

# レポート問題

問1: 系3. 2を証明せよ.

(証明の例)  $x$  は主問題の許容解,  $y$  は双対問題の許容解であって,

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad \textcircled{1}$$

が成り立つと仮定する.

まず,  $x$  が主問題の最適解であることを示すために, 任意の主問題の許容解  $x'$  に対して,

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j' \quad \textcircled{2}$$

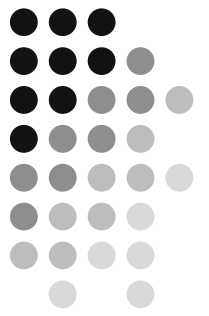
が成り立つことを証明する.

$x'$  と  $y$  に対して弱双対定理を適用すると,

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j' \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad \textcircled{3}$$

が成り立つ. 式③と式①より, 不等式②が導かれる.

つぎに,  $y$  が双対問題の最適解であることを示すために, (以下略)



# レポート問題

問2: 下記の2つのLPの双対問題を求めなさい.

また, それぞれの双対問題が

(a)最適解をもつ, (b)非有界, (c)実行不可能  
のいずれに当てはまるか, 調べなさい(理由も書くこと)

$$\text{最小化 } x + 2y$$

$$\text{条件 } -x - y \geq -3 \quad (\text{a})\text{最適解をもつ}$$

$$x, y \geq 0$$

$$\text{最大化 } -3z$$

$$\text{条件 } -z \leq 1$$

$$-z \leq 2$$

$$z \geq 0$$

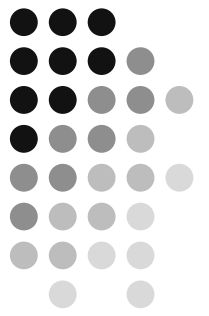
(a)最適解をもつ

理由1:

$z$  の範囲は0以上なので,  $z = 0$ が最適解である.

理由2:

この問題は許容解をもち, 目的関数値は3以下なので有界である. よってLPの基本定理より最適解が存在する.



# レポート問題

問2: 下記の2つのLPの双対問題を求めなさい.

また, それぞれの双対問題が

(a)最適解をもつ, (b)非有界, (c)実行不可能  
のいずれに当てはまるか, 調べなさい(理由も書くこと)

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x + 2y \\ \text{条件} & -x - y \geq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array}$$

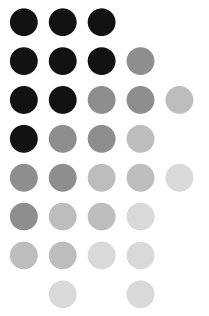
(c)実行不可能

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & z \\ \text{条件} & -z \leq 1 \\ & -z \leq 2 \\ & z \geq 0 \end{array}$$

(b)非有界

理由: 任意の非負値  $\alpha$  に対し,  $z = \alpha$  とおくと  
これは許容解である.

よって  $z = \alpha$  を無限に大きくすることができる  
ので, このLPは非有界である.



# レポート問題

問3: 右の線形計画問題について考える.

(a) [P] の双対問題[D]を書きなさい.

[P]	最小化	$-2x_1$	$-x_2$	$+x_3$		最大化:	$-4y_1 - 4y_2 + 2y_3$
	条件	$-2x_1$	$-2x_2$	$+x_3$	$\geq -4$	条件:	$-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$
		$-2x_1$		$-4x_3$	$\geq -4$		$-2y_1 - 3y_3 \leq -1$
		$4x_1$	$-3x_2$	$+x_3$	$\geq 2$		$y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 1$
		$x_1 \geq 0,$	$x_2 \geq 0,$	$x_3 \geq 0$			$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

(b) [P]と[D]に対する相補性条件をすべて(具体的に)書きなさい.

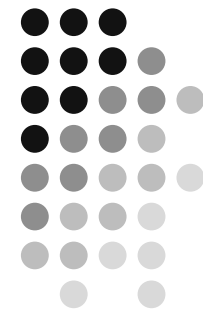
$$(-2x_1 - 2x_2 + x_3 - (-4))y_1 = 0, \quad (-2x_1 - 4x_3 - (-4))y_2 = 0$$

$$(4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2)y_3 = 0$$

$$(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 - (-2))x_1 = 0, \quad (-2y_1 - 3y_3 - (-1))x_2 = 0$$

$$(y_1 - 4y_2 + y_3 - 1)x_3 = 0$$

# レポート問題



問3: 右の線形計画問題について考える.

(c) [P] の最適解のひとつは  $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$  である.

相補性定理を使って, 双対問題[D]の最適解をすべて計算しなさい. 計算の過程も書くこと.

(答え) 双対問題の最適解は,  $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$  を代入したときの相補性条件と, 双対問題の制約条件を満たす  $(y_1, y_2, y_3)$  全てである.

相補性条件に  $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$  を代入すると

$$0 \cdot y_1 = 0, \quad 0 \cdot y_2 = 0, \quad 6y_3 = 0,$$

$$(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 - (-2)) \cdot 2 = 0, \quad (-2y_1 - 3y_3 - (-1)) \cdot 0 = 0$$

$$(y_1 - 4y_2 + y_3 - 1) \cdot 0 = 0$$

よって  $y_3 = 0, y_1 + y_2 = 1$  が成り立つ.

また, 双対問題の制約条件より,

$$-2y_1 \leq -1, \quad y_1 - 4y_2 \leq 1, \quad y_1, y_2 \geq 0$$

整理すると,  $(y_1, 1 - y_1, 0), 0.5 \leq y_1 \leq 1$  これが[D]の最適解全体