オペレーションズ・リサーチ基礎

線形計画問題: 双対定理の証明

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

中間試験について

- 日時：2023年1月12日（木）10:45～12:15
- 場所： 授業と同じ講義室 W641
- 手書きのA4用紙一枚のみ持ち込み可（印刷やコピーは不可）
  - これも採点の対象，試験終了後に回収します
- 教科書，ノート等の持ち込みは不可
- 座席はこちらで指定
- 試験内容：1/5（第6回目）までの講義で教えたところ
  - 様々な数理計画モデル
  - 線形計画問：標準形，単体法，各種定理
  - 組合せ最適化：分枝限定法
- 50点満点，20点以下は不合格

双対定理

定理（双対定理, duality theorem）:
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

以下では, 具体例を使って証明の流れを説明する

双対定理の証明(その1)

主問題

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件
$$\begin{aligned} -2x_1 - 2x_2 + x_3 &\geqq -4 \\ -2x_1 \qquad\quad - 4x_3 &\geqq -4 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 &\geqq -1 \\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

→

初期辞書

最小化 z

条件
$$\begin{aligned} z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\quad - 4x_3 \\ x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0 \end{aligned}$$

双対問題

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件
$$\begin{aligned} -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leqq -2 \\ -2y_1 \qquad\quad - 3y_3 &\leqq -1 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 &\leqq -1 \\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 &\geqq 0 \end{aligned}$$

- 主問題のスラック変数
- 主問題の制約
- 双対問題の変数

の間の1対1対応

x_4 ←→ 第1制約 ←→ y_1

x_5 ←→ 第2制約 ←→ y_2

x_6 ←→ 第3制約 ←→ y_3

双対定理の証明(その2)

主問題

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件
$$
\begin{aligned}
-2x_1 - 2x_2 + x_3 &\geqq -4\\
-2x_1 \qquad\quad - 4x_3 &\geqq -4\\
4x_1 - 3x_2 + x_3 &\geqq -1\\
x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

初期辞書

最小化 z

条件
$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3\\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3\\
x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\quad - 4x_3\\
x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3\\
&x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0
\end{aligned}
$$

主問題の最適解は

$x_1^*=2,\ x_2^*=0,\ x_3^*=0$, 最適値= - 4

最終辞書

$$
\begin{aligned}
z &= -4 + \boxed{(3/5)}x_4 + \boxed{(1/5)}x_2 + \boxed{(2/5)}x_5\\
x_1 &= 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5\\
x_3 &= 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5\\
x_6 &= 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5
\end{aligned}
$$

x_4 x_5 x_6

$y_1^* = \frac{3}{5}, y_2^* = \frac{2}{5}, y_3^* = 0$

が双対問題の許容解,

目的関数値 ＝ - 4

となることを示せば証明終了(弱双対定理の系より)

双対定理の証明(その3)

$x_4 \quad x_5 \quad x_6$

$y_1^* = \frac{3}{5}, y_2^* = \frac{2}{5}, y_3^* = 0$

が双対問題の許容解,

目的関数値 ＝ - 4

となることを示す

$x_1 \quad x_2 \quad x_3$

$y_4^* = 0, y_5^* = \frac{1}{5}, y_6^* = 0$

と便宜上おく

最終辞書

$z = -4 + \boxed{(3/5)}x_4 + \boxed{(1/5)}x_2 + \boxed{(2/5)}x_5$

$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$

$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$

$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$

最終辞書なので,
z の式の係数は非負
➔ y_i^* はすべて非負

z の式の右辺を書き換える

$$z = -4 + (y_1^* x_4 + y_5^* x_2 + y_2^* x_5) + (y_4^* x_1 + y_6^* x_3 + y_3^* x_6)$$
$$= -4 + y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3 + y_1^* x_4 + y_2^* x_5 + y_3^* x_6$$

双対定理の証明(その4)

最終辞書

$$z = -4 + y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3 + y_1^* x_4 + y_2^* x_5 + y_3^* x_6$$

$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$

$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$

$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 -(3/5)x_5$

$(x_1, x_2, \ldots, x_6, z)$は
最終辞書の解⇔初期辞書の解

初期辞書

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

初期辞書の4つの式を
最終辞書のzの式に代入

双対定理の証明(その5)

最終辞書の z の式

左辺 $= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

右辺 $= -4 + \{y_1^*(4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3)$

$+ y_2^*(4 - 2x_1 \qquad - 4x_3)$

$+ y_3^*(1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3)\}$

$+(y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3)$

$= (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*)$

$+ (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)x_1$

$+ (y_5^* - 2y_1^* \qquad - 3y_3^*)x_2$

$+ (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)x_3$

この式は恒等式，
任意のx_1, x_2, x_3に対して成り立つ
➔両辺の各項の
係数，定数は等しい

$$0 = (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*)$$

$$-2 = (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)$$

$$-1 = (y_5^* - 2y_1^* \qquad - 3y_3^*)$$

$$-1 = (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)$$

双対定理の証明(その6)

$0 = (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*)$ ⇒ $-4y_1^* - 4y_2^* - y_3^* = -4$

双対問題において

$(y_1^*, y_2^* \; y_3^*)$の目的関数値 $= -4$

$-2 = (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)$

$-1 = (y_5^* - 2y_1^* \qquad - 3y_3^*)$

$-1 = (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)$

⇒

y_4^*, y_5^*, y_6^*は非負なので

$-2 \geqq -2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*$

$-1 \geqq -2y_1^* \qquad - 3y_3^*$

$-1 \geqq + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*$

$(y_1^*, y_2^* \; y_3^*)$は

双対問題の許容解

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件
$$
\begin{aligned}
-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leqq -2 \\
-2y_1 \qquad\quad - 3y_3 &\leqq -1 \\
y_1 - 4y_2 + y_3 &\leqq -1 \\
y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

双対定理の証明終わり