

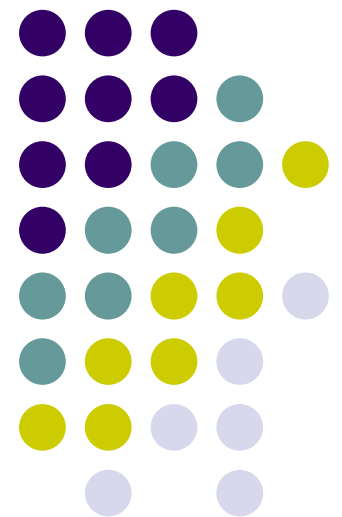
# 数理計画法 (数理最適化) 第5回

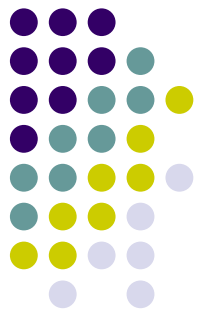
## 2段階単体法

担当： 塩浦昭義

(情報科学研究科 准教授)

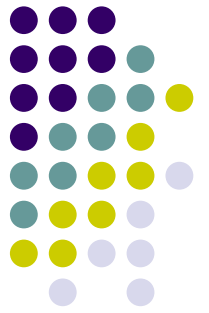
[shioura@dais.is.tohoku.ac.jp](mailto:shioura@dais.is.tohoku.ac.jp)





# 前回提出のレポート問題 問1 へのコメント

- 自分の証明が間違っているかどうか，把握してください
- 誰が読んでもわかるように，曖昧なところがないように
  - 数式をうまく利用しましょう
- 良くある間違いの例
  - 「主問題の最適解を  $x$  とする」
    - 最適解が存在するとは限らないことに注意
  - 「 $\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$  ならば  $\sum_{j=1}^n c_j x_j$  が最小なので， $x$  は最適解」
    - $\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i$  ならば  $\sum_{j=1}^n c_j x_j$  が最小，と言うことを示すのが，証明で一番大事なところ

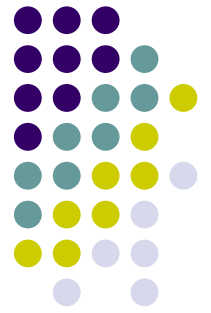


# 今後の予定

- 11/6 研究室見学会のため**休講**
- 11/13 第6回目 --- 組合せ最適化その1
- 11/20 第7回目 --- ネットワーク最適化その1
- **11/27 第8回目 --- 中間試験**

**※レポート未提出の場合、中間試験は受験できません。**

# 単体法の問題点

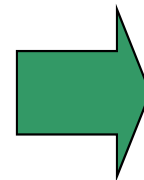


- 反復回数は有限か？

**巡回(cycling)** — 同じ辞書が繰り返し現れること

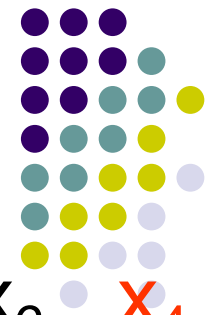
- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

$$\begin{array}{l} \text{最小化} \quad -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{条件} \quad -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ \quad \quad -2x_1 \quad \quad -4x_3 \geq -4 \\ \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 = 4 - 2x_1 \quad \quad -4x_3 \end{array}$$

# 巡回の例



	$x_1$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	-1	2
$x_4$	0	-2	1
$x_5$	0	-3	-1
$x_6$	0	5	-3

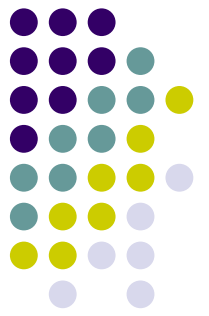
	$x_1$	$x_6$	$x_3$
$z$	0	$7/3$	$-2/3$
$x_4$	0	$-1/3$	$-1/3$
$x_5$	0	$-14/3$	$1/3$
$x_2$	0	$5/3$	$-1/3$

	$x_1$	$x_6$	$x_4$
$z$	0	2	-1
$x_3$	0	-1	-1
$x_5$	0	-3	2
$x_2$	0	1	-1

	$x_5$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	$1/3$	$7/3$
$x_4$	0	$2/3$	$5/3$
$x_1$	0	$-1/3$	$-1/3$
$x_6$	0	$-5/3$	$-14/3$

	$x_5$	$x_2$	$x_4$
$z$	0	-1	-1
$x_3$	0	2	5
$x_1$	0	-1	-2
$x_6$	0	-1	-3

	$x_5$	$x_6$	$x_4$
$z$	0	$-2/3$	$1/3$
$x_3$	0	$1/3$	$-5/3$
$x_1$	0	$-1/3$	$2/3$
$x_2$	0	$-1/3$	$-1/3$

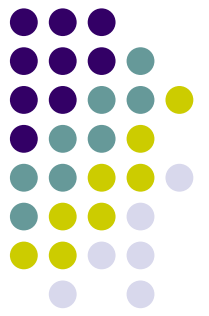


# 単体法と巡回

- 基底・非基底変数が決まると、辞書は一意に定まる
- 基底・非基底変数の組合せは有限個
  
- 単体法は辞書を繰り返し生成する
- 単体法が終了しない→辞書が無限に生成される
  - 同じ辞書が何回も現れる
  - 巡回が起こっている

注意：巡回が起こっているときは  
目的関数値が変化しない

# 最小添字規則



ピボット演算のとき、

最小添字規則 (smallest subscript rule) を適用

⇒ 有限反復で終了

基底に入る  
変数の候補

- ステップ1にて **係数が負の非基底変数** が複数存在

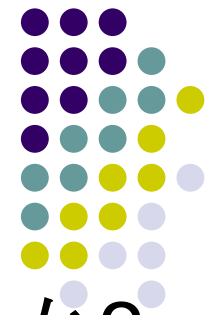
⇒ **添字最小** のものを選択

基底から出る  
変数の候補

- ステップ2にて **値が0に減少する基底変数** が複数存在

⇒ **添字最小** のものを選択

# 最小添字規則の適用例



入る変数の候補

$x_1$  はどれだけ増やせるか?

出る  
変数  
の候補

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
z	0	-1	2	-1
$x_4$	0	-2	1	-1
$x_5$	0	-3	-1	-1
$x_6$	0	5	-3	2

$$x_4: 0 \rightarrow 0 - 2\alpha$$

$$x_5: 0 \rightarrow 0 - 3\alpha$$

$$x_6: 0 \rightarrow 0 + 5\alpha$$

$\therefore \alpha$  は最大 0

そのとき  $x_4 = x_5 = 0$

注意:  $x_6$  は増加するので、

出る変数の候補ではない!



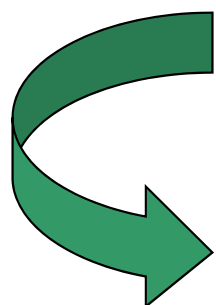
# 最小添字規則の適用例(つづき)



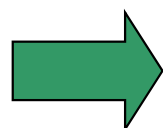
入る変数の候補

出る変数の候補

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$z$	0	-1	2	-1
$x_4$	0	-2	1	-1
$x_5$	0	-3	-1	-1
$x_6$	0	5	-3	2



	$x_4$	$x_2$	$x_3$	
$z$	0	1/2	3/2	-1/2
$x_1$	0	-1/2	1/2	-1/2
$x_5$	0	3/2	-5/2	1/2
$x_6$	0	-5/2	-1/2	-1/2



最適

	$x_4$	$x_2$	$x_1$	
$z$	0	1	1	1
$x_3$	0	-1	1	-2
$x_5$	0	1	-2	-1
$x_6$	0	-2	-1	1



# 2段階単体法

## 単体法の問題点

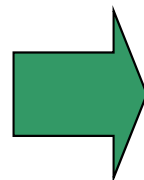
- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化  $-2x_1 - x_2$

条件  $-2x_1 - x_2 \geq 3$

$-2x_1 + 3x_2 \geq -4$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



$z = 0 - 2x_1 - x_2$

$x_3 = -3 - 2x_1 - x_2$

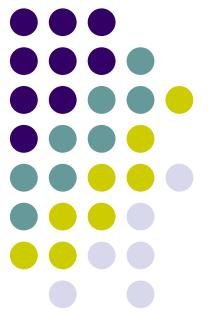
$x_4 = 4 - 2x_1 + 3x_2$

実は実行不可能なLP

基底解(0,0,-3,4)は  
許容解でない

- そもそも、LPの実行可能、不可能はどうやって判定する？

# 2段階単体法の流れ



- 任意のLPに適用可、実行可能性も判定
- 単体法を2回使用

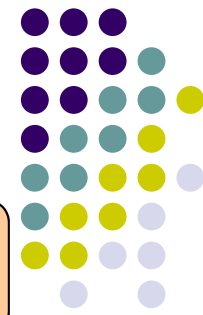
## 1段階目: 実行可能性の判定

- **補助問題**を作成
  - 単体法を適用、元の問題の実行可能性を調べる
  - 許容解をもたない⇒終了
  - 許容解をもつ⇒許容辞書を出力、2段階目へ

## 2段階目: 非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

# 補助問題の作り方



元の問題



補助問題

人工変数

最小化  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

条件  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

最小化  $x_a$

条件  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_a \geq b_1$

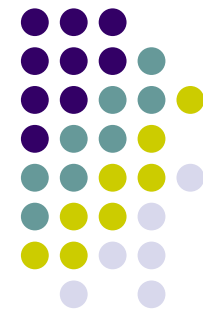
...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_a \geq b_m$

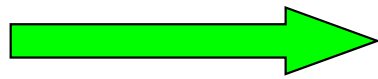
$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_a \geq 0$

- 大きな  $x_a$  に対して  $(x_1, \dots, x_n, x_a)$  は許容解
- 元の問題が実行可能  $\Leftrightarrow$  補助問題の最適値 = 0
- $(x_1, \dots, x_n)$ : 元の問題の許容解  
 $\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n, 0)$ : 補助問題の許容解

# 補助問題の解き方(その1)



元問題



補助問題

最小化  $-x_1 - 2x_2$

条件  $-x_1 - x_2 \geq -1$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

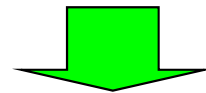
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

最小化  $x_a$

条件  $-x_1 - x_2 + x_a \geq -1$

$$x_1 + x_2 + x_a \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_a \geq 0$$



初期辞書

$$z_a = \quad \quad \quad x_a$$

$$z = \quad -x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 + x_a$$

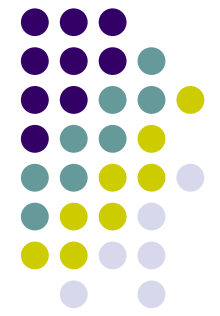
$$x_4 = -1 + x_1 + x_2 + x_a$$

元問題の目的関数も追加

負の値なので  
許容辞書ではない



# 補助問題の解き方(その2)



許容でない初期辞書

→ ピボット演算により許容辞書へ

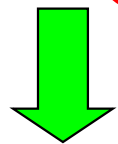
$$z_a = 0 \quad x_a$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 + x_a$$

$$x_4 = -1 + x_1 + x_2 + x_a$$

- 非基底変数  $x_a$  を基底に入れる
- 基底変数の式の定数項を比較
- 定数項最小の基底変数を  
基底から出す



$x_a$  と  $x_4$  を入れ替え

⇒ 許容辞書が得られる

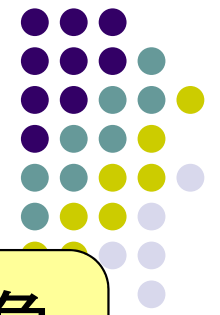
$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

# 補助問題の解き方(その3)



許容辞書が得られた

→ 単体法で最適解を求める

係数が全て非負  
なので最適

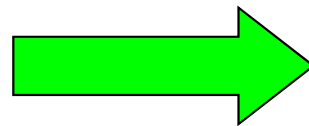
$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$x_1$  と  $x_a$  を  
入れ替え



$$z_a = 0 + x_a$$

$$z = -1 + x_a - x_2 - x_4$$

$$x_3 = 0 + 2x_a - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_a - x_2 + x_4$$

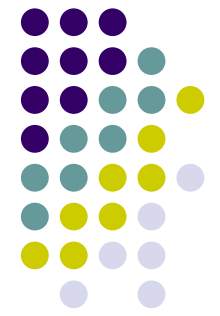
• 補助問題の最適値  $z_a = 0 \Rightarrow$  元問題は実行可能

• 現在の基底解  $(1, 0, 0, 0)$ : 元問題の許容解

•  $x_a$  が非基底変数

$\Rightarrow$  最終辞書から  $x_a, z_a$  を削除すると元問題の許容辞書

# 補助問題の解き方(その4)



最終辞書で  $x_a$  が基底に入っている場合は？

係数が全て非負なので最適

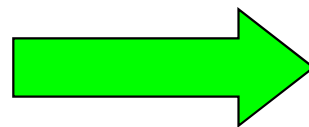
$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$x_1$  と  $x_3$  を  
入れ替え



$$z_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$z = -1 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 - \frac{1}{2}x_4$$

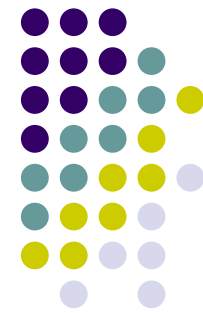
$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 - x_2 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

元問題の許容辞書をどうやって求めるか？



# 補助問題の解き方(その5)



最適辞書において  $x_a$  が基底に入っている

→ ピボット演算で  $x_a$  を基底から出す

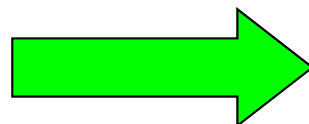
$$z_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$z = -1 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 - x_2 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$x_3$  と  $x_a$  を  
入れ替え



$$z_a = 0 + x_a$$

$$z = -1 + x_a - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_a - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 + 2x_a - x_4$$

$x_a$  が非基底にある

⇒  $x_a, z_a$  を削除すると

元問題の許容辞書

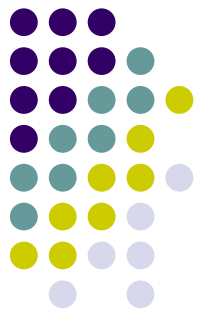
係数が非ゼロの  
変数と  $x_a$  を入れ替え

$$z = -1 - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

# 2段階単体法の2段階目



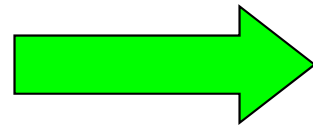
1段階目で得られた許容辞書に  
単体法を適用

$$z = -1 - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

$x_2$  と  $x_1$  を  
入れ替え

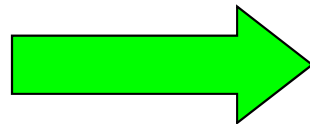


$$z = -2 + x_1 - 2x_4$$

$$x_2 = 1 - x_1 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

$x_4$  と  $x_3$  を  
入れ替え



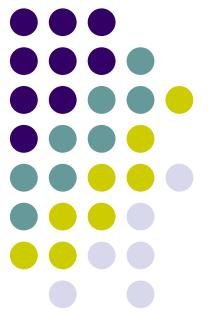
$$z = -2 + x_1 + 2x_3$$

$$x_2 = 1 - x_1 - x_3$$

$$x_4 = 0 - x_3$$

最適解  $(0, 1, 0, 0)$  が得られた

# 2段階単体法の流れ



- 入力: 不等式標準形のLP

## 1段階目: 実行可能性の判定

- 補助問題に単体法を適用、

元問題の実行可能性を調べる

許容解をもたない  $\Rightarrow$  終了

許容解をもつ  $\Rightarrow$  許容辞書を出力、2段階目へ

## 2段階目: 非有界性判定、最適解の検出

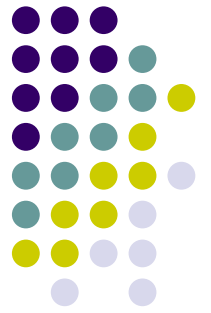
- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

非有界  $\Rightarrow$  終了

有界  $\Rightarrow$  最適解を出力

∴ 実行可能で有界なLPは最適解をもつ(基本定理)

# 双対定理



定理2.3 (双対定理, duality theorem) :  
主問題または双対問題が最適解をもつ  
⇒ 他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

以下では、具体例を使って証明の流れを説明する



# 双対定理の証明(その1)

## 主問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} & -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{条件} & -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\ & -2x_1 \quad \quad - 4x_3 \geq -4 \\ & 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

## 初期辞書

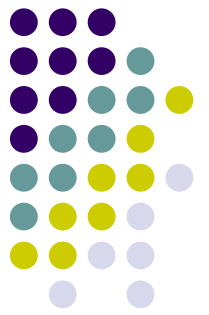
$$\begin{aligned} \text{最小化} & z \\ \text{条件} & z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ & x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ & x_5 = 4 - 2x_1 \quad \quad - 4x_3 \\ & x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \text{最大化} & -4y_1 - 4y_2 - y_3 \\ \text{条件} & -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2 \\ & -2y_1 \quad \quad - 3y_3 \leq -1 \\ & y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- 主問題のスラック変数
  - 主問題の制約
  - 双対問題の変数
- の間の1対1対応

$$\begin{aligned} x_4 & \leftrightarrow \text{第1制約} \leftrightarrow y_1 \\ x_5 & \leftrightarrow \text{第2制約} \leftrightarrow y_2 \\ x_6 & \leftrightarrow \text{第3制約} \leftrightarrow y_3 \end{aligned}$$



# 双対定理の証明(その2)

## 主問題

$$\begin{aligned}
 &\text{最小化} && -2x_1 - x_2 - x_3 \\
 &\text{条件} && -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\
 &&& -2x_1 \quad \quad - 4x_3 \geq -4 \\
 &&& 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1 \\
 &&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 初期辞書

$$\begin{aligned}
 &\text{最小化} && z \\
 &\text{条件} && z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
 &&& x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
 &&& x_5 = 4 - 2x_1 \quad \quad - 4x_3 \\
 &&& x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \\
 &&& x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

主問題の最適解は

$$x_1^* = 2, x_2^* = 0, x_3^* = 0, \text{最適値} = -4$$

## 最終辞書

$$\begin{aligned}
 z &= -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5 \\
 x_1 &= 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5 \\
 x_3 &= 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5 \\
 x_6 &= 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 x_4 & & x_5 & & x_6 \\
 \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
 y_1^* = \frac{3}{5}, & y_2^* = \frac{2}{5}, & y_3^* = 0
 \end{array}$$

が双対問題の許容解,  
 目的関数值 = -4

となることを示せば証明終了(弱双対定理より)



# 双対定理の証明(その3)

$$\begin{array}{ccc} x_4 & & x_5 & & x_6 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_1^* = \frac{3}{5}, & y_2^* = \frac{2}{5}, & y_3^* = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 & & x_3 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_4^* = 0, & y_5^* = \frac{1}{5}, & y_6^* = 0 \end{array}$$

が双対問題の許容解,  
目的関数値 = -4

と便宜上おく

となることを示す

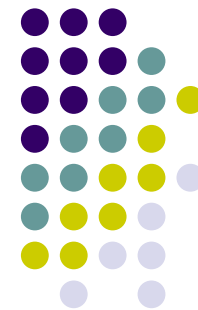
最終辞書

$$\begin{aligned} z &= -4 + \boxed{3/5}x_4 + \boxed{1/5}x_2 + \boxed{2/5}x_5 \\ x_1 &= 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5 \\ x_3 &= 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5 \\ x_6 &= 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5 \end{aligned}$$

最終辞書なので,  
z の式の係数は非負  
→  $y_i^*$  はすべて非負

z の式の右辺を書き換える

$$\begin{aligned} z &= -4 + (y_1^*x_4 + y_5^*x_2 + y_2^*x_5) + (y_4^*x_1 + y_6^*x_3 + y_3^*x_6) \\ &= -4 + y_4^*x_1 + y_5^*x_2 + y_6^*x_3 + y_1^*x_4 + y_2^*x_5 + y_3^*x_6 \end{aligned}$$



# 双対定理の証明(その4)

## 最終辞書

$$z = -4 + y_4^*x_1 + y_5^*x_2 + y_6^*x_3 + y_1^*x_4 + y_2^*x_5 + y_3^*x_6$$
$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$
$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$
$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

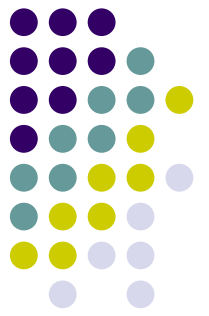
$(x_1, x_2, \dots, x_6, z)$ は  
最終辞書の解  $\leftrightarrow$  初期辞書の解

## 初期辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

初期辞書の4つの式を  
最終辞書のzの式に代入





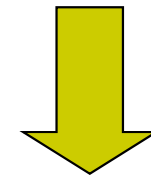
# 双対定理の証明(その5)

## 最終辞書の $z$ の式

$$\text{左辺} = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= -4 + \{y_1^*(4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ &\quad + y_2^*(4 - 2x_1 - 4x_3) \\ &\quad + y_3^*(1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3)\} \\ &\quad + (y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3) \\ &= (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*) \\ &\quad + (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)x_1 \\ &\quad + (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*)x_2 \\ &\quad + (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)x_3 \end{aligned}$$

この式は恒等式,  
任意の  $x_1, x_2, x_3$  に対して成り立つ  
→ 両辺の各項の  
係数, 定数は等しい



$$\begin{aligned} 0 &= (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*) \\ -2 &= (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*) \\ -1 &= (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*) \\ -1 &= (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*) \end{aligned}$$



# 双対定理の証明(その6)

$$0 = (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*) \longrightarrow -4y_1^* - 4y_2^* - y_3^* = -4$$

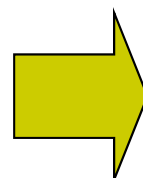
双対問題において

$(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ の目的関数値 = -4

$$-2 = (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)$$

$$-1 = (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*)$$

$$-1 = (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)$$



$y_4^*, y_5^*, y_6^*$ は非負なので

$$-2 \geq -2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*$$

$$-1 \geq -2y_1^* - 3y_3^*$$

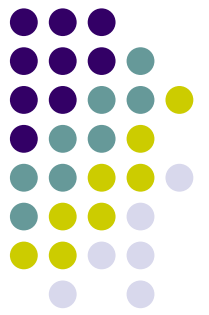
$$-1 \geq y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*$$

$(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ は

双対問題の許容解

最大化  $-4y_1 - 4y_2 - y_3$   
条件  $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$   
 $-2y_1 - 3y_3 \leq -1$   
 $y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1$   
 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

双対定理の証明終わり



# レポート問題

問1: 右の辞書に最小添字規則を適用して解きなさい.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$z$	0	-1	2	-1
$x_4$	6	-2	2	0
$x_5$	3	-1	-1	2
$x_6$	3	-1	-1	-1

問2: 次の線形計画問題を二段階単体法で解きなさい.

(a) 最小化  $-3x_1 - 2x_2$   
条件  $2x_1 - x_2 \geq -1$   
 $-x_1 + 2x_2 \geq 4$   
 $-x_1 - x_2 \geq -2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(b) 最小化  $-3x_1 - 2x_2$   
条件  $2x_1 - x_2 \geq -1$   
 $-x_1 + 2x_2 \geq 0$   
 $x_1 + x_2 \geq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

問3: 講義に対する感想、意見、要望を自由に書いてください.