2022 年度 オペレーションズ・リサーチ基礎 期末試験問題 コメント

2023 年 2 月 6 日(月)13 時 45 分～15 時 15 分（90 分)

問 1　[22 点]

(1) $G=(V,E)$は有向グラフとし，各枝$e\in E$の長さは$l(e)$で与えられるとする．

(1-1) 路Pは頂点sから頂点tへの最短路とする．また，Pは頂点uと頂点vを通過し，uの後にvが現れるとする．このとき，Pに含まれるuからvへの部分路P'は，頂点uからvへの最短路である．このことを証明せよ．(8 点)

（コメント）簡単な証明問題のつもりでしたが，あまり出来が良くなかった．

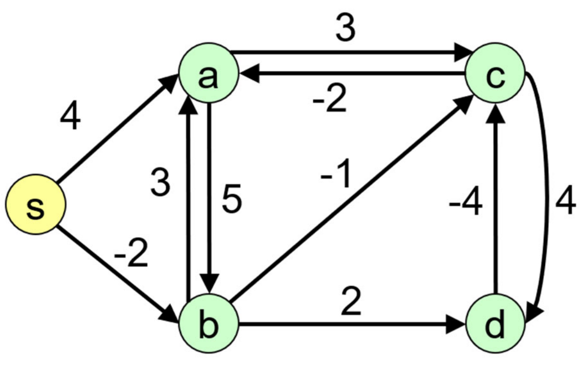
- u から v への最短路の存在性を仮定した証明は減点（授業中にも何度か注意済み）
- 路を表す記号と，路の長さを表す記号をきちんと区別する．

(1-2) グラフGの特定の頂点sから各頂点への最短路が存在するものとし，頂点sからvへの最短路の長さを$d(v)$とおく．このとき，グラフの任意の枝(a,b)に対して，不等式 $d(b)\le d(a)+\ell(a,b)$ が成り立つ．これを証明せよ．(8 点)

（コメント）簡単な証明問題のつもりでしたが，あまり出来が良くなかった．

- a から b への最短路の存在性を仮定した証明は減点（授業中にも何度か注意済み）
- s から a への最短路に，枝(a, b)を加えて出来る路が，s から b への路であることを明記する．
- 路を表す記号と，路の長さを表す記号をきちんと区別する．

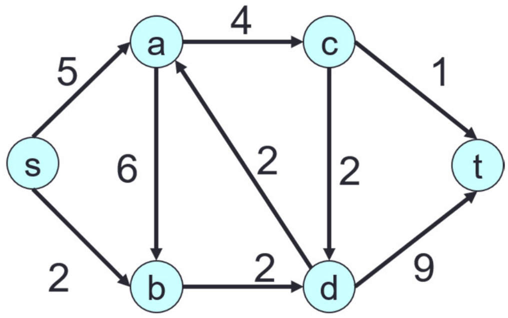
(2) 以下のグラフにおける頂点sから各頂点への最短路の長さを，ベルマン・フォードのアルゴリズムを用いて計算せよ．解答用紙には右図のような表を書いて，各マス目に適切な数字を入れること．計算の過程を書く必要はない．(7 点)



	k=0	1	2	3	4	5
s	0					
a	+∞					
b	+∞					
c	+∞					
d	+∞					

（コメント）　これは多くの受講生が出来ていた．

問 2 [28 点]



(1) 右図のグラフにおける最大流問題を考える．各枝に付随する数字は，その枝の容量を表す．

(1-1) 各頂点における**流量保存条件**を書け．ただし，各枝(u,v)のフローを表す変数をx_{uv}，総流量を表す変数をfとすること．答えのみ書けば良い．(3 点)

（コメント）これは簡単．多くの受講生が出来ていた．

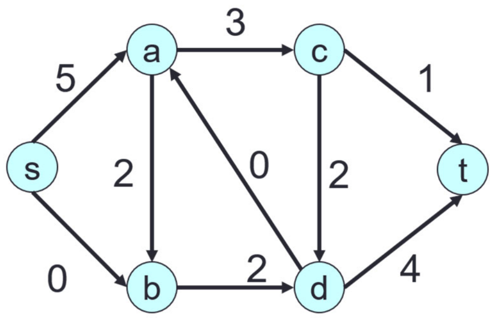
(1-2) カット$(\{s,a,c\},\{b,d,t\})$について考える．$\{s,a,c\}$ から $\{b,d,t\}$ に向かうフローの合計値をP，$\{b,d,t\}$ から$\{s,a,c\}$に向かうフローの合計値をQとおくと，$P-Q$ は総流量 f に等しい．このことを，小問(1-1)の結果を用いて証明せよ．(3 点)

（コメント）これも多くの受講生が出来ていた．

よく理解せず，式を足し引きしている解答は減点．

(1-3) 右図は最大フローを表す．各枝に付随する数字は，その枝のフローを表す．このフローに関する残余ネットワークを書け．答えのみ書けば良い．(4 点)

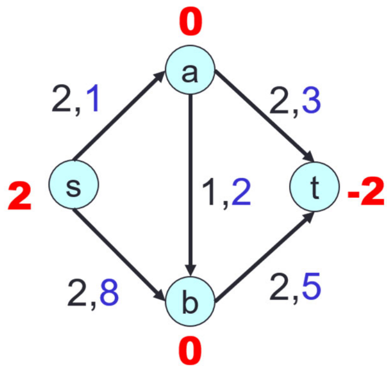
（コメント）これも多くの受講生が出来ていた．



(1-4) 最大フローに関する残余ネットワークを使うと，最小カットが求められる．どのようにすれば求められるか，簡単に(多くても 100 字程度で)説明せよ．また，そのやり方に基づき，小問(1-3)の残余ネットワークを使って最小カットを求めよ．(6 点)

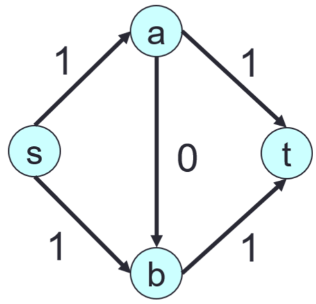
（コメント）S と T の定義をきちんと書いていないと減点．

(2) 右図のグラフにおける最小費用流問題を考える．各枝に付随する数字のうち，左側は枝の容量，右側は枝の費用を表す．また，各頂点に付随する数字は，その頂点における需要供給量を表す．



(2-1) 右下図のフローに関する残余ネットワークを書け．答えのみ書けば良い．(3 点)

(コメント) これは簡単．



(2-2) 小問(2-1)の残余ネットワークに負閉路が存在するか否かを答えよ．存在する場合は，その負閉路を示すとともに，それを用いてフローを更新せよ．(2 点)

(コメント) 負閉路は 2 種類存在する．これも簡単．

(2-3) 右上のフローに関するポテンシャルp_s, p_a, p_b, p_tの満たすべき条件を，等式・不等式の形で具体的に書け．答えのみ書けば良い．(4 点)

(コメント) 不等式が 9 本．整理すると，等式が 4 本，不等式が 1 本．

不等号として，等号無しの不等号を使っている間違いが多い．

(2-4) 小問(2-3)の結果に基づき，ポテンシャルが存在するか否かを答えよ．さらに，

- 存在する場合は，そのようなポテンシャルを一つ求めよ．また，全ての制約を満たしていることを確認すること．
- 存在しない場合は，小問(2-3)の結果を使って，その理由を説明せよ．

(3 点)

(コメント)「負閉路が存在する」と書いてある時点で答えは明らか．

問 3 : [26 点]

(1) 制約つき非線形計画問題

$$\text{最小化} \quad (x+4)^2 + 2y^2 \qquad \text{条件} \quad -x \le y \le x$$

の最適解を求めたい．この問題に対しては，ベクトル(x,y)が(大域的)最適解であることと，KKT条件を満たすことが必要十分である．

(1-1) この問題に対する KKT 条件を具体的に書け(ヒント:数式のみを書いたのでは不十分)(6 点)

(コメント) ヒントに書いたように，4 種類の等式・不等式条件を書いただけでは不十分.「あるλ_1, λ_2が存在して，以下の等式・不等式を満たす」という形に書く必要あり(授業中にもこの点を強調した)

(1-2) KKT 条件を用いて，この問題の最適解を**全て**求めよ．**計算の過程も書くこと**．(12 点)

(コメント) λ_1, λ_2 の値の場合分けにより，4 つの場合を考えるのが分かりやすい．授業のスライド参照．解の実行可能性を確認せず，間違った答えになっている解答が多い．

(2) 関数 $f(x,y)$ の停留点(a,b)におけるヘッセ行列が下記のとき，その停留点が極小解か否かを判定せよ．また，その理由も書くこと．理由を書くときは，**「2 次の最適性条件（必要条件）」**，**「2 次の最適性条件（十分条件）」**，**「正定値」**，**「半正定値」というキーワードのうち，2 つ以上**を用いること．(8 点)

(2-1) 停留点(a,b)におけるヘッセ行列が$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

(2-2) 停留点(a,b)におけるヘッセ行列が$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

(コメント)「必要条件」の使い方を分かっていない受講生が多い．授業中にも説明した．

問 4：[24 点]

(1) 関数$f(x,y)=x^2+2y^2$の制約なし最小化問題を最急降下法で解くことを考える．

(1-1) $(x,y)=(1,1)$ における関数 f の**最急降下方向**を求めよ．また，最急降下方向と勾配ベクトルの関係を述べよ．(4 点)

(コメント) これは簡単.

(1-2) $(x,y)=(1,1)$ における直線探索の問題を具体的に書け．さらに，この問題を正確に解いてステップサイズαを求めよ．(ヒント：分数になる)　(8 点)

(コメント) 直線探索の問題を具体的に書いていない解答が多い.

αの計算は微分を使うと楽だったかも.

(2) 関数 $f(x,y)=\frac{1}{3}x^3+y^2-xy$の制約なし最小化問題をニュートン法で解くことを考える．

(2-1) 関数 f の勾配ベクトルとヘッセ行列を計算せよ．結果のみ書けば良い．(2 点)

(2-2) $(x,y)=(0.5,1)$ における勾配ベクトルとヘッセ行列を計算せよ．結果のみ書けば良い．(2 点)

(コメント) これは簡単.

(2-3) 初期点を$(x,y)=(0.5,1)$としてニュートン法を適用したときの次の点を計算せよ．

計算の過程も書くこと．(ヒント：正則行列$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$の逆行列は $\frac{1}{ac-b^2}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$)　(4 点)

(コメント) ニュートン法の更新式を覚えていれば，簡単な計算問題のはずなのに，出来ていない解答が多い.

(2-4) 初期点を $(x,y)=(1/4,2)$ としてニュートン法を適用したときの大きな問題点を簡単に(多くても 100 字程度で)説明せよ．(4 点)

(コメント)「ヘッセ行列の逆行列が存在しない」というのがポイント