レポート問題

問１：系３．２を証明せよ.

（証明の例）x は主問題の許容解，y は双対問題の許容解であって，

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad ①$$

が成り立つと仮定する.

まず，x が主問題の最適解であることを示すために，任意の主問題の許容解 x' に対して，

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j' \qquad ②$$

が成り立つことを証明する.

x' と y に対して弱双対定理を適用すると，

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j' \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad ③$$

が成り立つ．式③と式①より，不等式②が導かれる.

つぎに，y が双対問題の最適解であることを示すために，（以下略）

レポート問題

問2：下記の2つのLPの双対問題を求めなさい.
また，それぞれの双対問題が
　(a)最適解をもつ，(b)非有界，(c)実行不可能
のいずれに当てはまるか，調べなさい（理由も書くこと）

最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq -3$
　　　$x, y \geqq 0$

(a)最適解をもつ

最大化　$-3z$
条件　$-z \leqq 1$
　　　$-z \leqq 2$
　　　$z \geqq 0$

(a)最適解をもつ
理由1：
z の範囲は0以上なので，z= 0が最適解である.
理由2：
この問題は許容解をもち，目的関数値は3以下なので有界である. よってLPの基本定理より最適解が存在する.

レポート問題

問2：下記の2つのLPの双対問題を求めなさい．
また，それぞれの双対問題が
　(a)最適解をもつ，(b)非有界，(c)実行不可能
のいずれに当てはまるか，調べなさい（理由も書くこと）

最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq 1$
　　　$x, y \geqq 0$

(c)実行不可能

最大化　z
条件　$-z \leqq 1$
　　　$-z \leqq 2$
　　　$z \geqq 0$

（b）非有界
理由：　任意の非負値αに対し，$z=\alpha$とおくとこれは許容解である．
よって$z=\alpha$を無限に大きくすることができるので，このＬＰは非有界である．

レポート問題

問3：右の線形計画問題について考える.

(a) [P] の双対問題[D]を書きなさい.

$$
[\mathrm{P}]\ \left|\ \begin{array}{lrrrl}
\text{最小化} & -2x_1 & -x_2 & +x_3 & \\
\text{条件} & -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & \geq -4 \\
 & -2x_1 & & -4x_3 & \geq -4 \\
 & 4x_1 & -3x_2 & +x_3 & \geq 2 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0}
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化}: & -4y_1 - 4y_2 + 2y_3 \\
\text{条件}: & -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2 \\
 & -2y_1 \qquad - 3y_3 \leq -1 \\
 & y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 1 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{array}
$$

(b) [P]と[D]に対する相補性条件をすべて（具体的に）書きなさい.

$\big(-2x_1 - 2x_2 + x_3 - (-4)\big)y_1 = 0,\ \ \big(-2x_1 - 4x_3 - (-4)\big)y_2 = 0$

$(4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2)y_3 = 0$

$\big(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 - (-2)\big)x_1 = 0,\quad \big(-2y_1 - 3y_3 - (-1)\big)x_2 = 0$

$(y_1 - 4y_2 + y_3 - 1)x_3 = 0$

レポート問題

問3：右の線形計画問題について考える.
(c) [P] の最適解のひとつは$x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$である.
　相補性定理を使って，双対問題[D]の最適解をすべて計算しなさい．計算の過程も書くこと.
（答え）双対問題の最適解は，$x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$を代入したときの相補性条件と，双対問題の制約条件を満たす(y_1, y_2, y_3)全てである.

相補性条件に$x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$を代入すると

$$0 \cdot y_1 = 0,\ \ 0 \cdot y_2 = 0, 6y_3 = 0,$$

$$\big(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 - (-2)\big) \cdot\ 2 = 0,\ \ \big(-2y_1 - 3y_3 - (-1)\big) \cdot 0 = 0$$

$$(y_1 - 4y_2 + y_3 - 1) \cdot 0 = 0$$

よって$y_3 = 0, y_1 + y_2 = 1$ が成り立つ.
また，双対問題の制約条件より，

$$-2y_1 \leq -1, y_1 - 4y_2 \leq 1, y_1, y_2 \geq 0$$

整理すると，$(y_1, 1 - y_1, 0), 0.5 \leq y_1 \leq 1$ これが[D]の最適解全体