オペレーションズ・リサーチ基礎 第2回

線形計画問題：標準形，双対問題，諸定理

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

今日の講義の流れ

線形計画問題に関する用語と定理

- 不等式標準系，等式標準系
- 双対問題
- LPの諸定理

線形計画問題

線形計画問題（Linear Programming Problem）の定義
- 目的関数(objective function)が線形
- 制約(constraint)が線形

という最適化問題

目的は「最大化」「最小化」
どちらでもよい

最大化　$2x + 2y + 3z$

条件　
$$
\begin{aligned}
5x + 3z &\leqq 8 \\
2z &= 2 \\
4y + z &\geqq 9 \\
x, y &\geqq 0
\end{aligned}
$$

制約式は「≧」「＝」「≦」
どれでもよい
（「＞」「＜」は不可）

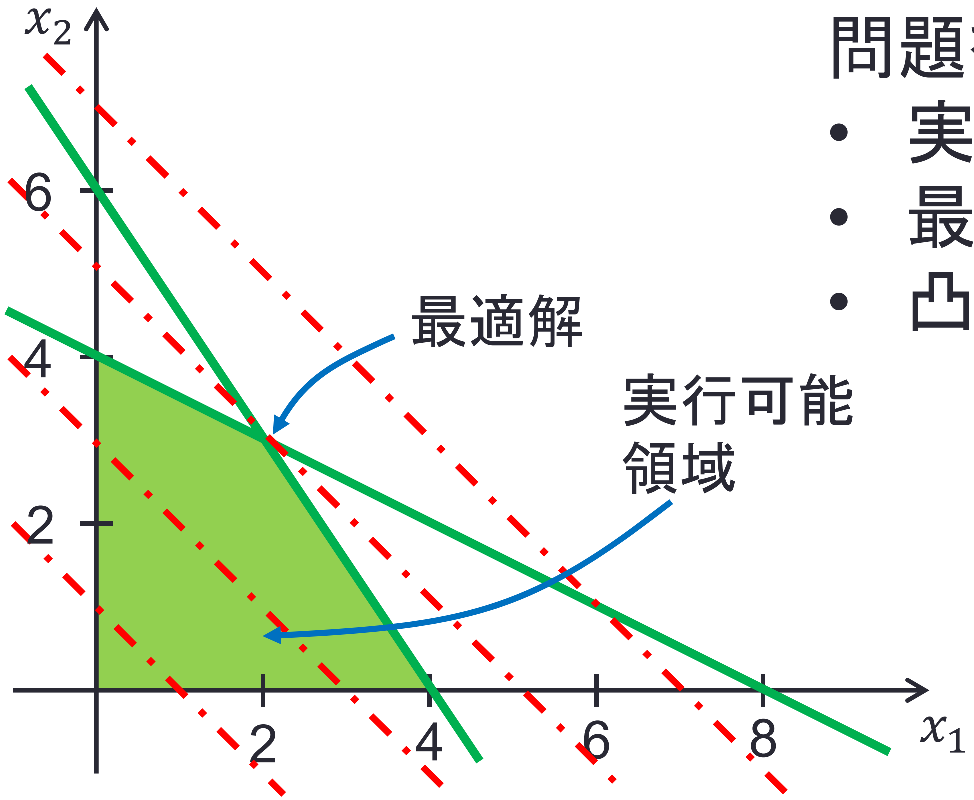
変数は
「不等号つき」「不等号なし」
どちらでもよい

2変数の線形計画問題(その1)

例題

$$
\begin{aligned}
&\text{最小化:}\ -x_1 - x_2 \\
&\text{条件:}\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\
&\qquad\quad x_1 + 2x_2 \le 8 \\
&\qquad\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

問題の性質を知るために，問題を図を使って表現する



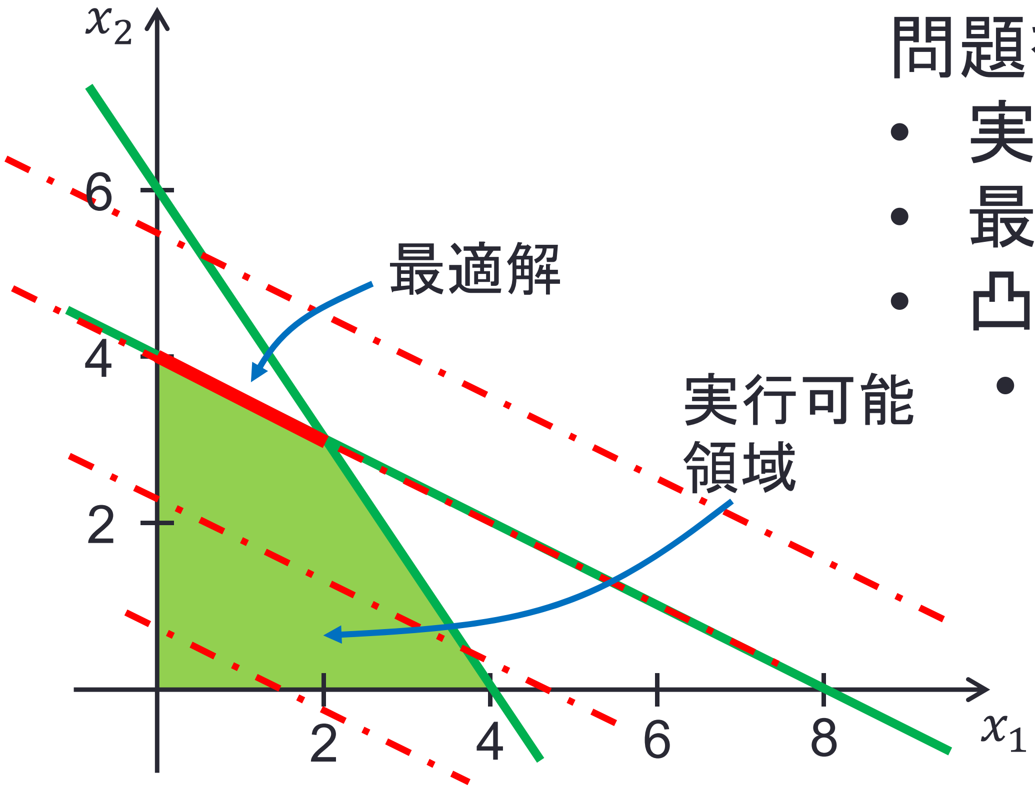
問題を図示してわかること

- 実行可能領域は平面上の凸多角形
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の頂点の1つは最適解

2変数の線形計画問題（その2）

例題

最小化： $-x_1 - 2x_2$
条件： $3x_1 + 2x_2 \leq 12$
$x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



問題を図示してわかること
- 実行可能領域は平面上の凸多角形
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の頂点の1つは最適解
  - 最適解が複数存在することもあり

線形計画問題の標準形

LPの不等式標準形

任意の形のLPを
扱うのは面倒
⇒　不等式標準形
（inequality standard form）

- ◆目的は最小化 (minimization)
- ◆制約式は不等式(inequality)
  「左辺≧右辺」の形
- ◆各変数は非負(nonnegative)

最小化　$c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

条件

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$$
$$\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ \ldots,\ x_n \geqq 0$$

不等式標準形への変形

命題: 任意のLPは不等式標準形に変換できる

次の4つの変換法を利用

【式の同値変形】 等式を二つの不等式で表現

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b,\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b$$

【目的関数の－１倍】 最大化から最小化へ

$$最大化\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \Longrightarrow \quad 最小化\ -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

【制約の－１倍】 不等式を“≦”から“≧”へ

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b \quad \Longrightarrow \quad -\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq -b$$

【差による表現】 非負制約のない変数を2つの非負変数で表現

$$x_j\ （非負制約なし） \quad \Longrightarrow \quad x_j = x_{j1} - x_{j2},\ x_{j1} \geq 0,\ x_{j2} \geq 0$$

不等式標準形への変形の例

最大化　$3x + 2y$
条件　$x + y = 1$
$x \geqq 0$

最大化　$3x + 2(y_1 - y_2)$
条件　$x + (y_1 - y_2) = 1$
$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化　$-3x - 2(y_1 - y_2)$
条件　$x + (y_1 - y_2) = 1$
$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化　$-3x - 2(y_1 - y_2)$
条件　$x + (y_1 - y_2) \leqq 1$
$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$
$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

最小化　$-3x - 2(y_1 - y_2)$
条件　$-x - (y_1 - y_2) \geqq -1$
$x + (y_1 - y_2) \geqq 1$
$x \geqq 0,\ y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0$

「差による表現」による変形の妥当性

x_j（非負制約なし） ⇒ $x_j = x_{j1} - x_{j2},\ x_{j1} \geq 0,\ x_{j2} \geq 0$

変換前の問題：P_1

P1とP2は本質的に等価

変換後の問題：P_2

$(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n)$：$P_1$の許容解

⇒ $(s_1, \ldots, s_{j1}, s_{j2}, \ldots, s_n)$：$P_2$の許容解，目的関数値同じ

ただし $s_{j1} = s_j,\ s_{j2} = 0$（$s_j \geqq 0$ のとき）

$s_{j1} = 0,\ s_{j2} = -s_j$（$s_j < 0$ のとき）

例：$(x, y) = (3, -2)$ は　$x + y = 1,\ x \geqq 0$ を満たす

⇒ $(x, y_1, y_2) = (3, 0, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1,\ x, y_1, y_2 \geqq 0$ を満たす

$(t_1, \ldots, t_{j1}, t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_2$の許容解

⇒ $(t_1, \ldots, t_{j1} - t_{j2}, \ldots, t_n)$：$P_1$の許容解，目的関数値同じ

例：$(x, y_1, y_2) = (2, 1, 2)$ は $x + (y_1 - y_2) = 1,\ x, y_1, y_2 \geqq 0$ を満たす

⇒ $(x, y) = (2, 1 - 2) = (2, -1)$ は　$x + y = 1,\ x \geqq 0$ を満たす

等式標準形

- LPの**等式標準形**

（equality standard form）

◆目的は**最小化**

◆制約は**等式(equation)**

◆各変数は**非負**

最小化 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

条件

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m$$

$$x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ \ldots,\ x_n\geqq 0$$

等式標準形への変形

命題2．2：任意のLPは等式標準形に変換できる

- 任意のLPは不等式標準形に変換できる（命題2．1）
- 不等式「左辺≧右辺」を等式へ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_{n+i} = b_i, \quad x_{n+i} \geq 0$$

新しい非負変数 x_{n+i} を利用

（スラック変数, slack variable）

$$\begin{aligned} &4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1 \\ &x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} &4x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ &x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0,\ x_4 \geqq 0 \end{aligned}$$

線形計画問題の双対問題

双対問題

- LPの最適値を下から見積もりたい
  （最適値の下界値の計算）

最小化　$-2x_1 - x_2 - x_3$

条件　$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$　①

$-2x_1 \qquad - 4x_3 \geqq -4$　②

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$　③

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

→ 制約を足し合わせてみる

- 目的関数≧②×3＋③＝ $-2x_1 - 3x_2 - 11x_3 \geqq -13$
- 目的関数≧①×0.5＋②×0.5＝ $-2x_1 - x_2 - 1.5x_3 \geqq -4$

より良い下界

双対問題

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$ ①

$-2x_1 \qquad - 4x_3 \geqq -4$ ②

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$ ③

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

より一般に，非負実数

y_1, y_2, y_3 を使うと

①×y_1＋②×y_2＋③×y_3

左辺：$(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3)x_1 + (-2y_1 - 3y_3)x_2 + (y_1 - 4y_2 + y_3)x_3$

右辺：$-4y_1 - 4y_2 - y_3$

$$\left.\begin{aligned} -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leqq -2 \\ -2y_1 \qquad - 3y_3 &\leqq -1 \\ y_1 - 4y_2 + y_3 &\leqq -1 \end{aligned}\right\}$$

が成り立つならば

目的関数≧左辺≧右辺

$= -4y_1 - 4y_2 - y_3$

双対問題

最も大きな下界値を求めたい⇒新たなLP

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & -4y_1 - 4y_2 - y_3 \\
\text{条件} & -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2 \\
 & -2y_1 \qquad\quad - 3y_3 \leqq -1 \\
 & \quad y_1 - 4y_2 + \ \ y_3 \leqq -1 \\
 & y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0
\end{array}
$$

もとの問題に対する
双対問題
(dual problem)

もとの問題・・・・主問題 (primal problem)

主問題と双対問題

主問題

最小化 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件

$$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$$

$$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$$

$$\cdots$$

$$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$$

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$$

双対問題

最大化 $b_1y_1+b_2y_2+\cdots+b_my_m$

条件

$$a_{11}y_1+a_{21}y_2+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$$

$$a_{12}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$$

$$\cdots$$

$$a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\cdots+a_{mn}y_m \leqq c_n$$

$$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$$

最小化 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$

条件 $A\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{b}$

$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{0}$

行列表現

最大化 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$

条件 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leqq \boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0}$

主問題と双対問題

性質：双対問題の双対問題は主問題に一致する

証明→レポート問題

手順（１）双対問題を不等式標準形に書き換え

（２）書き換えた問題の双対問題をつくる

（３）得られた双対問題を変換すると

もとの問題に一致することを確かめる.

等式標準形の双対問題

- LPの等式標準形

$$\text{最小化}\quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{条件}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = 1,2,..,m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...,n)$$

不等式標準形に変換

$$\text{最小化}\quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{条件}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i\,,\quad -\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq -b_i \quad (i = 1,2,..,m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,...,n)$$

等式標準形の双対問題

双対問題をつくる

最大化 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-b_i) y_i''$

条件 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i' + \sum_{i=1}^{m} (-a_{ij}) y_i'' \le c_j \quad (j = 1,2,..,n)$

$y_i' \ge 0, \quad y_i'' \ge 0 \quad (i = 1,2,\ldots,m)$

$y_i' - y_i''$ を非負制約なし変数 y_i に置き換え

最大化 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$

条件 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j \quad (j = 1,2,..,n)$

等式標準形のLPに対する双対問題

線形計画問題の諸定理

実行可能，実行不可能

定義：不等式標準形のLPに対し

- 実行可能(feasible)⇔許容解（実行可能解）が存在する
- 実行不可能(infeasible)⇔許容解（実行可能解）が存在しない

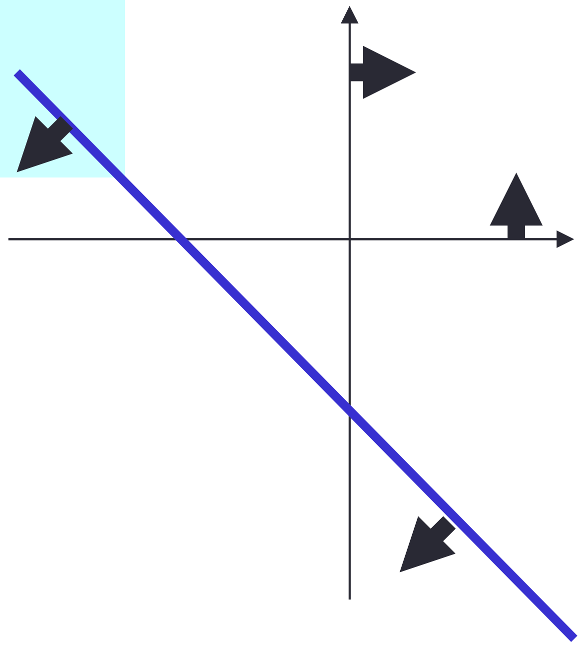
最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq -3$
$x, y \geqq 0$

実行可能

（1，1）は許容解

最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq 1$
$x, y \geqq 0$

実行不可能



有界, 非有界

定義：実行可能なLPは（最小化の場合)

- 有界(bounded)
  ⇔任意の許容解の目的関数値がある定数より大きい
- 非有界(unbounded)⇔目的関数値をいくらでも小さく出来る

最小化　x + 2y
条件　-x - y ≧ -3
x, y ≧ 0

有界

目的関数値≧0

最小化　- x - y
条件　x + y ≧ 0
x, y ≧ 0

非有界

任意の$\alpha > 0$に対し(α, α)は許容解

目的関数値$= -2\alpha$

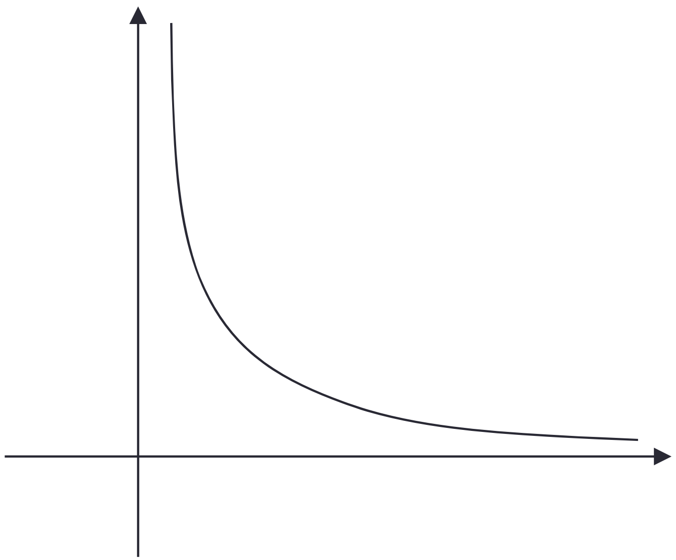
LPの基本定理

定理（基本定理, fundamental theorem）
任意のLPに対し、
実行可能かつ**有界** ⇒ **最適解**が存在

※非線形計画の場合は成り立つとは限らない！

最小化　y
条件　$xy \geqq 1$
$x, y \geqq 0$

最適値＝0
でも $y = 0$ なる許容解はない



弱双対定理

定理(弱双対定理, weak duality theorem):

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

主問題の目的関数値　　双対問題の目的関数値

弱双対定理の証明

シグマの順番を換える

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件

$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最大化　$b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件

$a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$

$\cdots$

$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_n \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

弱双対定理の系

系

主問題が非有界 ⇒ 双対問題は実行不可能

双対問題が非有界 ⇒ 主問題は実行不可能

証明: 対偶 （双対 : 実行可能⇒主 : 有界） を示す

双対問題が実行可能と仮定

$\mathbf{y}$: 双対問題の許容解、 $\alpha = \sum b_i y_i$

弱双対定理より、主問題の任意の許容解 $\mathbf{x}$ に対し

$$\sum c_j x_j \geqq \alpha \quad \therefore \ \text{主問題は有界}$$

弱双対定理の系

系

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解,

$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ を満たす

⇒ **x**: 主問題の最適解、**y**: 双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理を使って証明すること

弱双対定理の系

例

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件 $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$

$-2y_1 - 3y_3 \leqq -1$

$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$

$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$

$x = (2, 0, 0)$: 許容解　　$y = (3/5, 2/5, 0)$: 許容解

$-2 \times 2 - 0 - 0 = -4 = -4 \times (3/5) - 4 \times (2/5) - 0$

⇒ 系より、 x, y はそれぞれ最適解

レポート問題（締切：12月14日）

問1：

（1）右の線形計画問題を
不等式標準形に
書き直せ.

$$
\begin{aligned}
\text{最大化：}\ & 2x + 2y + 3z \\
\text{条件：}\ & 5x \qquad\qquad + 3z \leqq 8 \\
& \qquad\qquad\qquad 2z = 2 \\
& \qquad\quad 4y + z \geqq 9 \\
& \qquad\qquad x, y \geqq 0
\end{aligned}
$$

（2）右の線形計画問題を
不等式標準形および
等式標準形に
書き直せ.

$$
\begin{aligned}
\text{最大化：}\ & 3x + 6y \\
\text{条件：}\ & x + y = 2 \\
& x + 4y \leq 2 \\
& \qquad y \geqq 0
\end{aligned}
$$

レポート問題

問2：

(1) 下記の線形計画問題の実行可能領域を図示し，
　最適解を求めなさい．

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 3x_1 + 6x_2 \\
\text{条件} & x_1 + x_2 \geq 2 \\
 & x_1 + 4x_2 \geq 5 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

(2) 上記の線形計画問題の双対問題を求めなさい．

(3) 双対問題の実行可能領域を図示し，最適解を求めなさい．

問3：どのような線形計画問題に対しても，その双対問題の
　双対問題は元の問題（主問題）に一致する事を証明せよ．
　（ヒント：標準形の双対問題を書いて，さらにその双対問題を
　書けば分かる）