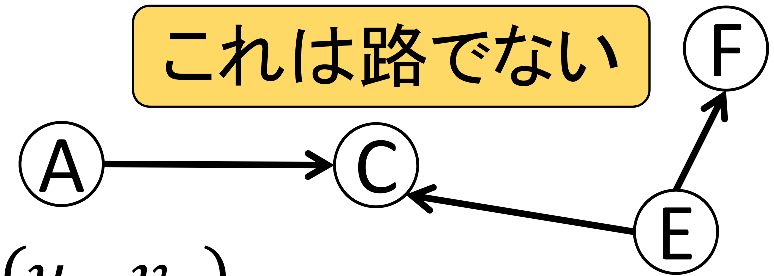


路と閉路

- 路(みち)(path, パス): 複数の枝が1つにつながったもの



枝の向きに沿って進む



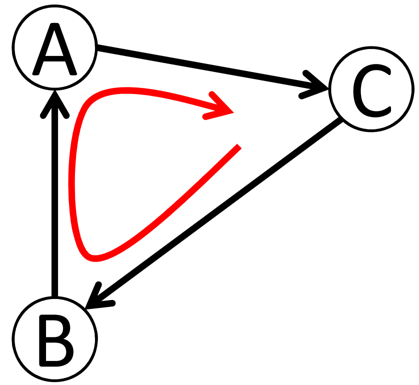
厳密な定義: 枝の列 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_k, v_k)$

ただし $v_1 = u_2, v_2 = u_3, \ldots, v_{k-1} = u_k$

注意: 路・閉路は，同じ頂点，同じ枝を何回通っても可

- 閉路(cycle, サイクル):

複数の枝が1つの輪になったもの



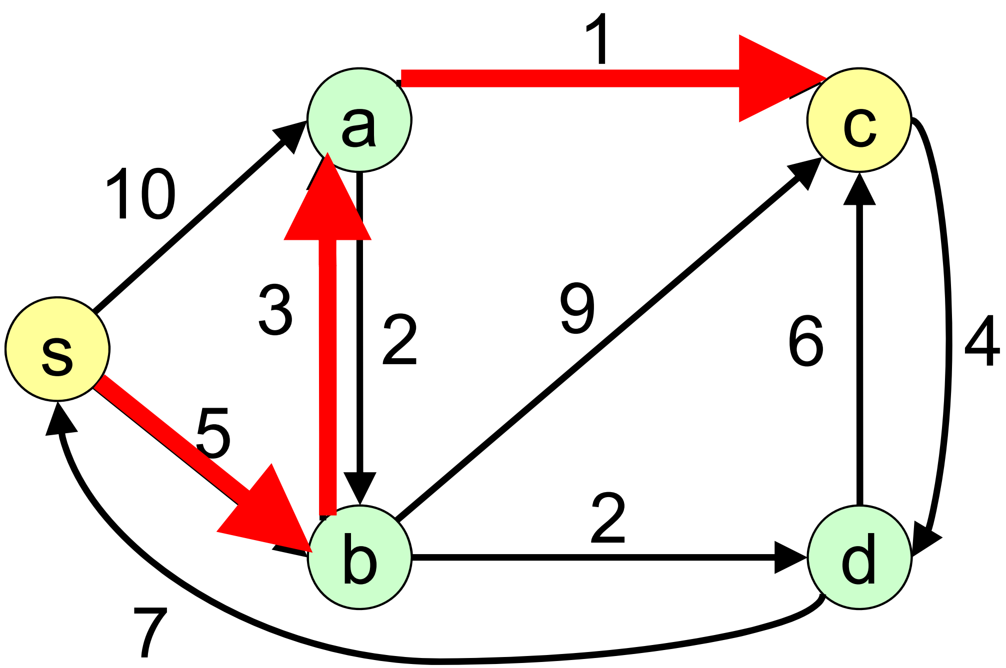
厳密な定義: 枝の列 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_k, v_k)$

ただし $v_1 = u_2, v_2 = u_3, \ldots, v_{k-1} = u_k$

$v_k = u_1$

単一始点単一終点 最短路問題

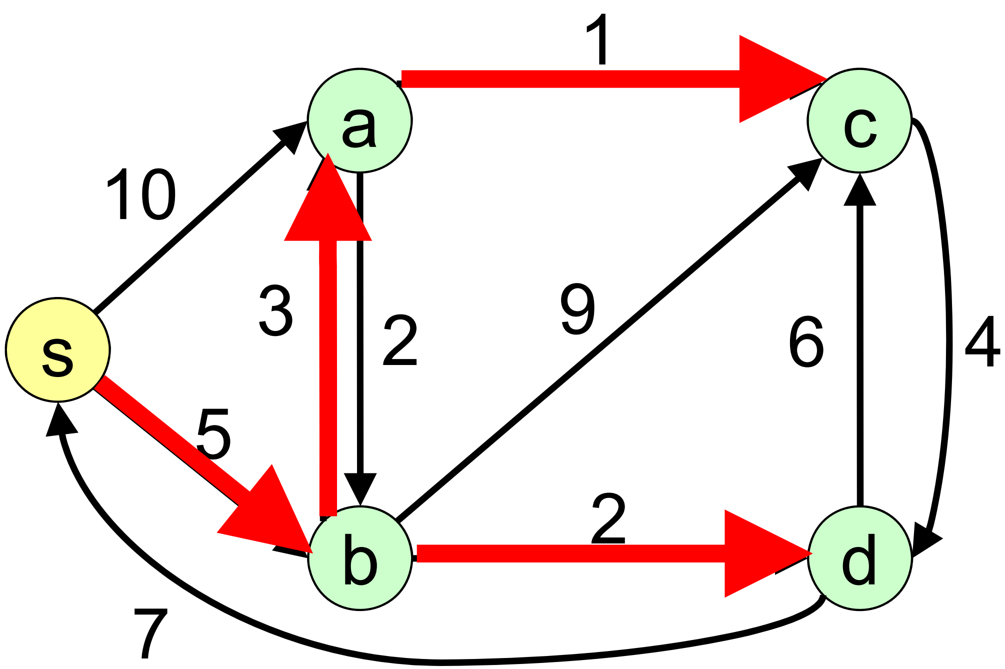
- 入力：有向グラフ G=(V, E)
  各枝の長さ $\ell(e) \geq 0$ $(e \in E)$, 始点 s∈V, 終点t∈V
- 出力：s から t への最短路 P(t) とその長さd(t)
  （sからt への最短路 P*
  = sからtへの路のうち，枝の長さの和 $\ell(P^*)$が最小のもの）



後述するように，
特定の頂点への最短路を
求めるためには，
全ての頂点への最短路を
求めると効率的
➔単一始点全終点
最短路問題

単一始点全終点 最短路問題

- 入力：有向グラフ G=(V, E)
  各枝の長さ $\ell(e) \geq 0$ $(e \in E)$, 始点 s∈V
- 出力：s から すべての頂点 v への最短路P(v)とその長さd(v)



以降で使う仮定：
s から各頂点 v への路が存在
（存在しない場合は
枝(s,v)を追加，その長さを
十分大きい正数とする）

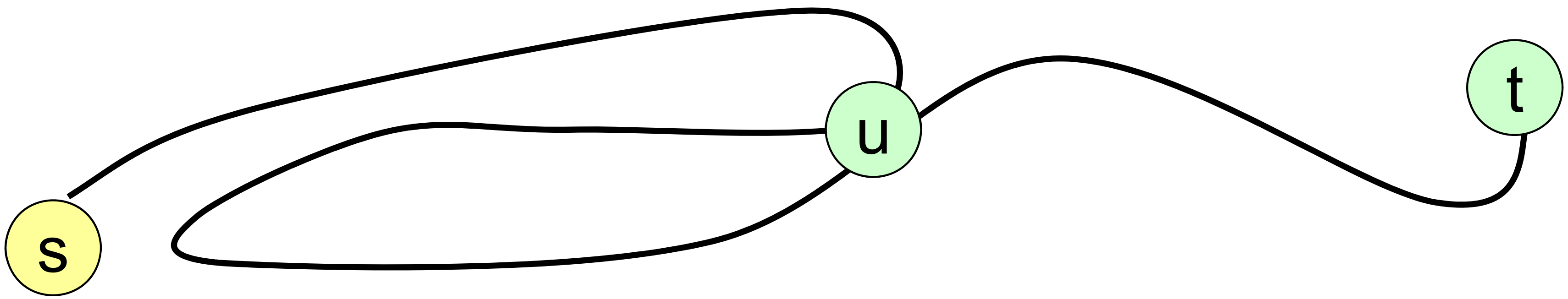
最短路の性質

最短路の存在

命題：枝長が全て非負
➔ 任意の頂点 s, t に対し，s から t への最短路が存在

考え方：
- 同じ頂点を2回以上通ることを許せば，s から t の路の数は無限個存在しうる ← 最短路の存在は非自明
- 一方，各頂点を高々1回通る路は有限個 ← 最短路の存在は自明

∴ ある頂点u を2回以上通る路 P に対し，次の路 Q が存在することを示せば良い：
- Q の長さ ≦ P の長さ
- 2回以上通過する頂点の個数：P より Q の方が少ない

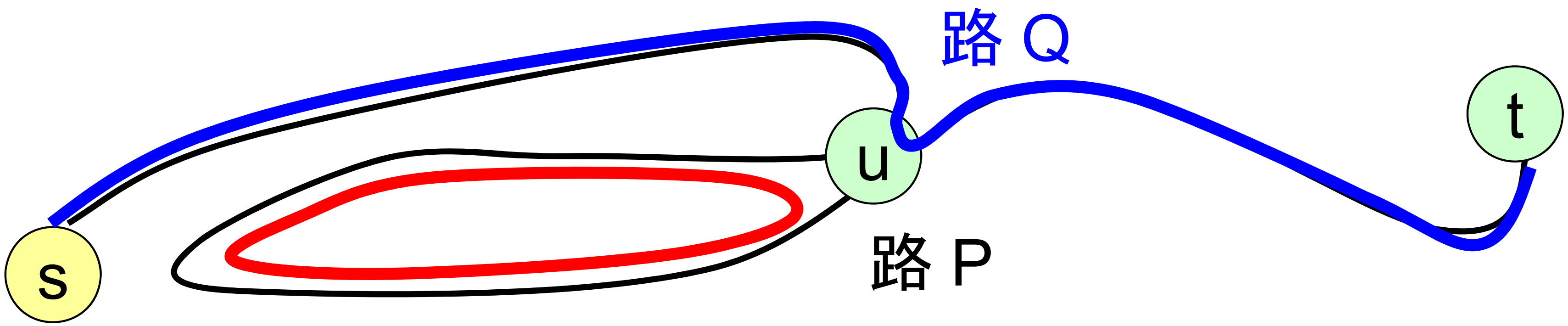


最短路の存在(つづき)

∴ ある頂点u を2回以上通る路 P に対し,
次の路 Q が存在することを示せば良い:

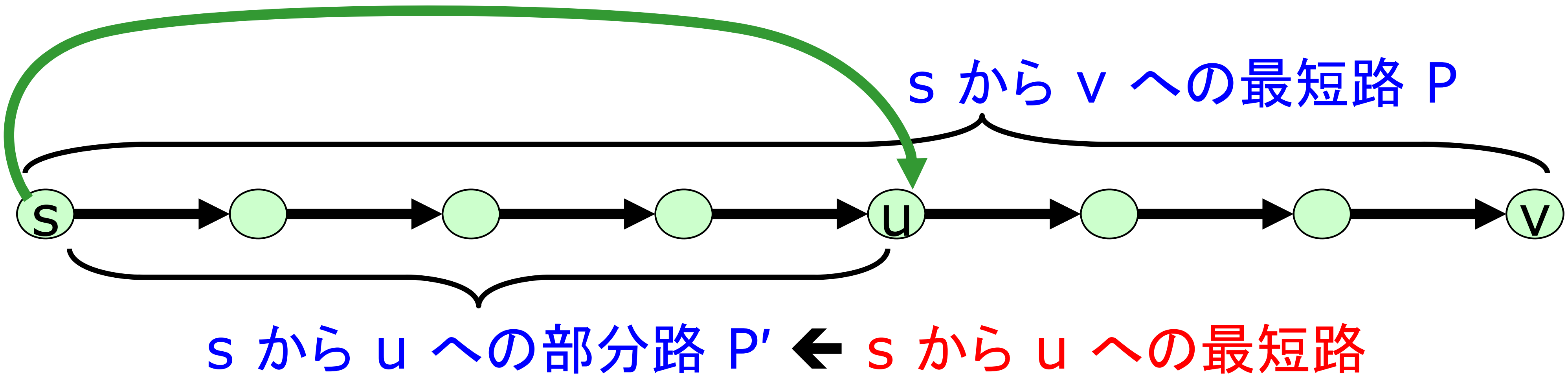
- Q の長さ ≦ P の長さ
- 2回以上通過する頂点の個数: P より Q の方が少ない

路 P において, 最初に u が現れてから最後に出てくるまでの
部分路(閉路)を削除 ➔ 路 Q
削除した部分の枝長 ≧ 0 ∴ 路 Q の長さ ≦ 路 P の長さ
頂点 u の通過回数: 2以上から1に減少
他の頂点の通過回数: 以前より増えない
∴ 2回以上通過する頂点の個数: P より Q の方が少ない ■



最短路の部分路は最短路

命題　P: 頂点 s から頂点 v への最短路
　P は途中に頂点 u を含むと仮定
　➔ s から u への P の部分路 P' は, s から u への最短路



（証明）もし P′ より短い路 P″ が存在したら
→sからvへの路として，まず P″ に沿って s から u に行き，
その後 P と同じ枝をたどって v に行く路 Q を考える．
Q の長さ - P の長さ ＝ P″ の長さ - P′ の長さ < 0
よって，　P の選び方に矛盾．

ダイクストラ法による最短路長の計算（枝長が非負の場合）

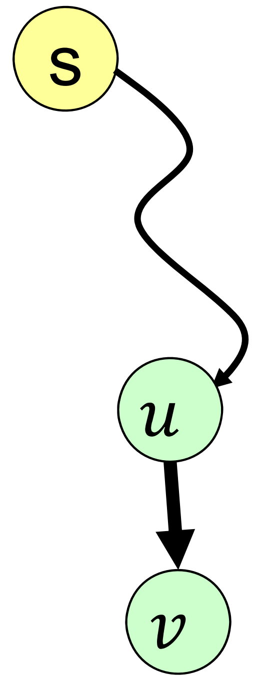
最短路長の性質

- 定義： d(v) = 頂点 s から v への最短路長

- 枝長≧0 ➔ d(v)≧0 (∀v∈V)
- s から s への最短路長 d(s) = 0 ∴全ての最短路の中で最も短い

- 任意の v ≠ s に対し，ある頂点 u が存在して，
  s から v への最短路 = s から u への最短路 + (u,v)

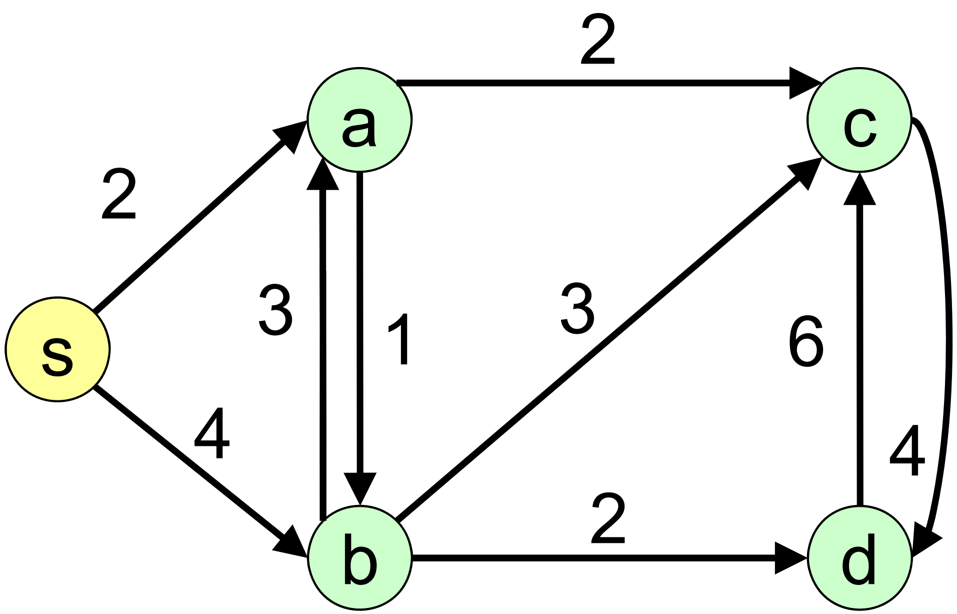
∴ $d(v) = d(u) + l(u,v) \geqq d(u)$



∴最短路長は，小さい順に計算すると都合が良い

ダイクストラのアルゴリズム：
s から他の頂点への最短路を，短い順に計算

k 番目に短い最短路の計算



v_1 = s, d(s)=0

v_2 = a, d(a)=2

v_3 = b, d(b)=3

4番目に短い最短路
およびその行き先v_4 を求めたい

候補:

① a への最短路 + 枝 (a,c): 長さ 2+2=4

② b への最短路 + 枝 (b,c): 長さ 3+3=6

③ b への最短路 + 枝 (b,d): 長さ 3+2=5

①が最小 ➔ 4番目の最短路，v_4 = c

ダイクストラのアルゴリズム

ステップ0: $d(s) = 0, d(v) = +\infty\ (\forall v \neq s)$ とおく.

X={s} とおき，s から出る各枝 (s,v) に対し $d(v) = \ell(s, v)$ とおく

ステップ1: V-X の要素 v で d(v) 最小の v=v* を選び，Xに追加.

ステップ2: $X = V$ ➔ 各v に対して d(v) を最短路長として出力，終了.

ステップ3: v* から出る各枝 (v*,v) に対し，

$v \in V - X$ かつ$d(v) > d(v^*) + \ell(v^*, v)$ ならば，

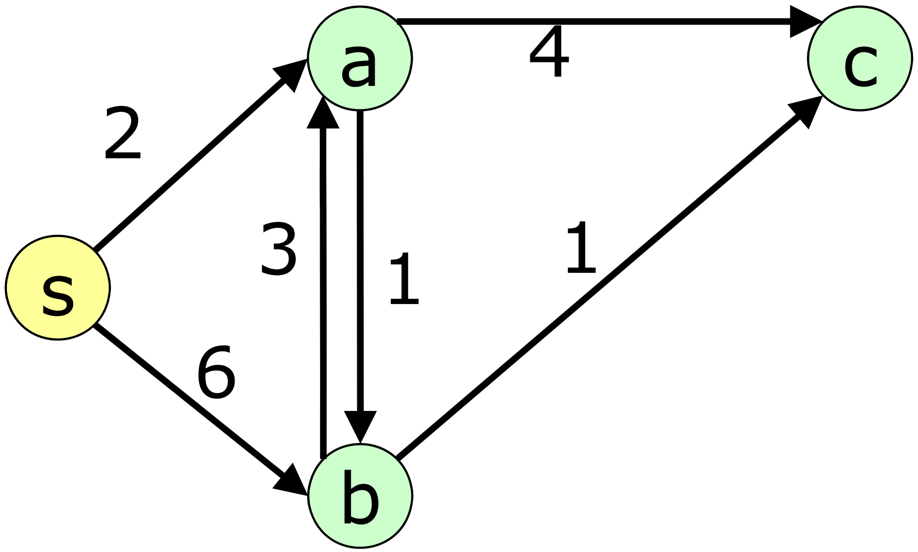
$d(v) \coloneqq d(v^*) + \ell(v^*, v)$ とおく.

ステップ1に戻る.

定理 枝長が非負のグラフにおいて，
ダイクストラのアルゴリズムは始点 s から各頂点への
最短路長を正しく計算する.

最短路長だけでなく，最短路を計算することも
（若干の修正により）可能である

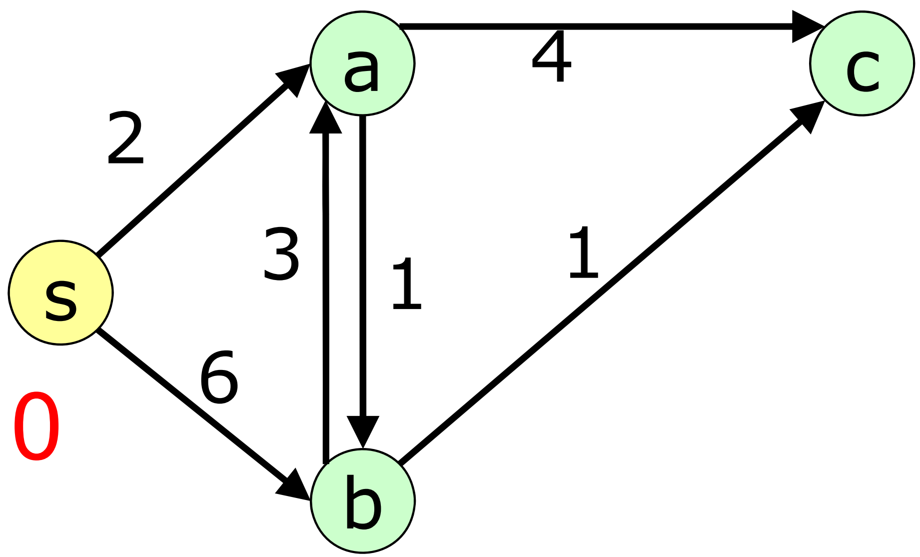
実行例その1



	k=0	1	2	3
s	0			
a	∞			
b	∞			
c	∞			

sからsの最短路長は0で確定，0を記入
他の頂点には∞を記入

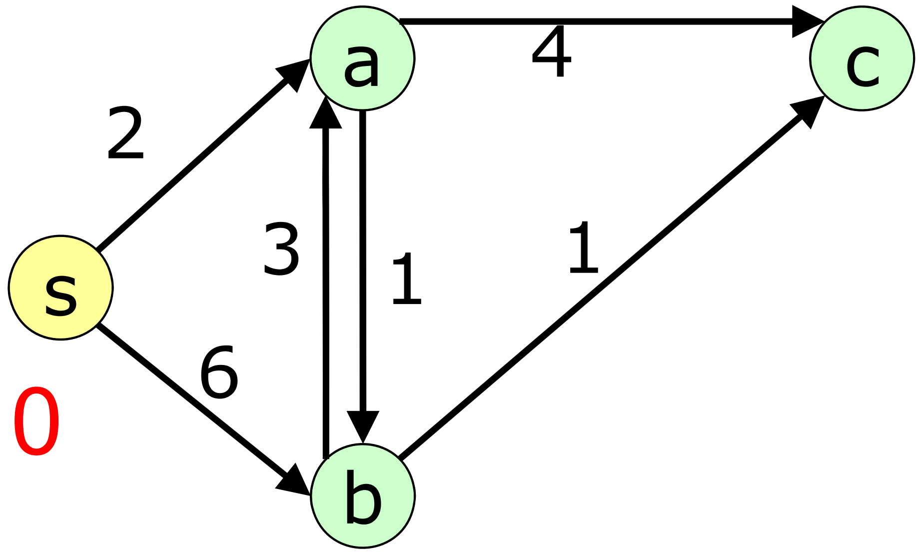
実行例その2



	k=0	1	2	3
s	0			
a	∞	2		
b	∞	6		
c	∞	∞		

最短路長が確定した頂点 s から
出る枝を使って到達できる頂点はa,b
d(a)=∞>0+2=d(s)+l(s,a)=2 なので,
d(a) を 2に変更
d(b)=∞>0+6=d(s)+l(s,b)=6 なので,
d(b) を 6に変更

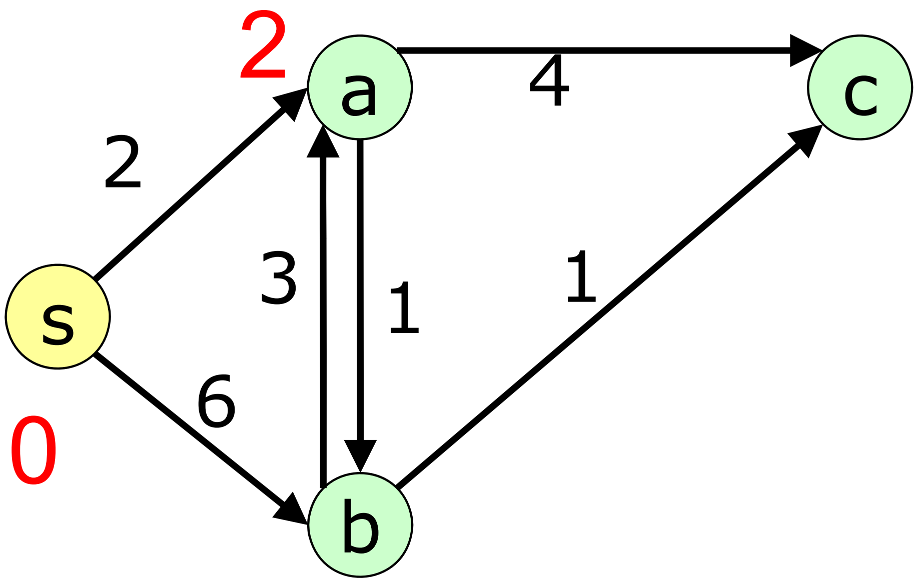
実行例その3



	k=0	1	2	3
s	0			
a	∞	2		
b	∞	6	3	
c	∞	∞	6	4

最短路長が未確定の頂点はa,b,c
その中で d(v) 最小なのは a
∴ s から a への最短路長は d(a)=2 に確定

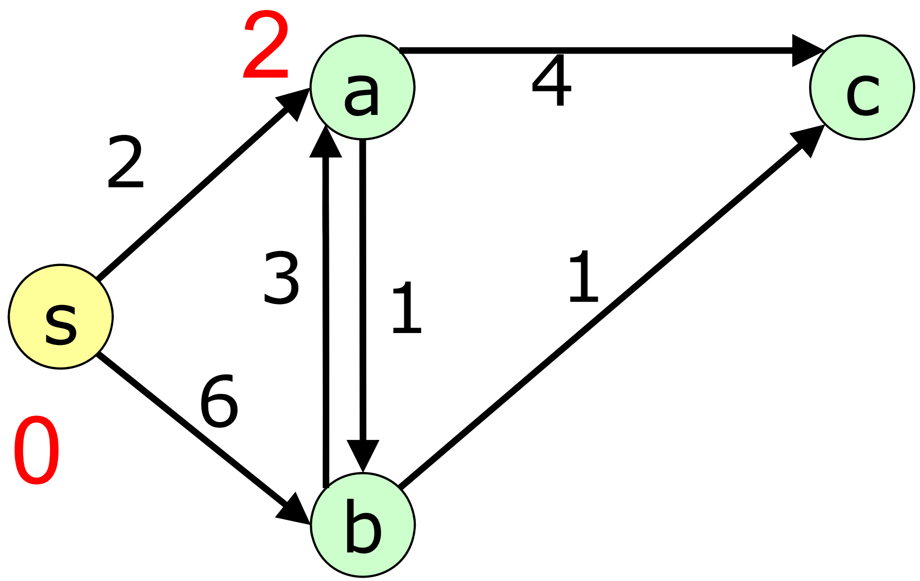
実行例その4



	k=0	1	2	3
s	0			
a	∞	2		
b	∞	6	3	
c	∞	∞	6	

最短路長が確定した頂点 a から
出る枝を使って到達できる
未確定頂点はb,c
d(b)=6>2+1=d(a)+l(a,b)=3 なので,
d(b) を 3に変更
d(c)=∞>2+4=d(a)+l(a,c)=6 なので,
d(c) を 6に変更

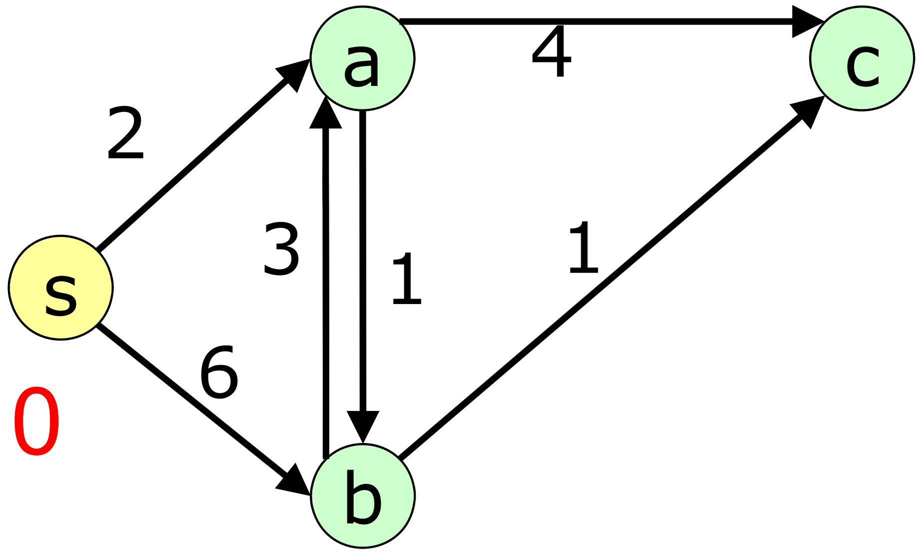
実行例その5



	k=0	1	2	3
s	0			
a	∞	2		
b	∞	6	3	
c	∞	∞	6	

最短路長が未確定の頂点はb,c
その中で d(v) 最小なのは b
∴ s から b への最短路長は d(b)=3 に確定

実行例その6



	k=0	1	2	3
s	0			
a	∞	2		
b	∞	6	3	
c	∞	∞	6	4

最短路長が確定した頂点 b から
出る枝を使って到達できる
未確定頂点はc
d(c)=6>3+1=d(b)+l(b,c)=4 なので,
d(c) を 4に変更
唯一の未確定頂点 c への
最短路長確定

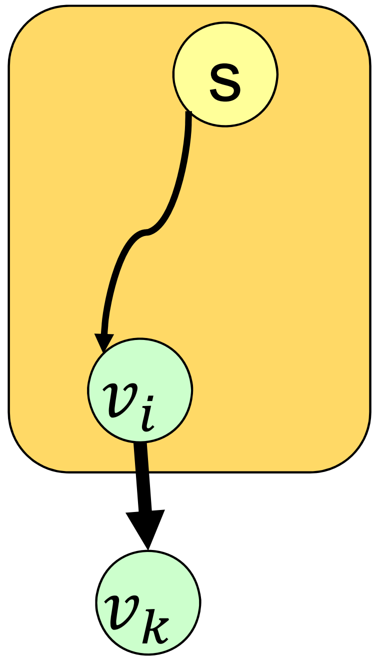
ダイクストラ法：考え方

各頂点への最短路（の長さ）を，d(v) の小さい方から順に計算する
（長さが同じ ➔ 最短路の枝数の少ない順に）

最短路を，小さい方から k-1 番目まで計算したと仮定

定義： v_i ＝ i 番目に短い最短路の行き先

$X = \{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$

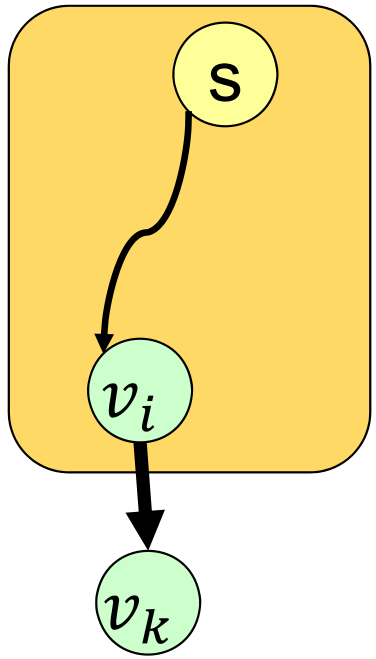


k 番目に短い最短路 P_k と
その行き先 $v_k \in V - X$ を計算したい

ダイクストラ法：考え方（つづき）

k 番目に短い最短路 P_k と

その行き先 $v_k \in V - X$を計算したい



- ある頂点 u が存在して，
  s から v_k への最短路 = s から u への最短路 + (u, v_k)
- d(u)≦d(v_k) ➔ u∈X ➔ u = v_i (∃ $v_i \in X$)

∴ ある $v_i \in X$ が存在して，

P_k = s から v_i への最短路 + (v_i, v_k)

このような路の長さが最も短くなるように，

$v_i \in X$ および X の内外を結ぶ枝 (v_i, v) を選ぶ ➔ $v_k = v$ となる

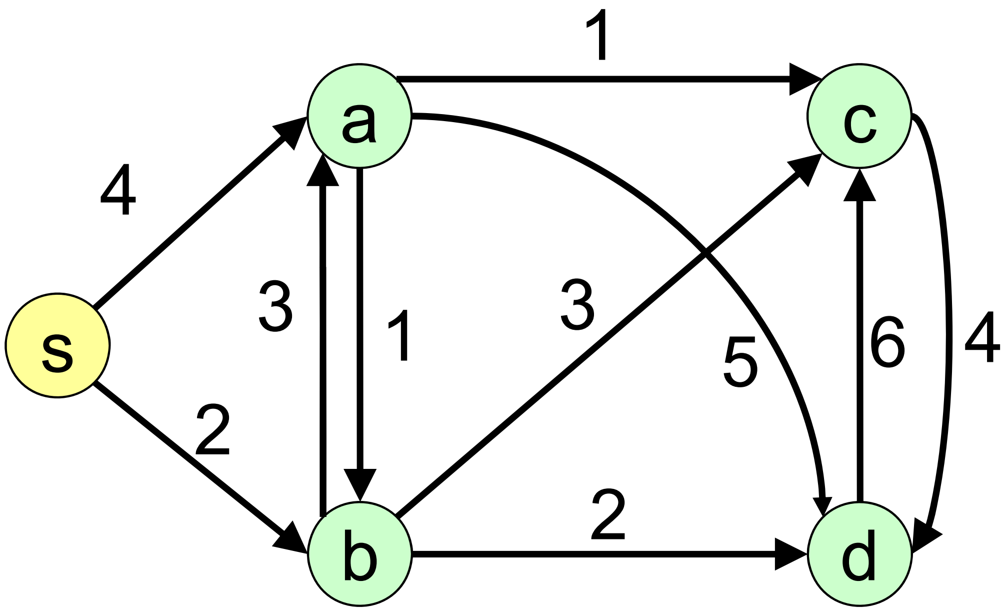
以上の計算を効率的に行う ➔ ダイクストラ法

枝長の非負性について

- ダイクストラ法は枝長が非負の場合，最短路長を正しく計算
- 枝長が負の枝をもつ場合は？ 反例は？
- これまでの議論のうち，枝長が負の場合はどこがおかしくなる？

演習問題

問1：下記のグラフにおける，s から各頂点への最短路長を，ダイクストラのアルゴリズムで計算せよ．



	n=0	1	2	3	4
s					
a					
b					
c					
d					