数理計画法（数理最適化）第4回

線形計画問題の解法：単体法

担当：　塩浦昭義
情報科学研究科 徳山・塩浦・全 研究室 准教授
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

2変数の線形計画問題

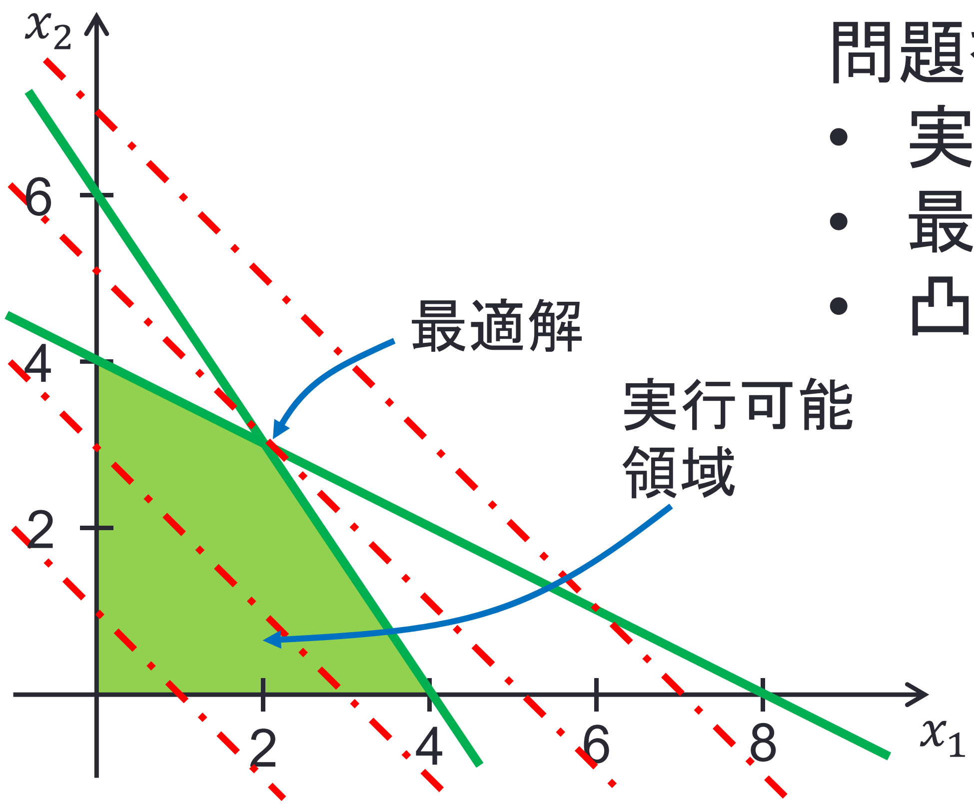
例題

目的関数：$-x_1 - x_2 \quad \rightarrow$ 最小化

制約条件：$3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

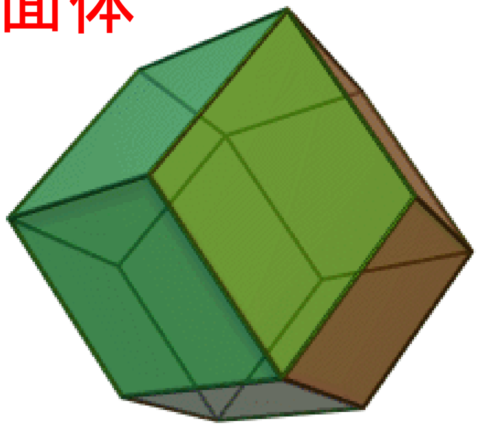


問題を図示してわかること

- 実行可能領域は平面上の凸多角形
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の頂点の1つは最適解

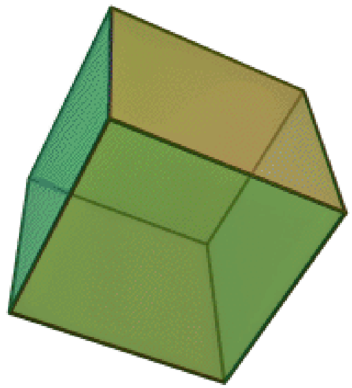
実行可能領域と最適解の性質

- 一般の n 変数の線形計画問題の場合
  - 実行可能領域は，n 次元実数空間における凸多面体
  - 凸多面体の頂点の中に，必ず最適解が存在



http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Rhombicdodecahedron.gif

➔ 最適解を見つけるには，実行可能領域の頂点を全て調べればよい！



http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/48/Hexahedron.gif

- 単純なやり方で頂点を調べると，指数時間が必要
  - 超立方体の場合，頂点の数は 2^n 個
- 効率的に頂点を調べて最適解を見つける方法
  - シンプレックス法（単体法）

シンプレックス法

- 線形計画問題の最適解を求めるアルゴリズム
- G. B. Dantzig (1947)が提案
- 「ピボット操作」により，「基底解」を繰り返し更新して，最適解を求める

- 今日の残りの内容：シンプレックス法の説明のための準備
  - 基底解の説明
  - ピボット演算の説明

辞書(その1)

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化 $c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最小化 z

条件 $z = 0 + c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0,$

$x_{n+1} \geqq 0, \ldots, x_{n+m} \geqq 0$

この等式制約のみで

問題を表現できる → 辞書(dictionary)

辞書(その2)

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件

$$
\begin{aligned}
-2x_1 - 2x_2 + x_3 &\geqq -4 \\
-2x_1 - 4x_3 &\geqq -4 \\
4x_1 - 3x_2 + x_3 &\geqq -1
\end{aligned}
$$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

最小化 z

条件

$$
\boxed{
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\
x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3
\end{aligned}
}
$$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0$

辞書

辞書に関する用語

$$
\begin{aligned}
z &= 0 + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \\
x_{n+1} &= -b_1 + a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\
&\cdots \\
x_{n+m} &= -b_m + a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n
\end{aligned}
$$

非基底変数
(nonbasic variable)
右辺の変数

基底変数(basic variable): 左辺に表れる変数

基底解(basic solution): 非基底変数を0としたときの解

（許容とは限らない）

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\
x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

⇒ 基底解は(0,0,0,4,4,1)

基底解と非基底変数の関係

非基底変数の選び方に応じて，基底解は変わる
変数は n 個，非基底変数は n-m個
➔非基底変数の組合せは ${}_nC_{n-m}$ 個➔ ${}_nC_{n-m}$ 個の基底解

$$
\boxed{\begin{aligned}
z &= \quad\quad\;\; -x_1 - x_2 \\
x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\
x_4 &= 8 \quad - x_1 \;\, - 2x_2
\end{aligned}}
$$

2ページ目の
例題を
等式標準形
にしたもの

等式 m = 2 個，変数 n = 4 個
➔ ${}_4C_2$ = 4x3/2 = 6 個の基底解

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)　　基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)
基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)　　基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)
基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_4: (0,6,0,−4)　　基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)

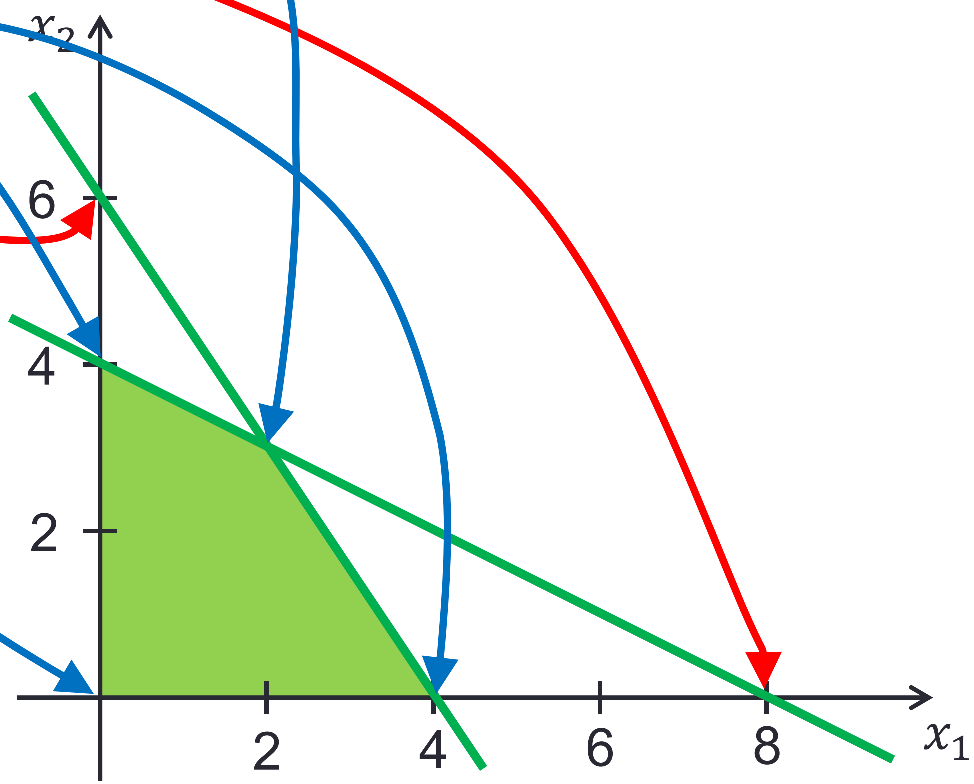
２つは実行不可能，残りは実行可能

基底解と頂点の関係

実行可能な基底解は，実行可能領域の頂点に対応している
➔ 実行可能な基底解の中に，必ず最適解が存在する

最適基底解：
最適な基底解のこと

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)
基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)
基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)
基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)
基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_3: (0,6,0,−4)
基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)



辞書に関する用語(その2)

許容辞書(feasible dictionary)：

対応する基底解が許容解の辞書

⇔　基底解の各成分が非負

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\quad - 4x_3
\end{aligned}
$$

基底解＝(0,0,0,4,4)

⇒　許容辞書

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= -4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\quad - 4x_3
\end{aligned}
$$

基底解＝(0,0,0,-4,4)

⇒　許容辞書ではない

辞書の行列表現

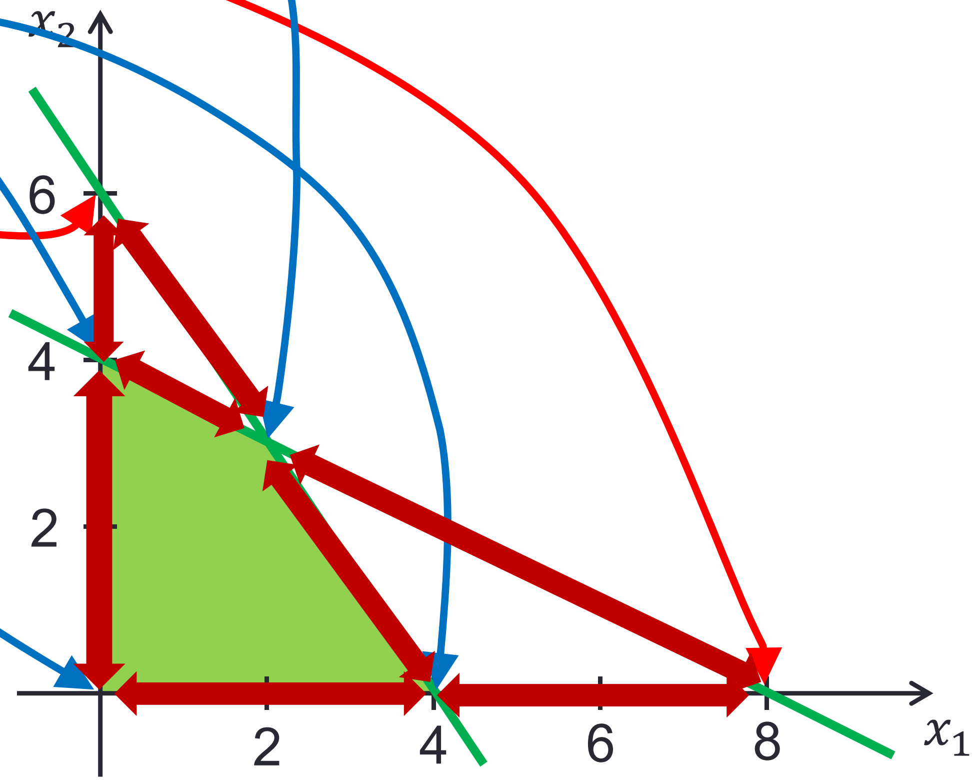
辞書の右辺の係数だけを書き出す

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\quad - 4x_3
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{|c|ccc|}
\hline
0 & -2 & -1 & -1 \\
\hline
4 & -2 & -2 & 1 \\
4 & -2 & 0 & -4 \\
\hline
\end{array}
$$

ピボット操作

ピボット操作：基底変数と非基底変数を1個ずつ入れ替えること
ピボット操作により，基底解は「隣接する」基底解に変わる

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)
基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)
基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)
基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)
基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_3: (0,6,0,−4)
基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)



基底解の更新方法:ピボット演算

ピボット演算(pivot operation):より良い基底解を得るための手順

許容辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

解を変化させて z を減らしたい
⇒ x_1 の係数 < 0 なので
x_1 を増やす

x_1 を α だけ増やすと
目的関数値 $z = -2\alpha$
解は
$(\alpha, 0, 0, 4-2\alpha, 4-2\alpha, 1+4\alpha)$

許容性を満たすためには $\alpha \leqq 2$

ピボット演算(その2)

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 \qquad - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

$x_1 = 0 \rightarrow 2$ とすると

解は(2,0,0,0,0,9), $z = -4$

とくに、 基底変数 $x_4 = 4 \rightarrow 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_5, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_3)

x_1を基底に入れる

x_4を基底から出す

$$z = -4 \quad + x_4 + x_2 - 2x_3$$
$$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$$
$$x_5 = 0 \quad + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$
$$x_6 = 9 \quad - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

辞書の書き換え

(ピボット演算終了)

ピボット演算2回目（その1）

$$
\begin{aligned}
z &= -4 && + x_4 && + x_2 && - 2x_3 \\
x_1 &= 2 && - (½)x_4 && - x_2 && + (½)x_3 \\
x_5 &= 0 && + x_4 && + 2x_2 && - 5x_3 \\
x_6 &= 9 && - 2x_4 && - 7x_2 && + 3x_3
\end{aligned}
$$

z を減らしたい

⇒ x_3の係数 < 0 なので

x_3 を増やす

x_3をαだけ増やすと

基底解(2,0,0,0,0,9)

目的関数値 $z = -4 - 2\alpha$

目的関数値 z = -4

解は

$(2 + (½)\alpha, 0, \alpha, 0, \boxed{0 - 5\alpha}, 9+3\alpha)$

許容性を満たすためには

$\alpha \leqq 0$

ピボット演算2回目（その2）

$$z = -4 + x_4 + x_2 - 2x_3$$
$$x_1 = 2 - (½)x_4 - x_2 + (½)x_3$$
$$x_5 = 0 + x_4 + 2x_2 - 5x_3$$
$$x_6 = 9 - 2x_4 - 7x_2 + 3x_3$$

$x_3 = 0 \rightarrow 0$ とすると

解は(2,0,0,0,0,9),　z = - 4

とくに、基底変数 $x_5 = 0 \rightarrow 0$

基底と非基底の入れ替え

基底(x_1, x_3, x_6), 非基底(x_4, x_2, x_5)

x_3を基底に入れる

x_5を基底から出す

$$z = -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5$$
$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$
$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$
$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

辞書の書き換え

（ピボット演算終了）

ピボット演算に関する用語

- 1回目のピボット演算

  基底解 (0,0,0,4,4,1) → (2,0,0,0,0,9)

  非退化(nondegenerate):基底解が変化する

- 2回目のピボット演算

  基底解 (2,0,0,0,0,9) → (2,0,0,0,0,9)

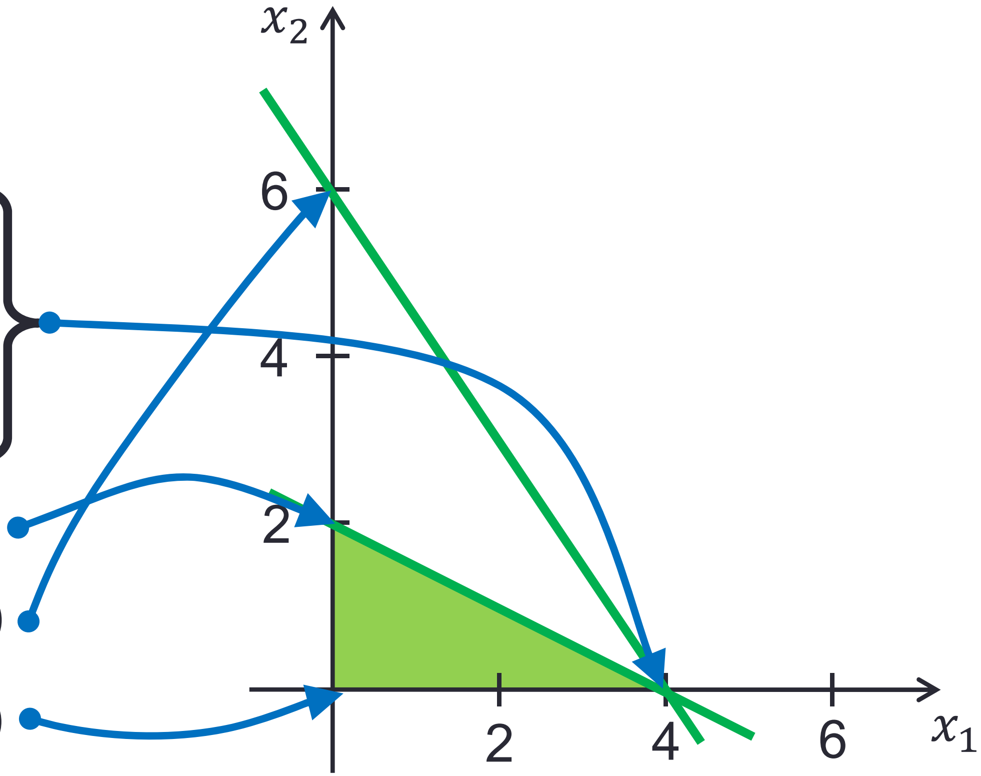
  退化(degenerate):基底解が変化しない

退化した基底解

非基底変数の選び方が違っていても,
同じ基底解が得られることがある🡐退化した基底解と呼ぶ

$$
\begin{aligned}
z &= - x_1 - x_2 \\
x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\
x_4 &= \mathbf{4} - x_1 - 2x_2
\end{aligned}
$$

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (4,0,0,0)
基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (4,0,0,0)
基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,0)
基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,2,8,0)
基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_3: (0,6,0,−8)
基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,4)



最適性の判定

$$z = -4 \boxed{+ (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5}$$

$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$

$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$

$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

z の式の非基底変数の係数がすべて非負

↓

任意の許容解において x_4, x_2, x_5 は非負なので $z \geqq -4$

↓

現在の基底解 (2,0,0,0,0,9) は z = -4 なので最適解

非有界性の判定

現在の辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 + \boxed{2x_1} - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 + \boxed{2x_1} - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + \boxed{4x_1} - 3x_2 + x_3$$

基底解(0,0,0,4,4,1)

目的関数値 $z = 0$

x_1の係数 = -2 < 0 なので

x_1 を増やす ⇒ z が減る

x_1をα増やすと

解は

$(\alpha, 0, 0, 4+2\alpha, 4+2\alpha, 1+4\alpha)$

目的関数値 $z = -2\alpha$

αを任意に増やしても解は許容

⇒ 非有界

単体法の流れ

- 入力：許容辞書（および基底）
- 出力：有界・非有界の判定。有界のときは最適解も。

ステップ1：最適性判定

z の等式の右辺の係数が全て非負⇒最適解

ある係数が負⇒基底に入る変数 x_s にする

ステップ2：非有界性判定、ピボット演算

変数 x_s をどれだけ増やせるか計算

無限に増やせる⇒非有界

それ以外⇒x_s を最大限増やしたときに0に減少する

基底変数を基底から出る変数 x_t にする

新しい基底に合わせて辞書を書き換え

レポート問題

問1：右の線形計画問題の基底解をすべて計算せよ.
また，対応する基底変数，非基底変数の組合せを書け.

$$
\begin{aligned}
z &= \quad\quad\quad -x_1 - x_2 \\
x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\
x_4 &= 12 - x_1 \quad - 2x_2
\end{aligned}
$$

問2：右の線形計画問題について考える

$$
\begin{aligned}
z &= \quad\quad\quad -x_1 - x_2 \\
x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\
x_4 &= \mathbf{8} - x_1 \quad - 2x_2
\end{aligned}
$$

①x_1, x_2が基底変数の場合
②x_1, x_4が基底変数の場合
それぞれの場合に対し，対応する基底解が最適解か否かを判定せよ．授業で説明したやり方で判定すること.

レポート問題

問3：右のLP（許容辞書）を単体法により解きなさい．

単体法の各反復における辞書，および基底から出る変数，入る変数を明記すること

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\
x_4 &= 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \\
x_5 &= 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\
x_6 &= 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3
\end{aligned}
$$