

# オペレーションズ・リサーチ基礎 第4回

## 線形計画問題: 単体法

---

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

# 基底解の更新方法:ピボット演算

## ピボット演算 (pivot operation)

### 許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値  $z = 0$

解を変化させて  $z$  を減らしたい  
 $\Rightarrow x_1$  の係数  $< 0$  なので  
 $x_1$  を増やす

$x_1$  を  $\alpha$  だけ増やすと

目的関数値  $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, 4 - 2\alpha, 4 - 2\alpha, 1 + 4\alpha)$

許容性を満たすためには  $\alpha \leq 2$

# ピボット演算(その2)

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$  とすると

解は  $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$ ,  $z = -4$

とくに、基底変数  $x_4 = 4 \rightarrow 0$



基底と非基底の入れ替え

基底( $x_1, x_5, x_6$ ), 非基底( $x_4, x_2, x_3$ )

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$

$$x_1 = 2 - (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3$$

$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

$x_1$ を基底に入れる

$x_4$ を基底から出す



辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

# ピボット演算2回目(その1)

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$

z を減らしたい

⇒  $x_3$  の係数  $< 0$  なので  
 $x_3$  を増やす

$$x_1 = 2 - (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3$$

$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

$x_3$  を  $\alpha$  だけ増やすと

基底解  $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$

目的関数値  $z = -4 - 2\alpha$

目的関数値  $z = -4$

解は

$$(2 + (1/2)\alpha, 0, \alpha, 0, 0 - 5\alpha, 9 + 3\alpha)$$

許容性を満たすためには

$$\alpha \leq 0$$

# ピボット演算2回目(その2)

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$

$$x_1 = 2 - (1/2)x_4 - x_2 + (1/2)x_3$$

$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$

$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

$x_3 = 0 \rightarrow 0$  とすると

解は(2,0,0,0,0,9),  $z = -4$

とくに、基底変数  $x_5 = 0 \rightarrow 0$



基底と非基底の入れ替え

基底( $x_1, x_3, x_6$ ), 非基底( $x_4, x_2, x_5$ )

$x_3$ を基底に入れる

$x_5$ を基底から出す



辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

$$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$$

$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$

$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$

$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

# ピボット演算に関する用語

## 1回目のピボット演算

基底解  $(0,0,0,4,4,1) \rightarrow (2,0,0,0,0,9)$

**非退化(nondegenerate)**: 基底解が変化する

## 2回目のピボット演算

基底解  $(2,0,0,0,0,9) \rightarrow (2,0,0,0,0,9)$

**退化(degenerate)**: 基底解が変化しない

# 最適性の判定

$$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$$

$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$

$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$

$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

$z$  の式 of 非基底変数の係数がすべて非負



任意の許容解において  $x_4, x_2, x_5$  は非負なので  $z \geq -4$



現在の基底解  $(2, 0, 0, 0, 0, 9)$  は  $z = -4$  なので最適解

# 非有界性の判定

現在の辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 + 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 + 2x_1 - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値  $z = 0$

$x_1$ の係数 =  $-2 < 0$  なので  
 $x_1$ を増やす  $\Rightarrow z$ が減る

$x_1$ を $\alpha$ 増やすと

解は

$$(\alpha, 0, 0, 4 + 2\alpha, 4 + 2\alpha, 1 + 4\alpha)$$

目的関数値  $z = -2\alpha$

$\alpha$ を任意に増やしても解は許容  
 $\Rightarrow$  非有界



# 単体法の流れ

- **入力**: 許容辞書(および基底)
- **出力**: 有界・非有界の判定。有界のときは最適解も。

## ステップ1: 最適性判定

$z$  の等式の右辺の係数が全て非負  $\Rightarrow$  **最適解**  
ある係数が負  $\Rightarrow$  **基底に入る変数  $x_s$**  にする

## ステップ2: 非有界性判定、ピボット演算

変数  $x_s$  をどれだけ増やせるか計算  
無限に増やせる  $\Rightarrow$  **非有界**

それ以外  $\Rightarrow x_s$  を最大限増やしたときに0に減少する  
基底変数を**基底から出る変数  $x_t$**  にする

新しい基底に合わせて辞書を書き換え

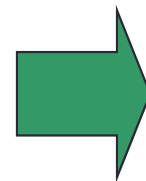
# 単体法での検討事項

検討事項1: 反復回数は有限か?

**巡回(cycling)**: 同じ辞書が繰り返し現れること

検討事項2: 初期辞書が許容でない場合はどうする?

$$\begin{array}{l} \text{最小化} \quad -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{条件} \quad -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ \quad \quad -2x_1 \quad \quad -4x_3 \geq -4 \\ \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 = 4 - 2x_1 \quad \quad -4x_3 \end{array}$$

# 巡回の例

		$x_1$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	-1	2	-1
$x_4$	0	-2	1	-1
$x_5$	0	-3	-1	-1
$x_6$	0	5	-3	2

		$x_1$	$x_6$	$x_3$
$z$	0	$7/3$	$-2/3$	$1/3$
$x_4$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$
$x_5$	0	$-14/3$	$1/3$	$-5/3$
$x_2$	0	$5/3$	$-1/3$	$2/3$

		$x_1$	$x_6$	$x_4$
$z$	0	2	-1	-1
$x_3$	0	-1	-1	-3
$x_5$	0	-3	2	5
$x_2$	0	1	-1	-2

		$x_5$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	$1/3$	$7/3$	$-2/3$
$x_4$	0	$2/3$	$5/3$	$-1/3$
$x_1$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$
$x_6$	0	$-5/3$	$-14/3$	$1/3$

		$x_5$	$x_2$	$x_4$
$z$	0	-1	-1	2
$x_3$	0	2	5	-3
$x_1$	0	-1	-2	1
$x_6$	0	-1	-3	-1

		$x_5$	$x_6$	$x_4$
$z$	0	$-2/3$	$1/3$	$7/3$
$x_3$	0	$1/3$	$-5/3$	$-14/3$
$x_1$	0	$-1/3$	$2/3$	$5/3$
$x_2$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$

# 単体法と巡回

- 基底・非基底変数が決まると、辞書は一意に定まる
- 基底・非基底変数の組合せは有限個
  
- 単体法は辞書を繰り返し生成する
- 単体法が終了しない → 辞書が無限に生成される
  - 同じ辞書が何回も現れる
  - 巡回が起こっている

注意：巡回が起こっているときは  
目的関数値が変化しない

# 最小添字規則

ピボット演算のとき、

最小添字規則 (smallest subscript rule) を適用

⇒ 有限反復で終了

基底に入る  
変数の候補

• ステップ1にて **係数が負の非基底変数** が複数存在

⇒ **添字最小** のものを選択

基底から出る  
変数の候補

• ステップ2にて **値が0に減少する基底変数** が複数存在

⇒ **添字最小** のものを選択

# 最小添字規則の適用例

入る変数の候補

出る変数の候補

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$z$	0	-1	2	-1
$x_4$	0	-2	1	-1
$x_5$	0	-3	-1	-1
$x_6$	0	5	-3	2

$x_1$  はどれだけ増やせるか?

$$x_4: 0 \rightarrow 0 - 2\alpha$$

$$x_5: 0 \rightarrow 0 - 3\alpha$$

$$x_6: 0 \rightarrow 0 + 5\alpha$$

$\therefore \alpha$  は最大 0

そのとき  $x_4 = x_5 = 0$

注意:  $x_6$  は増加するので、

出る変数の候補ではない!

# 最小添字規則の適用例(つづき)

入る変数の候補

$x_1$   $x_2$   $x_3$

z	0	-1	2	-1
$x_4$	0	-2	1	-1
$x_5$	0	-3	-1	-1
$x_6$	0	5	-3	2

出る変数の候補



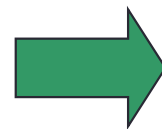
$x_4$   $x_2$   $x_3$

z	0	1/2	3/2	-1/2
$x_1$	0	-1/2	1/2	-1/2
$x_5$	0	3/2	-5/2	1/2
$x_6$	0	-5/2	-1/2	-1/2

最適

$x_4$   $x_2$   $x_1$

z	0	1	1	1
$x_3$	0	-1	1	-2
$x_5$	0	1	-2	-1
$x_6$	0	-2	-1	1



# 2段階単体法

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化  $-2x_1 - x_2$

条件  $-2x_1 - x_2 \geq 3$

$$-2x_1 + 3x_2 \geq -4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



$$z = 0 - 2x_1 - x_2$$

$$x_3 = -3 - 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 + 3x_2$$

実は実行不可能なLP

基底解(0,0,-3,4)は  
許容解でない

- そもそも、LPの実行可能、不可能はどうやって判定する？



# 2段階単体法の流れ

- 任意のLPに適用可、実行可能性も判定
- 単体法を2回使用

## 1段階目: 実行可能性の判定

- 補助問題を作成

- 単体法を適用、元の問題の実行可能性を調べる
  - 許容解をもたない⇒終了
  - 許容解をもつ⇒許容辞書を出力、2段階目へ

## 2段階目: 非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

# 補助問題の作り方

元の問題



補助問題

人工変数

最小化  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

条件  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

最小化  $x_a$

条件  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_a \geq b_1$

...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_a \geq b_m$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_a \geq 0$

- 大きな  $x_a$  に対して  $(x_1, \dots, x_n, x_a)$  は許容解
- 元の問題が実行可能  $\Leftrightarrow$  補助問題の最適値 = 0
- $(x_1, \dots, x_n)$ : 元の問題の許容解  
 $\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n, 0)$ : 補助問題の許容解

# 補助問題の解き方(その1)

元問題



補助問題

最小化  $-x_1 - 2x_2$

条件  $-x_1 - x_2 \geq -1$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

最小化  $x_a$

条件  $-x_1 - x_2 + x_a \geq -1$

$$x_1 + x_2 + x_a \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_a \geq 0$$

初期辞書

$$z_a = \quad \quad \quad x_a$$

$$z = \quad -x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 + x_a$$

$$x_4 = -1 + x_1 + x_2 + x_a$$

負の値なので  
許容辞書ではない

元問題の目的  
関数も追加

# 補助問題の解き方(その2)

許容でない初期辞書

→ ピボット演算により許容辞書へ

$$z_a = 0 \quad x_a$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 + x_a$$

$$x_4 = -1 + x_1 + x_2 + x_a$$

- 非基底変数  $x_a$  を基底に入れる
- 基底変数の式の定数項を比較
- 定数項最小の基底変数を

基底から出す



$x_a$  と  $x_4$  を入れ替え

⇒ 許容辞書が得られる

$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

# 補助問題の解き方(その3)

許容辞書が得られた

→ 単体法で最適解を求める

係数が全て非負  
なので最適

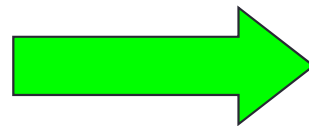
$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$x_1$  と  $x_a$  を  
入れ替え



$$z_a = 0 + x_a$$

$$z = -1 + x_a - x_2 - x_4$$

$$x_3 = 0 + 2x_a - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_a - x_2 + x_4$$

- 補助問題の最適値  $z_a = 0 \Rightarrow$  元問題は実行可能
- 現在の基底解  $(1, 0, 0, 0)$ : 元問題の許容解
- $x_a$  が非基底変数  
⇒ 最終辞書から  $x_a, z_a$  を削除すると元問題の許容辞書

# 補助問題の解き方(その4)

最終辞書で  $x_a$  が基底に入っている場合は？

係数が全て非負なので最適

$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$x_1$  と  $x_3$  を  
入れ替え



$$z_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$z = -1 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 - x_2 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

元問題の許容辞書をどうやって求めるか？

# 補助問題の解き方(その5)

最適辞書において  $x_a$  が基底に入っている

→ ピボット演算で  $x_a$  を基底から出す

$$z_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$z = -1 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 - x_2 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$x_3$  と  $x_a$  を  
入れ替え



$$z_a = 0 + x_a$$

$$z = -1 + x_a - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_a - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 + 2x_a - x_4$$

$x_a$  が非基底にある

⇒  $x_a, z_a$  を削除すると

元問題の許容辞書

係数が非ゼロの  
変数と  $x_a$  を入れ替え

$$z = -1 - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

## 2段階単体法の2段階目

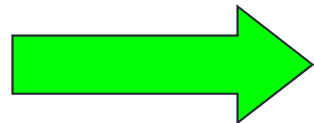
1段階目で得られた許容辞書に  
単体法を適用

$$z = -1 - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

$x_2$  と  $x_1$  を  
入れ替え

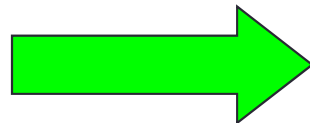


$$z = -2 + x_1 - 2x_4$$

$$x_2 = 1 - x_1 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

$x_4$  と  $x_3$  を  
入れ替え



$$z = -2 + x_1 + 2x_3$$

$$x_2 = 1 - x_1 - x_3$$

$$x_4 = 0 - x_3$$

最適解  $(0, 1, 0, 0)$  が得られた



# 2段階単体法の流れ

- 入力: 不等式標準形のLP

- 1段階目: 実行可能性の判定

- 補助問題に単体法を適用、

元問題の実行可能性を調べる

許容解をもたない  $\Rightarrow$  終了

許容解をもつ  $\Rightarrow$  許容辞書を出力、2段階目へ

- 2段階目: 非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

非有界  $\Rightarrow$  終了

有界  $\Rightarrow$  最適解を出力

∴ 実行可能で有界なLPは最適解をもつ(基本定理)

# レポート問題

問1: 右のLP(許容辞書)を単体法により解きなさい.

単体法の各反復における辞書, および基底から出る変数, 入る変数を明記すること

最小添字規則を使うこと

※ 最適解は  $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1,$   
 $x_4 = 0, x_5 = 1, x_6 = 0$

最適値は -13

$$z = 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

問2: 右の線形計画問題に対し,  
二段階単体法の一段階目を適用し,  
実行可能解の有無を判定したい.

(1) 補助問題を書きなさい.

(2) 補助問題を解いて, 実行可能解の有無を判定せよ. ※4回のピボット演算が必要

$$\text{最小化 } -3x_1 - 2x_2$$

$$\text{条件 } 2x_1 - x_2 \geq -1$$

$$-x_1 + 2x_2 \geq 4$$

$$-x_1 - x_2 \geq -2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$