オペレーションズ･リサーチ基礎 第3回

線形計画問題:
諸定理，単体法

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

休講の案内

- 12月19日(月)の授業は休講にします
  - 塩浦が海外出張(韓国・ソウル)のため

双対問題の解釈

線形計画問題の例1：生産計画問題

- 工場での生産計画
  - 4種類の原料A, B, C, Dを用いて
  - 3種類の製品I, II, IIIを生産する（生産量は実数値と仮定）
  - 利益を最大にしたい

各製品を1単位生産したときの利益(単位：万円)

I	II	III
70	120	30

各原料の使用可能量

A	B	C	D
80	50	100	70

各製品を1単位生産するのに必要な原料の量

原料＼製品	I	II	III
A	5	0	6
B	0	2	8
C	7	0	15
D	3	11	0

生産計画問題の定式化

- 数学モデルとして定式化（数式を使って表現）
  - 何を変数とするか？

    ➔各製品I, II, III の生産量を x_1, x_2, x_3 とおく
  - 目的：総利益は $70x_1 + 120x_2 + 30x_3$（万円）← 最大化する
  - 条件：
    - 原料の利用可能量を超えてはならない
      - 原料A：$5x_1 + 6x_3 \leq 80$
      - 原料B：$2x_2 + 8x_3 \leq 50$
      - 原料C：$7x_1 + 15x_3 \leq 100$
      - 原料D：$3x_1 + 11x_2 \leq 70$
    - 生産量は0以上：$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

生産計画問題とその双対問題

主問題

最大化：$70x_1 + 120x_2 + 30x_3$

条件：
$$
\begin{aligned}
5x_1 \qquad\qquad + 6x_3 &\le 80 \\
2x_2 + 8x_3 &\le 50 \\
7x_1 \qquad\qquad + 15x_3 &\le 100 \\
3x_1 + 11x_2 \qquad\qquad &\le 70 \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

双対問題

最小化：$80y_1 + 50y_2 + 100y_3 + 70y_4$

条件：
$$
\begin{aligned}
5y_1 \qquad\qquad + 7y_3 + 3y_4 &\ge 70 \\
2y_2 \qquad\qquad + 11y_4 &\ge 120 \\
6y_1 + 8y_2 + 15y_3 \qquad\qquad &\ge 30 \\
y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0, y_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$

双対問題の解釈

最小化: $80y_1 + 50y_2 + 100y_3 + 70y_4$

条件: $5y_1 + 7y_3 + 3y_4 \geq 70$

双対問題

$2y_2 + 11y_4 \geq 120$

$6y_1 + 8y_2 + 15y_3 \geq 30$

$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$

「工場から原料を買い取りするときの価格付け問題」と解釈できる

原料A, B, C, Dの価格
--- y_1, y_2, y_3, y_4

各原料の使用可能量

A	B	C	D
80	50	100	70

購入の総費用を安くしたい
➔ 最小化: $80y_1 + 50y_2 + 100y_3 + 70y_4$

双対問題の解釈（つづき）

最小化： $80y_1 + 50y_2 + 100y_3 + 70y_4$　　原料A, B, C, Dの価格

条件：

$$5y_1 \quad + 7y_3 + 3y_4 \geq 70$$

$$2y_2 \quad + 11y_4 \geq 120$$

$$6y_1 + 8y_2 + 15y_3 \quad \geq 30$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0$$

--- y_1, y_2, y_3, y_4

双対問題

各製品を1単位生産したときの利益(単位：万円)

I	II	III
70	120	30

各製品を1単位生産するのに必要な原料の量

原料＼製品	I	II	III
A	5	0	6
B	0	2	8
C	7	0	15
D	3	11	0

製品Iを1単位生産するために必要な原料費

$$5y_1 \quad + 7y_3 + 3y_4$$

これが利益 70 より安い

➔工場で製品Iを生産した方が利益大

➔ 工場は原料を売らない

➔ ≧ 70 を満たす必要性

製品II, III についても同様

線形計画問題の諸定理

双対定理

定理（双対定理, duality theorem）:
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明は後日

主問題と双対問題の答えの組合せ

<table>
<tr><td rowspan="3" colspan="3"></td><td colspan="3">双対問題</td></tr>
<tr><td colspan="2">実行可能</td><td rowspan="2">実行不可能</td></tr>
<tr><td>最適解</td><td>非有界</td></tr>
<tr><td rowspan="3">主問題</td><td rowspan="2">実行可能</td><td>最適解</td><td>○
（双対定理）</td><td>×
（系）</td><td>×
（双対定理）</td></tr>
<tr><td>非有界</td><td>×
（系）</td><td>×
（系）</td><td>○
（系）</td></tr>
<tr><td colspan="2">実行不可能</td><td>×
（双対定理）</td><td>○
（系）</td><td>○</td></tr>
</table>

相補性定理(complementarity slackness theorem)

定理: **x**: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

x および **y** は最適解

⇔ 以下の相補性条件(complementarity slackness condition) が成立:

各 $j = 1,2, \dots, n$ について

$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$ と $x_j \geq 0$ のどちらかは等号成立

各 $i = 1,2, \dots, m$ について

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ と $y_i \geq 0$ のどちらかは等号成立

※ 相補性条件は2次の等式として表現可能:

$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = c_j x_j \ (j = 1,2, \dots, n)$

$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i = b_i y_i \ (i = 1,2, \dots, m)$

相補性条件の意味

最小化　$c_1x_1+\cdot\cdot\cdot\cdot+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdot\cdot\cdot\cdot+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdot\cdot\cdot\cdot+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdot\cdot\cdot\cdot+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

主問題

主問題と双対問題の対になる不等式条件のうち，どちらかは等号で成立

双対問題

最大化　$b_1y_1+b_2y_2+\cdot\cdot\cdot\cdot+b_my_m$

条件　$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdot\cdot\cdot\cdot+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdot\cdot\cdot\cdot+a_{m2}y_m \leqq c_2$

$\cdots$

$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdot\cdot\cdot\cdot+a_{mn}y_m \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

相補性定理の証明

x および y は最適解 ←→ 相補性条件が成立：

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = c_j x_j \ (j = 1,2,\dots,n)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i = b_i y_i \ (i = 1,2,\dots,m)$$

証明：　弱双対定理および双対定理を使って証明する.

弱双対定理（の証明）より

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad ①$$

主問題と双対問題の制約条件より,

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j \leq c_j x_j \ \ (\forall j), \quad \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i \geq b_i y_i \ (\forall i) \quad ②$$

双対定理より,

x および y は最適解 ←→ ①の最初の項＝最後の項

←→ ①の不等号2つが等号で成立

←→ ②の不等号がすべて等号で成立

←→ 相補性条件が成立　　　　■

相補性定理の使い方

- 主問題と双対問題の一方の最適解が分かる

➔他方も簡単に計算できる

最小化： $2x_1 + x_2$
条件： $x_1 + x_2 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \geq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

最大化： $2y_1 + 5y_2$
条件： $y_1 + y_2 \leq 2$
$y_1 + 4y_2 \leq 1$
$y_1, y_2 \geq 0$

主問題の最適解は $(x_1, x_2) = (0,2)$
相補性定理を使い，双対問題の最適解を求める.

相補性条件

$x_1 + x_2 = 2$ または $y_1 = 0$
$x_1 + 4x_2 = 5$ または $y_2 = 0$
$x_1 = 0$ または $y_1 + y_2 = 2$
$x_2 = 0$ または $y_1 + 4y_2 = 1$

相補性条件より，双対問題の最適解は$y_2 = 0$ および $y_1 + 4y_2 = 1$ を満たす $\therefore (y_1, y_2) = (1,0)$

相補性定理の使い方(つづき)

- 主問題と双対問題の実行可能解の最適性が判定できる

最小化： $2x_1 + x_2$
条件： $x_1 + x_2 \geq 2$
$x_1 + 4x_2 \geq 5$
$x_1, x_2 \geq 0$

最大化： $2y_1 + 5y_2$
条件： $y_1 + y_2 \leq 2$
$y_1 + 4y_2 \leq 1$
$y_1, y_2 \geq 0$

$(x_1, x_2) = (1,1)$ は主問題の許容解.
相補性定理を使い,
最適解か否か判定したい

相補性条件

$x_1 + x_2 = 2$ または $y_1 = 0$
✖ $x_1 + 4x_2 = 5$ または $y_2 = 0$
✖ $x_1 = 0$ または $y_1 + y_2 = 2$
✖ $x_2 = 0$ または $y_1 + 4y_2 = 1$

$(x_1, x_2) = (1,1)$ が主問題の最適解 ➔ 双対問題の最適解(y_1, y_2)
は相補性条件 $y_2 = 0, y_1 + y_2 = 2, y_1 + 4y_2 = 1$ を満たす
しかし, この3条件を満たす(y_1, y_2) は存在しない
∴ $(x_1, x_2) = (1,1)$ は最適解ではない

発展：主双対内点法の考え方

内点法： 実行可能解集合の「内部」を通って最適解を求める
解法の総称

x および y は最適解 ←→ 相補性条件が成立：

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j = c_j x_j \ (j = 1,2,\ldots,n)$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) y_i = b_i y_i \ (i = 1,2,\ldots,m)$$

主双対内点法の考え方：

任意に選んだ主問題・双対問題の許容解 x, y に対し,

$$\left(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i\right) x_j \geq 0 \quad (\forall j), \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i\right) y_i \geq 0 \ (\forall i)$$

主問題・双対問題の許容解 x, y を繰り返し修正して,

上記の不等式の左辺の値を0に近づけていく ➔ 最適解に近づく

線形計画問題に対する単体法

2変数の線形計画問題

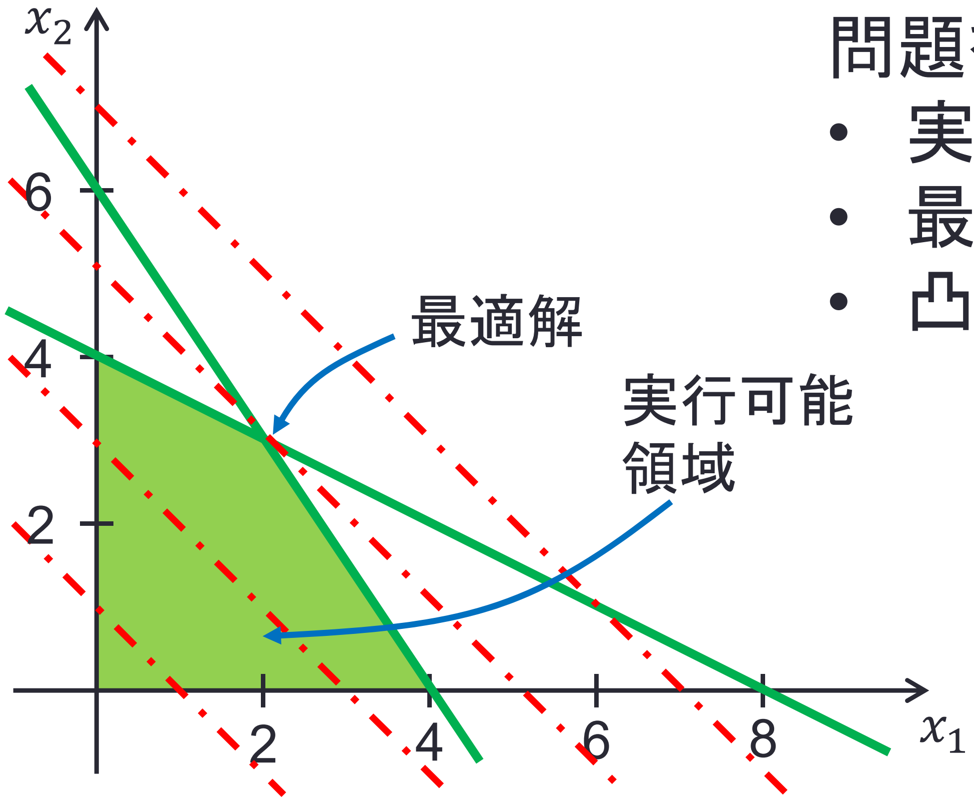
例題

目的関数： $-x_1 - x_2 \quad \to$ 最小化

制約条件： $3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

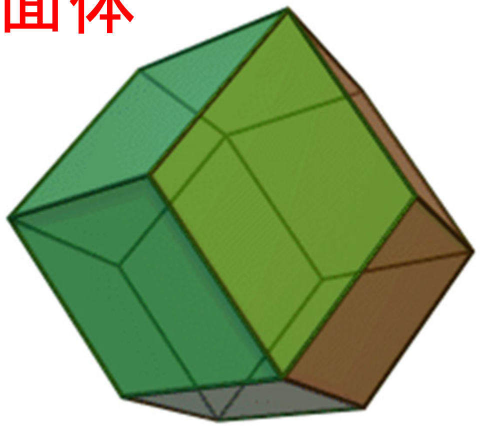


問題を図示してわかること

- 実行可能領域は平面上の凸多角形
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の頂点の1つは最適解

実行可能領域と最適解の性質

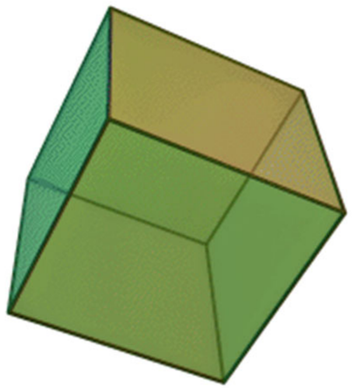
- 一般の n 変数の線形計画問題の場合
  - 実行可能領域は，n 次元実数空間における**凸多面体**
  - 凸多面体の**頂点の中に，必ず最適解**が存在



http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Rhombicdodecahedron.gif

➔ 最適解を見つけるには，実行可能領域の頂点を全て調べればよい！

- 単純なやり方で頂点を調べると，指数時間が必要
  - 超立方体の場合，頂点の数は 2^n 個
- 効率的に頂点を調べて最適解を見つける方法
  - **シンプレックス法（単体法）**



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/48/Hexahedron.gif

シンプレックス法

- 線形計画問題の最適解を求めるアルゴリズム
- G. B. Dantzig (1947)が提案
- 「ピボット操作」により，「基底解」を繰り返し更新して，最適解を求める

- 今日の残りの内容：シンプレックス法の説明のための準備
  - 基底解の説明
  - ピボット演算の説明

大事なこと
△ 単体法のうごきを覚える
○ 問題の構造を理解し，解法につなげる方法を知る

辞書(その1)

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最小化　z

条件　$z = 0 \quad + \ c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

$x_{n+1} = - b_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = - b_m + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0,$

$x_{n+1} \geqq 0, \ldots, x_{n+m} \geqq 0$

この等式制約のみで

問題を表現できる　→　**辞書(dictionary)**

辞書(その2)

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件
$$
\begin{aligned}
-2x_1 - 2x_2 + x_3 &\geqq -4\\
-2x_1 - 4x_3 &\geqq -4\\
4x_1 - 3x_2 + x_3 &\geqq -1\\
x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

最小化 z

条件
$$
\boxed{
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3\\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3\\
x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3\\
x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3
\end{aligned}
}
$$
$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0$$

辞書

辞書に関する用語

$$
\begin{aligned}
z &= 0 + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
x_{n+1} &= -b_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\
&\cdots \\
x_{n+m} &= -b_m + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

非基底変数
(nonbasic variable)
右辺の変数

基底変数(basic variable)：左辺に表れる変数

基底解(basic solution)：非基底変数を0としたときの解
（許容とは限らない）

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\
x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

⇒ 基底解は(0,0,0,4,4,1)

基底解と非基底変数の関係

非基底変数の選び方に応じて，基底解は変わる
変数は n 個，非基底変数は n-m個
➔非基底変数の組合せは ${}_nC_{n-m}$ 個➔ ${}_nC_{n-m}$ 個の基底解

目的関数：$-x_1 - x_2 \quad \rightarrow$ 最小化
制約条件：$3x_1 + 2x_2 \leq 12$
$x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

$$
\begin{aligned}
z &= \qquad -x_1 - x_2 \\
x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\
x_4 &= 8 \quad - x_1 - 2x_2
\end{aligned}
$$

等式 m = 2 個，変数 n = 4 個

➔ ${}_4C_2$ = 4x3/2 = 6 個の基底解

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)
基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)
基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_4: (0,6,0,−4)
基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)
基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)
基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)

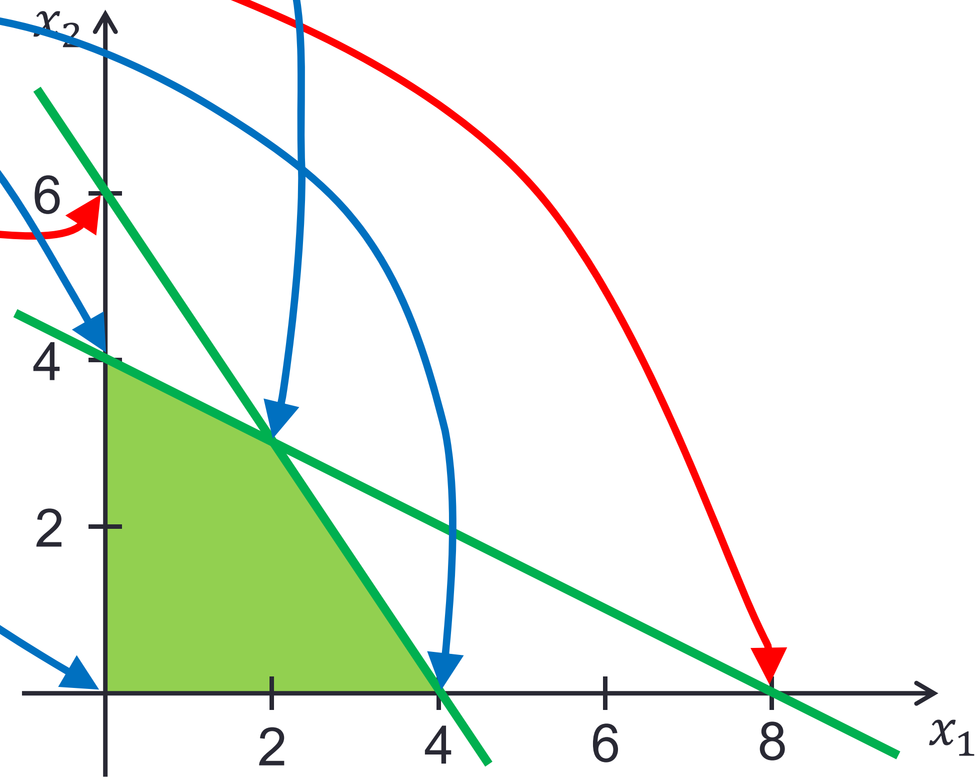
２つは実行不可能，残りは実行可能

基底解と頂点の関係

実行可能な基底解は，実行可能領域の頂点に対応している
➔ 実行可能な基底解の中に，必ず最適解が存在する

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)
基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)
基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)
基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)
基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_3: (0,6,0,−4)
基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)

最適基底解：
最適な基底解のこと



辞書に関する用語(その2)

許容辞書(feasible dictionary):

対応する基底解が許容解の辞書
⇔　基底解の各成分が非負

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\quad - 4x_3
\end{aligned}
$$

基底解＝(0,0,0,4,4)

⇒　許容辞書

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= -4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\quad - 4x_3
\end{aligned}
$$

基底解＝(0,0,0,-4,4)

⇒　許容辞書ではない

辞書の行列表現

辞書の右辺の係数だけを書き出す

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3$$

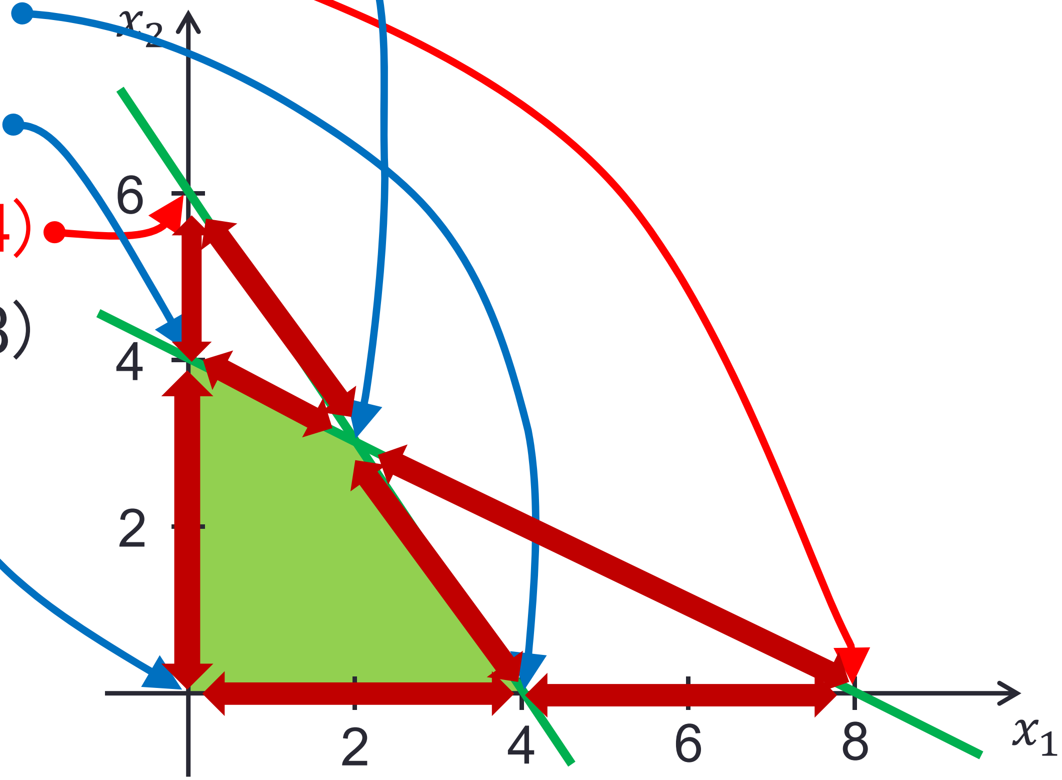
→

0	-2	-1	-1
4	-2	-2	1
4	-2	0	-4

ピボット操作

ピボット操作：基底変数と非基底変数を1個ずつ入れ替えること
ピボット操作により，基底解は「隣接する」基底解に変わる

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)
基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)
基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)
基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)
基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_3: (0,6,0,−4)
基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)



基底解の更新方法:ピボット演算

ピボット演算(pivot operation)

許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3$$

$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

解を変化させて z を減らしたい

⇒ x_1の係数 < 0 なので
x_1 を増やす

x_1をαだけ増やすと

目的関数値 $z = -2\alpha$

解は

$(\alpha, 0, 0, \boxed{4-2\alpha}, \boxed{4-2\alpha}, 1+4\alpha)$

許容性を満たすためには$\alpha \leqq 2$

ピボット演算(その2)

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\
x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$ とすると

解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$

とくに、 基底変数 $x_4 = 4 \rightarrow 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_5, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_3)

$$
\begin{aligned}
z &= -4 + x_4 + x_2 - 2x_3 \\
x_1 &= 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3 \\
x_5 &= 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3 \\
x_6 &= 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3
\end{aligned}
$$

x_1を基底に入れる

x_4を基底から出す

辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

レポート問題

問1：弱双対定理を使って，以下の系を証明せよ

> **系**： **x**: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解，
> $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ を満たす
> ⇒ **x**: 主問題の最適解、**y**：双対問題の最適解

問2：下記の２つのLPの双対問題を求めなさい．
また，それぞれの双対問題が
(a)最適解をもつ，(b)非有界，(c)実行不可能
のいずれに当てはまるか，調べなさい（理由も書くこと）

最小化	x + 2y
条件	-x - y≧ -3
	x, y≧ 0

最小化	x + 2y
条件	-x - y≧ 1
	x, y≧ 0

レポート問題

問3：右の線形計画問題について考える.

(a) [P] の双対問題[D]を書きなさい.

(b) [P]と[D]に対する相補性条件をすべて(具体的に)書きなさい.

(c) [P] の最適解のひとつは$x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$である.

相補性定理を使って，双対問題[D]の最適解をすべて計算しなさい．計算の過程も書くこと.

$$
[\mathrm{P}]\quad\left|\begin{array}{lrrrl}
\text{最小化} & -2x_1 & -x_2 & +x_3 & \\
\text{条件} & -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & \geq -4 \\
 & -2x_1 & & -4x_3 & \geq -4 \\
 & 4x_1 & -3x_2 & +x_3 & \geq 2 \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0}
\end{array}\right.
$$