2014 年度 数理計画法 中間試験問題 [50 点満点]

2014 年 11 月 27 日(木)13 時 00 分～14 時 30 分 (90 分)

問 1

(1)次の問題(a),(b)を数理計画問題として定式化せよ．定式化の際，変数の意味と各制約条件の意味を説明すること．なお，最適解は求めなくて良い．

(a) 5x5 の大きさの魔方陣とは，1,2,3,4,5 の数字を並べた 5x5 の表であり，表の各列を縦に見ると，1 から 5 の数字がちょうど一回ずつ現れ，同様に，表の各行を横に見たとき，また表の 2 つの対角線を斜めに見たときに，それぞれ 1 から 5 の数字がちょうど一回ずつ現れる．このような魔方陣を求めたい．

(b) ヨーロッパのとあるワイン製造会社では，3 種類のぶどう G1，G2，G3 を原材料として，赤，白，ロゼの 3 種類のワインを生産している．各ワインを 1 樽（たる）分だけ生産することによって得られる利益と，1 樽分を生産するために必要なぶどうの量は表の通りである．ただし，各々のぶどうの最大供給量は決まっており，G1 は 4 トン，G2 は 8 トン，G3 は 6 トンとなっている．このとき，総利益を最大にするような各ワインの生産量を決定せよ．

ワインの種類	1 樽分を生産するのに必要なぶどうの量（単位：トン）			1 樽当りの利益（単位：1 万ユーロ）
	G1	G2	G3	
赤	2	1	0	4
白	0	0	3	6
ロゼ	0	2	1	3

(2) 以下の線形計画問題を不等式標準形に書き直せ．結果のみ書けば良い．

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
\text{最大化：} & 2x & + & 2y & + & 3z & & \\
\text{条件：} & 5x & & & + & 3z & \leqq & 8 \\
& & & & & 2z & = & 2 \\
& & & 4y & + & z & \geqq & 9 \\
& x, y \geqq 0 & & & & & &
\end{array}
$$

問 2

(1) 次のような線形計画問題の主問題(P)と双対問題(D)を考える.

(P) 最小化： $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

条件： $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$x_1 \geq 0, \ \ldots, \ x_n \geq 0$

(D) 最大化： $b_1y_1 + \cdots + b_my_m$

条件： $a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1$

$\vdots$

$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n$

$y_1, y_2, \ \ldots, \ y_m \geq 0$

線形計画問題の弱双対定理とは，次のような定理である.

主問題(P)の任意の許容解 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と双対問題(D)の任意の許容解 $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ に対して，

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \geq b_1y_1 + \cdots + b_my_m$$

が成り立つ.

弱双対定理を用いて，以下のことを**証明せよ**：

主問題(P)のある許容解 $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ と双対問題(D)のある許容解 $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$ に対して，

$$c_1x_1^* + \cdots + c_nx_n^* = b_1y_1^* + \cdots + b_my_m^*$$

が成り立つとき，$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ は主問題(P)の最適解である.

(2) 上記の双対問題(D)の双対問題が，問題(P)に一致することを証明せよ.

問 3：

右の線形計画問題(P)の最適解を求めたい.

(P) 最小化 $-2x_1 - 4x_2$

条件 $-x_1 - x_2 \geq -4$

$-x_1 - 2x_2 \geq -6$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(1) この問題(P)に対して単体法を使って最適解を求めよ．ただし，**最小添字規則を使う**とともに，**各反復で用いた辞書やピボット演算で入れ替えた変数**を明記すること.

（ヒント：初期辞書は許容辞書である）

(2) 問題(P)の**双対問題(D)**を求めよ．また，(P)と(D)に対する**相補性条件**を書け.

(3) 問題(P)の最適解のひとつは $x_1 = 2, x_2 = 2$ である．このことと相補性条件(相補性定理)を使って，双対問題の**最適解をひとつ**計算せよ．（ヒント：最適解はひとつのみ）

(4) (3)の結果と相補性条件（相補性定理）を使って，主問題の**最適解をすべて**計算せよ.

問 4：

二段階単体法を使って，下記の線形計画問題(a)，(b)が実行可能解をもつか否かを判定したい.

(1) これらの問題に対する補助問題を書け．結果のみ書けば良い.

(2) **二段階単体法を使って**，これらの問題が**実行可能解をもつか否か判定**せよ．実行可能解をもつ場合には，**元の問題の初期辞書**を求めなさい．**計算の過程も省略せずに書く**こと.

（ヒント：最小添え字規則を使うと良いかも．とくに，x_a を優先して入れ替えると良い）

(a) 最小化 $-2x_1 + 3x_2$

条件 $-x_1 - x_2 \geq 1$

$-2x_1 - x_2 \geq 2$

$-x_1 - 2x_2 \geq -3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(b) 最小化 $x_1 + 3x_2$

条件 $2x_1 + 2x_2 \geq 2$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1 + 2x_2 \geq -1$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$