数理計画法
（数理最適化）第5回

2段階単体法

担当： 塩浦昭義
(情報科学研究科 准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

前回提出のレポート問題 問1へのコメント

- 自分の証明が間違っているかどうか，把握してください
- 誰が読んでもわかるように，曖昧なところがないように
  - 数式をうまく利用しましょう
- 良くある間違いの例
  - 「主問題の最適解を x とする」
    - 最適解が存在するとは限らないことに注意
  - 「$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ ならば $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ が最小なので，x は最適解」
    - $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ ならば $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ が最小，と言うことを示すのが，証明で一番大事なところ

今後の予定

- 11/6　研究室見学会のため休講
- 11/13 第6回目 --- 組合せ最適化その1
- 11/20 第7回目 --- ネットワーク最適化その1
- 11/27 第8回目 --- 中間試験

※レポート未提出の場合，中間試験は受験できません.

単体法の問題点

- 反復回数は有限か？

  巡回(cycling)　ー　同じ辞書が繰り返し現れること

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化　$-2x_1 - x_2 - x_3$

条件　$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq 3$

$-2x_1 \qquad - 4x_3 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x3 \geqq 0$

⇒

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3$

巡回の例

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_1	x_6	x_3
z	0	7/3	-2/3	1/3
x_4	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_5	0	-14/3	1/3	-5/3
x_2	0	5/3	-1/3	2/3

		x_1	x_6	x_4
z	0	2	-1	-1
x_3	0	-1	-1	-3
x_5	0	-3	2	5
x_2	0	1	-1	-2

		x_5	x_2	x_3
z	0	1/3	7/3	-2/3
x_4	0	2/3	5/3	-1/3
x_1	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_6	0	-5/3	-14/3	1/3

		x_5	x_2	x_4
z	0	-1	-1	2
x_3	0	2	5	-3
x_1	0	-1	-2	1
x_6	0	-1	-3	-1

		x_5	x_6	x_4
z	0	-2/3	1/3	7/3
x_3	0	1/3	-5/3	-14/3
x_1	0	-1/3	2/3	5/3
x_2	0	-1/3	-1/3	-1/3

単体法と巡回

- 基底・非基底変数が決まると，辞書は一意に定まる
- 基底・非基底変数の組合せは有限個

- 単体法は辞書を繰り返し生成する
- 単体法が終了しない➔辞書が無限に生成される
  - ➔同じ辞書が何回も現れる
  - ➔巡回が起こっている

注意：巡回が起こっているときは
　　目的関数値が変化しない

最小添字規則

ピボット演算のとき、
最小添字規則(smallest subscript rule)を適用
⇒ 有限反復で終了

基底に入る変数の候補

- ステップ1にて係数が負の非基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

基底から出る変数の候補

- ステップ2にて値が0に減少する基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

最小添字規則の適用例

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

x_1 はどれだけ増やせるか?

x_4: $0 \to 0-2\alpha$

x_5: $0 \to 0-3\alpha$

x_6: $0 \to 0+5\alpha$

∴ αは最大 0

そのとき $x_4 = x_5 = 0$

注意：x_6 は増加するので、
出る変数の候補ではない！

最小添字規則の適用例(つづき)

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_4	x_2	x_3
z	0	1/2	3/2	-1/2
x_1	0	-1/2	1/2	-1/2
x_5	0	3/2	-5/2	1/2
x_6	0	-5/2	-1/2	-1/2

最適

		x_4	x_2	x_1
z	0	1	1	1
x_3	0	-1	1	-2
x_5	0	1	-2	-1
x_6	0	-2	-1	1

2段階単体法

単体法の問題点

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化 $-2x_1 - x_2$

条件 $-2x_1 - x_2 \geqq 3$

$-2x_1 + 3x_2 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

$z = 0 - 2x_1 - x_2$

$x_3 = -3 - 2x_1 - x_2$

$x_4 = 4 - 2x_1 + 3x_2$

実は実行不可能なLP

基底解(0,0,-3,4)は許容解でない

•そもそも、LPの実行可能、不可能はどうやって判定する？

2段階単体法の流れ

- 任意のLPに適用可、実行可能性も判定
- 単体法を2回使用

1段階目：実行可能性の判定

- 補助問題を作成

  → 単体法を適用、元の問題の実行可能性を調べる

  許容解をもたない⇒終了

  許容解をもつ⇒許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目：非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

補助問題の作り方

元の問題 ⟶ 補助問題

人工変数

元の問題	
最小化	$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$
条件	$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$
	$\cdots$
	$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$
	$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

補助問題	
最小化	x_a
条件	$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n + x_a \geqq b_1$
	$\cdots$
	$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n + x_a \geqq b_m$
	$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, x_a \geqq 0$

- 大きなx_aに対して$(x_1,\ldots,x_n, x_a)$は許容解
- 元の問題が実行可能 ⇔ 補助問題の最適値＝0
- $(x_1,\ldots,x_n)$: 元の問題の許容解

  ⇔ $(x_1,\ldots,x_n, 0)$: 補助問題の許容解

補助問題の解き方(その1)

元問題 → **補助問題**

元問題	補助問題
最小化 $-x_1 - 2x_2$	最小化 x_a
条件 $-x_1 - x_2 \geqq -1$	条件 $-x_1 - x_2 + x_a \geqq -1$
$x_1 + x_2 \geqq 1$	$x_1 + x_2 + x_a \geqq 1$
$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$	$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_a \geqq 0$

↓

初期辞書

$$
\begin{aligned}
z_a &= x_a \\
z &= -x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 1 - x_1 - x_2 + x_a \\
x_4 &= -1 + x_1 + x_2 + x_a
\end{aligned}
$$

元問題の目的関数も追加

負の値なので許容辞書ではない

補助問題の解き方(その2)

許容でない初期辞書

→ ピボット演算により許容辞書へ

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 \qquad\qquad\qquad x_a \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 1 - x_1 - x_2 + x_a \\
x_4 &= -1 + x_1 + x_2 + x_a
\end{aligned}
$$

- 非基底変数 x_a を基底に入れる
- 基底変数の式の定数項を比較
- 定数項最小の基底変数を基底から出す

x_a と x_4 を入れ替え ⇒ 許容辞書が得られる

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

補助問題の解き方(その3)

許容辞書が得られた

→ 単体法で最適解を求める

係数が全て非負なので最適

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

x_1 と x_a を入れ替え

$$
\begin{aligned}
&\boxed{z_a = 0 + x_a} \\
z &= -1 + x_a - x_2 - x_4 \\
x_3 &= 0 + 2x_a - x_4 \\
x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

- 補助問題の最適値 $z_a = 0$ ⇒ 元問題は実行可能
- 現在の基底解 (1, 0, 0, 0): 元問題の許容解
- x_a が非基底変数

  ⇒ 最終辞書から x_a, z_a を削除すると元問題の許容辞書

補助問題の解き方(その4)

最終辞書で x_a が基底に入っている場合は？

係数が全て非負なので最適

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

x_1 と x_3 を入れ替え

$$
\begin{aligned}
\boxed{z_a = 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4} \\
z = -1 + \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2} x_4 \\
x_1 = 1 - \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2} x_4 \\
x_a = 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4
\end{aligned}
$$

元問題の許容辞書をどうやって求めるか？

補助問題の解き方(その5)

最適辞書において x_a が基底に入っている
→ ピボット演算で x_a を基底から出す

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4 \\
z &= -1 + \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2} x_4 \\
x_1 &= 1 - \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2} x_4 \\
x_a &= 0 \boxed{+ \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4}
\end{aligned}
$$

x_3 と x_a を入れ替え

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + x_a \\
z &= -1 + x_a - x_2 - x_4 \\
x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4 \\
x_3 &= 0 + 2x_a - x_4
\end{aligned}
$$

係数が非ゼロの変数と x_a を入れ替え

x_a が非基底にある
⇒ x_a, z_a を削除すると元問題の許容辞書

$$
\begin{aligned}
z &= -1 - x_2 - x_4 \\
x_1 &= 1 - x_2 + x_4 \\
x_3 &= 0 - x_4
\end{aligned}
$$

2段階単体法の2段階目

1段階目で得られた許容辞書に
単体法を適用

$$\begin{aligned} z &= -1 - x_2 - x_4 \\ x_1 &= 1 - x_2 + x_4 \\ x_3 &= 0 - x_4 \end{aligned}$$

x_2 と x_1 を
入れ替え

$$\begin{aligned} z &= -2 + x_1 - 2x_4 \\ x_2 &= 1 - x_1 + x_4 \\ x_3 &= 0 - x_4 \end{aligned}$$

x_4 と x_3 を
入れ替え

$$\begin{aligned} z &= -2 + x_1 + 2x_3 \\ x_2 &= 1 - x_1 - x_3 \\ x_4 &= 0 - x_3 \end{aligned}$$

最適解 (0,1,0,0) が得られた

2段階単体法の流れ

- 入力:不等式標準形のLP

1段階目:実行可能性の判定

- 補助問題に単体法を適用、
  元問題の実行可能性を調べる
  許容解をもたない ⇒ 終了
  許容解をもつ ⇒ 許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目:非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用
  非有界 ⇒ 終了
  有界 ⇒ 最適解を出力

∴実行可能で有界なLPは最適解をもつ(基本定理)

双対定理

定理2．3（双対定理, duality theorem）:
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

以下では，具体例を使って証明の流れを説明する

双対定理の証明(その1)

主問題

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件
$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$$
$$-2x_1 \qquad - 4x_3 \geqq -4$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$$

初期辞書

最小化 z

条件
$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0$$

双対問題

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件
$$-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$$
$$-2y_1 \qquad - 3y_3 \leqq -1$$
$$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$$
$$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$$

- 主問題のスラック変数
- 主問題の制約
- 双対問題の変数

の間の1対1対応

$x_4 \leftarrow\rightarrow$ 第1制約 $\leftarrow\rightarrow y_1$

$x_5 \leftarrow\rightarrow$ 第2制約 $\leftarrow\rightarrow y_2$

$x_6 \leftarrow\rightarrow$ 第3制約 $\leftarrow\rightarrow y_3$

双対定理の証明(その2)

主問題

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件
$$
\begin{aligned}
-2x_1 - 2x_2 + x_3 &\geqq -4\\
-2x_1 \qquad\quad - 4x_3 &\geqq -4\\
4x_1 - 3x_2 + x_3 &\geqq -1\\
x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

初期辞書

最小化 z

条件
$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3\\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3\\
x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\quad - 4x_3\\
x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3\\
x_1 &\geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0
\end{aligned}
$$

最終辞書

$$
\begin{aligned}
z &= -4 + \boxed{(3/5)}x_4 + \boxed{(1/5)}x_2 + \boxed{(2/5)}x_5\\
x_1 &= 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5\\
x_3 &= 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5\\
x_6 &= 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5
\end{aligned}
$$

主問題の最適解は

$x_1^*=2,\ x_2^*=0,\ x_3^*=0$, 最適値= - 4

$x_4 \quad x_5 \quad x_6$

$$y_1^* = \frac{3}{5}, y_2^* = \frac{2}{5}, y_3^* = 0$$

が双対問題の許容解,

目的関数値 ＝ - 4

となることを示せば証明終了(弱双対定理より)

双対定理の証明(その3)

x_4 x_5 x_6 x_1 x_2 x_3

$y_1^* = \frac{3}{5}, y_2^* = \frac{2}{5}, y_3^* = 0$

が双対問題の許容解,

目的関数値 ＝ - 4

となることを示す

$y_4^* = 0, y_5^* = \frac{1}{5}, y_6^* = 0$

と便宜上おく

最終辞書

$z = -4 + \boxed{(3/5)}x_4 + \boxed{(1/5)}x_2 + \boxed{(2/5)}x_5$

$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$

$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$

$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$

最終辞書なので,

z の式の係数は非負

➔ y_i^* はすべて非負

z の式の右辺を書き換える

$$z = -4 + (y_1^* x_4 + y_5^* x_2 + y_2^* x_5) + (y_4^* x_1 + y_6^* x_3 + y_3^* x_6)$$
$$= -4 + y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3 + y_1^* x_4 + y_2^* x_5 + y_3^* x_6$$

双対定理の証明(その4)

最終辞書

$$z = -4 + y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3 + y_1^* x_4 + y_2^* x_5 + y_3^* x_6$$

$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$

$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$

$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$

$(x_1, x_2, \ldots, x_6, z)$は
最終辞書の解←→初期辞書の解

初期辞書

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\ x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \end{aligned}\right\}$$

初期辞書の4つの式を
最終辞書のzの式に代入

双対定理の証明(その5)

最終辞書の z の式

左辺 = $0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

右辺 = $-4 + \{y_1^*(4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3)$
$+ y_2^*(4 - 2x_1 - 4x_3)$
$+ y_3^*(1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3)\}$
$+(y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3)$

$= (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*)$
$+ (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)x_1$
$+ (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*)x_2$
$+ (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)x_3$

この式は恒等式,
任意のx_1, x_2, x_3に対して成り立つ
➔両辺の各項の
係数, 定数は等しい

$$0 = (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*)$$
$$-2 = (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)$$
$$-1 = (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*)$$
$$-1 = (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)$$

双対定理の証明(その6)

$0 = (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*)$ ⇒ $-4y_1^* - 4y_2^* - y_3^* = -4$

双対問題において

$(y_1^*, y_2^*\ y_3^*)$の目的関数値 $= -4$

$-2 = (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)$

$-1 = (y_5^* - 2y_1^* \qquad - 3y_3^*)$

$-1 = (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)$

⇒

y_4^*, y_5^*, y_6^*は非負なので

$-2 \geqq -2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*$

$-1 \geqq -2y_1^* \qquad - 3y_3^*$

$-1 \geqq y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*$

$(y_1^*, y_2^*\ y_3^*)$は

双対問題の許容解

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件
$$
\begin{aligned}
-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leqq -2 \\
-2y_1 \qquad\qquad - 3y_3 &\leqq -1 \\
y_1 - 4y_2 + y_3 &\leqq -1 \\
y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

双対定理の証明終わり

レポート問題

問1: 右の辞書に最小添字規則を適用して解きなさい.

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	6	-2	2	0
x_5	3	-1	-1	2
x_6	3	-1	-1	-1

問2: 次の線形計画問題を二段階単体法で解きなさい.

(a) 最小化 $-3x_1 - 2x_2$

条件
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geqq -1 \\ -x_1 + 2x_2 &\geqq 4 \\ -x_1 - x_2 &\geqq -2 \\ x_1 \geqq 0,\ x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

(b) 最小化 $-3x_1 - 2x_2$

条件
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\geqq -1 \\ -x_1 + 2x_2 &\geqq 0 \\ x_1 + x_2 &\geqq 2 \\ x_1 \geqq 0,\ x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

問3: 講義に対する感想、意見、要望を自由に書いてください.