2022年度 オペレーションズ・リサーチ基礎 中間試験問題 [50点満点]

2023年1月12日(木)13時45分～15時15分（90分）

問1

(1)次の問題を数理計画問題として定式化せよ．定式化の際，変数の意味と各制約条件の意味を簡単に説明すること．なお，最適解を求める必要はない．

ヨーロッパのとあるワイン製造会社では，3種類のぶどうG1，G2，G3 を原材料として，赤，白，ロゼの3種類のワインを生産している．各ワインを1樽（たる）分だけ生産することによって得られる利益と，1樽分を生産するために必要なぶどうの量は表の通りである．ただし，各々のぶどうの最大供給量は決まっており，G1は7トン，G2は12トン，G3は15トンとなっている．このとき，総利益を最大にするような各ワインの生産量を決定せよ．なお，ワインの生産量は樽単位で設定する必要がある．つまり，生産量は1樽，2樽，3樽，... のように設定する必要があり，2.5樽や1.7樽のような中途半端の量の生産はできない．

ワインの種類	1樽分を生産するのに必要なぶどうの量（単位：トン）			1樽当りの利益（単位：1万ユーロ）
	G1	G2	G3	
赤	2	1	0	4
白	0	0	3	6
ロゼ	0	2	1	3

(2) 以下の線形計画問題を不等式標準形に書き直せ．結果のみでなく，その過程についても説明すること．なお，定式化の変形の過程では，定式化全てを書く必要はなく，変更した箇所のみ書けば十分である．

$$
\begin{array}{rl}
\text{最大化：} & 2x + 2y + 3z \\
\text{条件：} & 5x \qquad\quad + 3z \leqq 8 \\
& \qquad\qquad\quad 2z = 2 \\
& \qquad 4y + \ \ z \geqq 9 \\
& x,\ y \geqq 0
\end{array}
$$

（次ページにつづく）

問 2

次のような線形計画問題の主問題(P)と双対問題(D)を考える．

(P)	
最小化：	$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$
条件：	$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n\geq b_1$
	$\vdots$
	$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n\geq b_m$
	$x_1\geq 0,\ \ldots,\ x_n\geq 0$

(D)	
最大化：	$b_1y_1+\cdots+b_my_m$
条件：	$a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m\leq c_1$
	$\vdots$
	$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_m\leq c_n$
	$y_1,y_2,\ \ldots,\ y_m\geq 0$

(1) 線形計画問題の弱双対定理とは，次の定理である．

主問題(P)の任意の実行可能解 $(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$ と双対問題(D)の任意の実行可能解 $(y_1,y_2,\ldots,\ y_m)$ に対して，

$$c_1x_1+\cdots+c_nx_n\geq b_1y_1+\cdots+b_my_m$$

が成り立つ．

弱双対定理を用いて，以下を証明せよ：
主問題(P)のある実行可能解 $(x_1^*,\ x_2^*,\ldots,\ x_n^*)$ と双対問題(D)のある実行可能解 $(y_1^*,y_2^*,\ldots,\ y_m^*)$ に対して，

$$c_1x_1^*+\cdots+c_nx_n^*=b_1y_1^*+\cdots+b_my_m^*$$

が成り立つとき，$(x_1^*,\ x_2^*,\ldots,\ x_n^*)$ は主問題(P)の最適解である．

(2) 右の線形計画問題(P-1)について考える．

(P-1)		
最小化	$12x_1+4x_2+3x_3$	
条件	$4x_1+2x_2$	≥ 1
	$6x_1\ +x_2\ +x_3$	≥ 1
	$x_1\geq 0,x_2\geq 0,x_3\geq 0$	

(2-1) 問題(P-1)の双対問題(D-1)を書け．
結果のみ書けば良い．

(2-2) 問題(P-1)の解$(x_1,\ x_2,x_3)$と双対問題(D-1)の解 (y_1,y_2) に対する**相補性条件**を書け．
また，これらの解が(P-1)および(D-1)の最適解であるための，**相補性条件を用いた必要十分条件**を書け．結果のみ書けば良い．

(2-3) 問題(P-1)の実行可能解$(x_1,\ x_2,x_3)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$および$\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4},0\right)$ のそれぞれに対し，相補性条件を満たす双対問題(D-1)の解 (y_1,y_2) を求めよ．**計算の過程も書け**．

(2-4) 小問(2-2)，(2-3)の結果を使って，(P-1)の最適解をひとつ求めよ．
また，求めた解が最適解である理由を，小問(2-2)，(2-3)の結果をふまえて説明せよ．

（次ページにつづく）

問３：

(P) 最小化 $-2x_1+3x_2$
条件
$$-x_1-x_2\geq 1$$
$$-2x_1-x_2\geq 2$$
$$-x_1-2x_2\geq -3$$
$$x_1\geq 0, x_2\geq 0$$

(1) 右の線形計画問題(P)が実行可能解をもつか否かを，単体法の一段階目を用いて判定したい.

(1-1) 問題(P)に対する補助問題を書け．結果のみ書けば良い.

(1-2) 補助問題に対応する初期辞書を書け．結果のみ書けば良い.

(1-3) 初期辞書は許容辞書ではない．初期辞書に対してピボット演算を１回適用し，許容辞書を作成せよ．その際，どの**基底変数・非基底変数を入れ替えたのか**，**説明**すること．なお，新しい辞書を導出する過程を説明する必要はない.

(2) 右の許容辞書に対し，単体法を適用して最適解を求めたい.

$$\begin{aligned}
z &= 3 + x_1 - 2x_3 - 4x_4\\
x_2 &= 2 - x_1 - x_3 - x_4\\
x_5 &= 2 - 2x_1 - 2x_3\\
x_6 &= 1 - x_3 - 2x_4
\end{aligned}$$

(2-1) この辞書にピボット演算を１回適用して得られる辞書，およびその際に**入れ替えた基底変数・非基底変数**を書け．ただし，**最小添字規則を使う**こと．なお，新しい辞書を導出する過程を説明する必要はない.

(2-2) 小問(2-2)で得られた辞書を見て，この辞書に対応する基底解が最適解であると断定できるか？「はい」または「いいえ」の形で答えよ．また，その**理由を説明**せよ.（ヒント：辞書を更に変形する必要はない）

問４：

とあるナップサック問題を，分枝限定法を用いて解いている過程で現れた，以下の２つの部分問題(K1)，(K2)について考える.

(K1) 最大化 $7x_1+10x_2+6x_3+x_4+2x_5$
条件 $x_1+2x_2+3x_3+x_4+4x_5\leq 5$
$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in\{0,1\}$

(K2) 最大化 $15x_1+6x_2+5x_3+2x_4+3x_5$
条件 $2x_1+x_2+3x_3+2x_4+4x_5\leq 8$
$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\in\{0,1\}$

(1) 部分問題(K1)，(K2) の緩和問題（連続ナップサック問題）の最適解と最適値（最適解の目的関数値）を求めよ．答えのみ書けば良い.

(2) 現時点で**目的関数値が 25 の暫定解が得られている**ものとする．小問(1)の結果に基づき，部分問題(K1)，(K2)に対して限定操作が適用可能か否かについて，「はい」または「いいえ」の形で答えよ．また，その**理由を説明**せよ.