オペレーションズ・リサーチ基礎 第4回

線形計画問題：
単体法

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

基底解の更新方法:ピボット演算

ピボット演算(pivot operation)

許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

解を変化させて z を減らしたい

⇒ x_1の係数 < 0 なので

x_1 を増やす

x_1を α だけ増やすと

目的関数値 $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, \boxed{4-2\alpha}, \boxed{4-2\alpha}, 1+4\alpha)$

許容性を満たすためには $\alpha \leqq 2$

ピボット演算（その2）

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$ とすると

解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$

とくに、基底変数 $x_4 = 4 \rightarrow 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_5, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_3)

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$
$$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$$
$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$
$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

x_1を基底に入れる

x_4を基底から出す

辞書の書き換え

（ピボット演算終了）

ピボット演算2回目(その1)

$$z = -4 \quad + x_4 \quad + x_2 \quad - 2x_3$$
$$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$$
$$x_5 = 0 \quad + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$
$$x_6 = 9 \quad - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

z を減らしたい

⇒ x_3の係数 < 0 なので

x_3 を増やす

x_3をαだけ増やすと

基底解(2,0,0,0,0,9)

目的関数値 $z = -4$

目的関数値 $z = -4 - 2\alpha$

解は

$(2 + (½)\alpha, 0, \alpha, 0, \boxed{0 - 5\alpha}, 9+3\alpha)$

許容性を満たすためには

$\alpha \leqq 0$

ピボット演算2回目（その2）

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$
$$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$$
$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$
$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

$x_3 = 0 \rightarrow 0$ とすると

解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$

とくに、基底変数 $x_5 = 0 \rightarrow 0$

↓

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_3, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_5)

x_3を基底に入れる

x_5を基底から出す

↓

辞書の書き換え

（ピボット演算終了）

$$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$$
$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$
$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$
$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

ピボット演算に関する用語

1回目のピボット演算

基底解 （0,0,0,4,4,1） → （2,0,0,0,0,9）

非退化(nondegenerate)：基底解が変化する

2回目のピボット演算

基底解 (2,0,0,0,0,9) → (2,0,0,0,0,9)

退化(degenerate)：基底解が変化しない

最適性の判定

$$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$$

$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$

$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$

$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

z の式の非基底変数の係数がすべて非負

⇩

任意の許容解において x_4, x_2, x_5 は非負なので $z \geqq -4$

⇩

現在の基底解 (2,0,0,0,0,9) は $z = -4$ なので最適解

非有界性の判定

現在の辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 + 2x_1 - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

x_1の係数 = -2 < 0 なので

x_1 を増やす ⇒ z が減る

x_1をα増やすと

解は

$(\alpha, 0, 0, 4+2\alpha, 4+2\alpha, 1+4\alpha)$

目的関数値 $z = -2\alpha$

αを任意に増やしても解は許容

⇒ 非有界

単体法の流れ

- **入力**：許容辞書（および基底）
- **出力**：有界・非有界の判定。有界のときは最適解も。

ステップ1：最適性判定

z の等式の右辺の係数が全て非負⇒最適解

ある係数が負⇒基底に入る変数 x_s にする

ステップ2：非有界性判定、ピボット演算

変数 x_s をどれだけ増やせるか計算

無限に増やせる⇒非有界

それ以外⇒x_s を最大限増やしたときに0に減少する

基底変数を基底から出る変数 x_t にする

新しい基底に合わせて辞書を書き換え

単体法での検討事項

検討事項1 : 反復回数は有限か？

巡回(cycling) : 同じ辞書が繰り返し現れること

検討事項2 : 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq 3$

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x3 \geqq 0$

$\Rightarrow$

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

巡回の例

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_1	x_6	x_3
z	0	7/3	-2/3	1/3
x_4	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_5	0	-14/3	1/3	-5/3
x_2	0	5/3	-1/3	2/3

		x_1	x_6	x_4
z	0	2	-1	-1
x_3	0	-1	-1	-3
x_5	0	-3	2	5
x_2	0	1	-1	-2

		x_5	x_2	x_3
z	0	1/3	7/3	-2/3
x_4	0	2/3	5/3	-1/3
x_1	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_6	0	-5/3	-14/3	1/3

		x_5	x_2	x_4
z	0	-1	-1	2
x_3	0	2	5	-3
x_1	0	-1	-2	1
x_6	0	-1	-3	-1

		x_5	x_6	x_4
z	0	-2/3	1/3	7/3
x_3	0	1/3	-5/3	-14/3
x_1	0	-1/3	2/3	5/3
x_2	0	-1/3	-1/3	-1/3

単体法と巡回

- 基底・非基底変数が決まると，辞書は一意に定まる
- 基底・非基底変数の組合せは有限個

- 単体法は辞書を繰り返し生成する
- 単体法が終了しない➔辞書が無限に生成される

  ➔同じ辞書が何回も現れる

  ➔巡回が起こっている

注意：巡回が起こっているときは

目的関数値が変化しない

最小添字規則

ピボット演算のとき、

最小添字規則(smallest subscript rule)を適用

⇒ 有限反復で終了

基底に入る変数の候補

- ステップ1にて係数が負の非基底変数が複数存在

⇒ 添字最小のものを選択

基底から出る変数の候補

- ステップ2にて値が0に減少する基底変数が複数存在

⇒ 添字最小のものを選択

最小添字規則の適用例

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

x_1 はどれだけ増やせるか?

x_4: 0→0－2α

x_5: 0→0－3α

x_6: 0→0＋5α

∴ αは最大 0

そのとき $x_4 = x_5 = 0$

注意：x_6 は増加するので、

出る変数の候補ではない！

最小添字規則の適用例(つづき)

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_4	x_2	x_3
z	0	1/2	3/2	-1/2
x_1	0	-1/2	1/2	-1/2
x_5	0	3/2	-5/2	1/2
x_6	0	-5/2	-1/2	-1/2

最適

		x_4	x_2	x_1
z	0	1	1	1
x_3	0	-1	1	-2
x_5	0	1	-2	-1
x_6	0	-2	-1	1

2段階単体法

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化 $-2x_1 - x_2$

条件 $-2x_1 - x_2 \geqq 3$

$-2x_1 + 3x_2 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

$z = 0 - 2x_1 - x_2$

$x_3 = -3 - 2x_1 - x_2$

$x_4 = 4 - 2x_1 + 3x_2$

実は実行不可能なLP

基底解(0,0,-3,4)は許容解でない

- そもそも、LPの実行可能、不可能はどうやって判定する？

2段階単体法の流れ

- 任意のLPに適用可、実行可能性も判定
- 単体法を2回使用

1段階目：実行可能性の判定

- 補助問題を作成

  → 単体法を適用、元の問題の実行可能性を調べる

  許容解をもたない⇒終了

  許容解をもつ⇒許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目：非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

補助問題の作り方

元の問題

最小化　$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

補助問題

人工変数

最小化　x_a

条件　$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + x_a \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n + x_a \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, x_a \geqq 0$

- 大きなx_aに対して$(x_1,\ldots,x_n, x_a)$は許容解
- 元の問題が実行可能　⇔　補助問題の最適値＝0
- $(x_1,\ldots,x_n)$: 元の問題の許容解

　⇔　$(x_1,\ldots,x_n, 0)$: 補助問題の許容解

補助問題の解き方(その1)

元問題 → **補助問題**

元問題:

最小化 $-x_1 - 2x_2$

条件 $-x_1 - x_2 \geqq -1$

$x_1 + x_2 \geqq 1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

補助問題:

最小化 x_a

条件 $-x_1 - x_2 + x_a \geqq -1$

$x_1 + x_2 + x_a \geqq 1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_a \geqq 0$

↓

初期辞書

$$
\begin{aligned}
z_a &= x_a \\
z &= -x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 1 - x_1 - x_2 + x_a \\
x_4 &= -1 + x_1 + x_2 + x_a
\end{aligned}
$$

元問題の目的関数も追加

負の値なので許容辞書ではない

補助問題の解き方(その2)

許容でない初期辞書

→ ピボット演算により許容辞書へ

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 && x_a \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 1 - x_1 - x_2 + x_a \\
x_4 &= -1 + x_1 + x_2 + x_a
\end{aligned}
$$

- 非基底変数 x_a を基底に入れる
- 基底変数の式の定数項を比較
- 定数項最小の基底変数を基底から出す

↓ x_a と x_4 を入れ替え ⇒ 許容辞書が得られる

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

補助問題の解き方(その3)

許容辞書が得られた

→　単体法で最適解を求める

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

x_1 と x_a を入れ替え

係数が全て非負なので最適

$$
\begin{aligned}
\boxed{z_a = 0 + x_a} \\
z &= -1 + x_a - x_2 - x_4 \\
x_3 &= 0 + 2x_a - x_4 \\
x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

- 補助問題の最適値 $z_a = 0$ ⇒ 元問題は実行可能
- 現在の基底解 (1, 0, 0, 0): 元問題の許容解
- x_a が非基底変数

  ⇒ 最終辞書から x_a, z_a を削除すると元問題の許容辞書

補助問題の解き方(その4)

最終辞書で x_a が基底に入っている場合は？

係数が全て非負なので最適

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

x_1 と x_3 を入れ替え

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4 \\
z &= -1 + \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2} x_4 \\
x_1 &= 1 - \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2} x_4 \\
x_a &= 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4
\end{aligned}
$$

元問題の許容辞書をどうやって求めるか？

補助問題の解き方（その5）

最適辞書において x_a が基底に入っている

→ ピボット演算で x_a を基底から出す

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4\\
z &= -1 + \tfrac{1}{2}x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2}x_4\\
x_1 &= 1 - \tfrac{1}{2}x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2}x_4\\
x_a &= 0 \boxed{+ \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4}
\end{aligned}
$$

係数が非ゼロの変数と x_a を入れ替え

x_3 と x_a を入れ替え

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + x_a\\
z &= -1 + x_a - x_2 - x_4\\
x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4\\
x_3 &= 0 + 2x_a - x_4
\end{aligned}
$$

x_a が非基底にある

⇒ x_a, z_a を削除すると元問題の許容辞書

$$
\begin{aligned}
z &= -1 - x_2 - x_4\\
x_1 &= 1 - x_2 + x_4\\
x_3 &= 0 - x_4
\end{aligned}
$$

2段階単体法の2段階目

1段階目で得られた許容辞書に
単体法を適用

$$
\begin{aligned}
z &= -1 - x_2 - x_4 \\
x_1 &= 1 - x_2 + x_4 \\
x_3 &= 0 \qquad\quad - x_4
\end{aligned}
$$

x_2 と x_1 を
入れ替え

$$
\begin{aligned}
z &= -2 + x_1 - 2x_4 \\
x_2 &= 1 - x_1 + x_4 \\
x_3 &= 0 \qquad\quad - x_4
\end{aligned}
$$

x_4 と x_3 を
入れ替え

$$
\begin{aligned}
z &= -2 + x_1 + 2x_3 \\
x_2 &= 1 - x_1 - x_3 \\
x_4 &= 0 \qquad\quad - x_3
\end{aligned}
$$

最適解 (0,1,0,0) が得られた

2段階単体法の流れ

- 入力：不等式標準形のLP

1段階目：実行可能性の判定

- 補助問題に単体法を適用、元問題の実行可能性を調べる

許容解をもたない ⇒ 終了
許容解をもつ ⇒ 許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目：非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

非有界 ⇒ 終了
有界 ⇒ 最適解を出力

∴実行可能で有界なLPは最適解をもつ（基本定理）

レポート問題

問1：右のLP（許容辞書）を単体法により解きなさい．

単体法の各反復における辞書，および基底から出る変数，入る変数を明記すること

最小添字規則を使うこと

※ 最適解は $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1,$
$x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$

最適値は -13

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$

問2：右の線形計画問題に対し，
二段階単体法の一段階目を適用し，
実行可能解の有無を判定したい．
(1) 補助問題を書きなさい．
(2) 補助問題を解いて，実行可能解の有無を判定せよ．※4回のピボット演算が必要

最小化 $-3x_1 - 2x_2$

条件 $2x_1 - x_2 \geqq -1$

$-x_1 + 2x_2 \geqq 4$

$-x_1 - x_2 \geqq -2$

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0$