数理計画法（数理最適化）第5回

2段階単体法

担当:　塩浦昭義
(情報科学研究科　准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp

前回提出のレポート問題 問1へのコメント

- 自分の証明が不完全であることを把握していない学生が多いようです
  - 最適解が存在するとは限らないことに注意！
  - 証明の中で双対定理を使ってはダメ！

今後の予定

- 11/7　研究室見学会のため休講
- 11/14 第6回目 --- 組合せ最適化その1
- 11/21 第7回目 --- ネットワーク最適化その1
- 11/28 第8回目 --- 中間試験

※レポート未提出の場合，中間試験は受験できません.

単体法の問題点

- 反復回数は有限か？

  巡回(cycling) ー 同じ辞書が繰り返し現れること

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq 3$

$-2x_1 \quad - 4x_3 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x3 \geqq 0$

⇒

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$$

巡回の例

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_1	x_6	x_3
z	0	7/3	-2/3	1/3
x_4	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_5	0	-14/3	1/3	-5/3
x_2	0	5/3	-1/3	2/3

		x_1	x_6	x_4
z	0	2	-1	-1
x_3	0	-1	-1	-3
x_5	0	-3	2	5
x_2	0	1	-1	-2

		x_5	x_2	x_3
z	0	1/3	7/3	-2/3
x_4	0	2/3	5/3	-1/3
x_1	0	-1/3	-1/3	-1/3
x_6	0	-5/3	-14/3	1/3

		x_5	x_2	x_4
z	0	-1	-1	2
x_3	0	2	5	-3
x_1	0	-1	-2	1
x_6	0	-1	-3	-1

		x_5	x_6	x_4
z	0	-2/3	1/3	7/3
x_3	0	1/3	-5/3	-14/3
x_1	0	-1/3	2/3	5/3
x_2	0	-1/3	-1/3	-1/3

単体法と巡回

- 基底･非基底変数が決まると，辞書は一意に定まる
- 基底･非基底変数の組合せは有限個

- 単体法は辞書を繰り返し生成する
- 単体法が終了しない➔辞書が無限に生成される
  ➔同じ辞書が何回も現れる
  ➔巡回が起こっている

注意：巡回が起こっているときは
　　　目的関数値が変化しない

最小添字規則

ピボット演算のとき、
最小添字規則(smallest subscript rule)を適用
⇒ 有限反復で終了

基底に入る
変数の候補

- ステップ1にて係数が負の非基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

基底から出る
変数の候補

- ステップ2にて値が0に減少する基底変数が複数存在
  ⇒ 添字最小のものを選択

最小添字規則の適用例

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

x_1 はどれだけ増やせるか?

x_4: 0→0－2α

x_5: 0→0－3α

x_6: 0→0＋5α

∴ αは最大 0

そのとき $x_4 = x_5 = 0$

注意 : x_6 は増加するので、

出る変数の候補ではない！

最小添字規則の適用例（つづき）

入る変数の候補

出る変数の候補

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

		x_4	x_2	x_3
z	0	1/2	3/2	-1/2
x_1	0	-1/2	1/2	-1/2
x_5	0	3/2	-5/2	1/2
x_6	0	-5/2	-1/2	-1/2

最適

		x_4	x_2	x_1
z	0	1	1	1
x_3	0	-1	1	-2
x_5	0	1	-2	-1
x_6	0	-2	-1	1

2段階単体法

単体法の問題点

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化 $-2x_1 - x_2$

条件 $-2x_1 - x_2 \geqq 3$

$-2x_1 + 3x_2 \geqq -4$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

$$z = 0 - 2x_1 - x_2$$

$$x_3 = -3 - 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 + 3x_2$$

実は実行不可能なLP

基底解(0,0,-3,4)は許容解でない

•そもそも、LPの実行可能、不可能はどうやって判定する？

2段階単体法の流れ

- 任意のLPに適用可、実行可能性も判定
- 単体法を2回使用

1段階目：実行可能性の判定

- 補助問題を作成

→　単体法を適用、元の問題の実行可能性を調べる

許容解をもたない⇒終了

許容解をもつ⇒許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目：非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

補助問題の作り方

元の問題 → 補助問題

人工変数

元の問題

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

補助問題

最小化　x_a

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n + x_a \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n + x_a \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0, x_a \geqq 0$

- 大きなx_aに対して$(x_1,\ldots,x_n, x_a)$は許容解
- 元の問題が実行可能　⇔　補助問題の最適値＝0
- $(x_1,\ldots,x_n)$: 元の問題の許容解

　⇔　$(x_1,\ldots,x_n, 0)$: 補助問題の許容解

補助問題の解き方（その1）

元問題 → 補助問題

最小化 $-x_1 - 2x_2$

条件 $-x_1 - x_2 \geqq -1$

$x_1 + x_2 \geqq 1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$

最小化 x_a

条件 $-x_1 - x_2 + x_a \geqq -1$

$x_1 + x_2 + x_a \geqq 1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_a \geqq 0$

初期辞書

$$
\begin{aligned}
z_a &= && x_a \\
z &= && -x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 1 && -x_1 - x_2 + x_a \\
x_4 &= -1 && +x_1 + x_2 + x_a
\end{aligned}
$$

元問題の目的関数も追加

負の値なので許容辞書ではない

補助問題の解き方(その2)

許容でない初期辞書

→ ピボット演算により許容辞書へ

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 \qquad\qquad\qquad\quad x_a \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 1 - x_1 - x_2 + x_a \\
x_4 &= -1 + x_1 + x_2 + x_a
\end{aligned}
$$

- 非基底変数 x_a を基底に入れる
- 基底変数の式の定数項を比較
- 定数項最小の基底変数を基底から出す

⇓ x_a と x_4 を入れ替え ⇒ 許容辞書が得られる

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

補助問題の解き方(その3)

許容辞書が得られた

→ 単体法で最適解を求める

係数が全て非負なので最適

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

x_1 と x_a を入れ替え

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + x_a \\
z &= -1 + x_a - x_2 - x_4 \\
x_3 &= 0 + 2x_a - x_4 \\
x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

- 補助問題の最適値 $z_a＝0$ ⇒ 元問題は実行可能
- 現在の基底解 (1, 0, 0, 0): 元問題の許容解
- x_a が非基底変数

⇒ 最終辞書から x_a, z_a を削除すると元問題の許容辞書

補助問題の解き方（その4）

最終辞書で x_a が基底に入っている場合は？

係数が全て非負なので最適

$$
\begin{aligned}
z_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4 \\
z &= 0 - x_1 - 2x_2 \\
x_3 &= 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4 \\
x_a &= 1 - x_1 - x_2 + x_4
\end{aligned}
$$

x_1 と x_3 を入れ替え

$$
\begin{aligned}
& \boxed{z_a = 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4} \\
& z = -1 + \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2} x_4 \\
& x_1 = 1 - \tfrac{1}{2} x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2} x_4 \\
& x_a = 0 + \tfrac{1}{2} x_3 + \tfrac{1}{2} x_4
\end{aligned}
$$

元問題の許容辞書をどうやって求めるか？

補助問題の解き方（その5）

最適辞書において x_a が基底に入っている

→ ピボット演算で x_a を基底から出す

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 \\
z &= -1 + \tfrac{1}{2}x_3 - x_2 - \tfrac{1}{2}x_4 \\
x_1 &= 1 - \tfrac{1}{2}x_3 - x_2 + \tfrac{1}{2}x_4 \\
x_a &= 0 \boxed{+ \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4}
\end{aligned}
$$

係数が非ゼロの
変数と x_a を入れ替え

x_3 と x_a を
入れ替え

$$
\begin{aligned}
z_a &= 0 + x_a \\
z &= -1 + x_a - x_2 - x_4 \\
x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4 \\
x_3 &= 0 + 2x_a - x_4
\end{aligned}
$$

x_a が非基底にある

⇒ x_a, z_a を削除すると
元問題の許容辞書

$$
\begin{aligned}
z &= -1 - x_2 - x_4 \\
x_1 &= 1 - x_2 + x_4 \\
x_3 &= 0 - x_4
\end{aligned}
$$

2段階単体法の2段階目

1段階目で得られた許容辞書に
単体法を適用

$$\begin{aligned} z &= -1 - x_2 - x_4 \\ x_1 &= 1 - x_2 + x_4 \\ x_3 &= 0 \qquad\quad - x_4 \end{aligned}$$

x_2 と x_1 を
入れ替え

$$\begin{aligned} z &= -2 + x_1 - 2x_4 \\ x_2 &= 1 - x_1 + x_4 \\ x_3 &= 0 \qquad\quad - x_4 \end{aligned}$$

x_4 と x_3 を
入れ替え

$$\begin{aligned} z &= -2 + x_1 + 2x_3 \\ x_2 &= 1 - x_1 - x_3 \\ x_4 &= 0 \qquad\quad - x_3 \end{aligned}$$

最適解 (0,1,0,0) が得られた

2段階単体法の流れ

- 入力：不等式標準形のLP

1段階目：実行可能性の判定

- 補助問題に単体法を適用、
  元問題の実行可能性を調べる
  許容解をもたない ⇒ 終了
  許容解をもつ ⇒ 許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目：非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用
  非有界 ⇒ 終了
  有界 ⇒ 最適解を出力

∴実行可能で有界なLPは最適解をもつ（基本定理）

双対定理

定理2．3（双対定理，duality theorem）：
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

以下では，具体例を使って証明の流れを説明する

双対定理の証明(その1)

主問題

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

初期辞書

最小化 z

条件 $z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0$

双対問題

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件 $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$

$-2y_1 - 3y_3 \leqq -1$

$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$

$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$

- 主問題のスラック変数
- 主問題の制約
- 双対問題の変数

の間の1対1対応

x_4 ←→ 第1制約 ←→ y_1

x_5 ←→ 第2制約 ←→ y_2

x_6 ←→ 第3制約 ←→ y_3

双対定理の証明(その2)

主問題

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件
$$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$$
$$-2x_1 \quad - 4x_3 \geqq -4$$
$$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$$

初期辞書

最小化 z

条件
$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$
$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0$$

主問題の最適解は

$x_1^*=2,\ x_2^*=0,\ x_3^*=0$, 最適値$= -4$

最終辞書

$$z = -4 + \boxed{(3/5)}x_4 + \boxed{(1/5)}x_2 + \boxed{(2/5)}x_5$$
$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$
$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$
$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

$$\begin{array}{ccc} x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \end{array}$$
$$y_1^* = \frac{3}{5}, y_2^* = \frac{2}{5}, y_3^* = 0$$

が双対問題の許容解,

目的関数値 ＝ - 4

となることを示せば証明終了(弱双対定理より)

双対定理の証明(その3)

x_4 x_5 x_6

$\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$

$y_1^* = \frac{3}{5}, y_2^* = \frac{2}{5}, y_3^* = 0$

が双対問題の許容解,

目的関数値 = - 4

となることを示す

x_1 x_2 x_3

$\updownarrow$ $\updownarrow$ $\updownarrow$

$y_4^* = 0, y_5^* = \frac{1}{5}, y_6^* = 0$

と便宜上おく

最終辞書

$z = -4 + \boxed{(3/5)}x_4 + \boxed{(1/5)}x_2 + \boxed{(2/5)}x_5$

$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$

$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$

$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$

最終辞書なので,
z の式の係数は非負
➔ y_i^* はすべて非負

z の式の右辺を書き換える

$$z = -4 + (y_1^* x_4 + y_5^* x_2 + y_2^* x_5) + (y_4^* x_1 + y_6^* x_3 + y_3^* x_6)$$
$$= -4 + y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3 + y_1^* x_4 + y_2^* x_5 + y_3^* x_6$$

双対定理の証明(その4)

最終辞書

$$z = -4 + y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3 + y_1^* x_4 + y_2^* x_5 + y_3^* x_6$$

$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$

$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$

$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$

$(x_1, x_2, \ldots, x_6, z)$は

最終辞書の解←→初期辞書の解

初期辞書

$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$

$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$

$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$

$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$

初期辞書の4つの式を

最終辞書のzの式に代入

双対定理の証明(その5)

最終辞書の z の式

$$\text{左辺} = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned}\text{右辺} = & -4 + \{y_1^*(4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ & + y_2^*(4 - 2x_1 - 4x_3) \\ & + y_3^*(1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3)\} \\ & +(y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3) \\ = & (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*) \\ & + (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)x_1 \\ & + (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*)x_2 \\ & + (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)x_3\end{aligned}$$

この式は恒等式,
任意のx_1, x_2, x_3に対して成り立つ
➔両辺の各項の
係数, 定数は等しい

$$0 = (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*)$$

$$-2 = (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)$$

$$-1 = (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*)$$

$$-1 = (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)$$

双対定理の証明(その6)

$0 = (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*)$ ⇒ $-4y_1^* - 4y_2^* - y_3^* = -4$

双対問題において

$(y_1^*, y_2^*\ y_3^*)$の目的関数値 = -4

$-2 = (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)$

$-1 = (y_5^* - 2y_1^* \qquad - 3y_3^*)$

$-1 = (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)$

⇒

y_4^*, y_5^*, y_6^*は非負なので

$-2 \geqq -2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*$

$-1 \geqq -2y_1^* \qquad - 3y_3^*$

$-1 \geqq y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*$

$(y_1^*, y_2^*\ y_3^*)$は

双対問題の許容解

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件

$$
\begin{aligned}
-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 &\leqq -2 \\
-2y_1 \qquad - 3y_3 &\leqq -1 \\
y_1 - 4y_2 + y_3 &\leqq -1 \\
y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

双対定理の証明終わり

レポート問題(前回の分）

問3：右のLP（許容辞書）を単体法により解きなさい．

単体法の各反復における辞書，および基底から出る変数，入る変数を明記すること

$$z = 0 - 5x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

$$x_4 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_5 = 11 - 4x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$x_6 = 8 - 3x_1 - 4x_2 - 2x_3$$

今日のレポート問題

問1：右の辞書に最小添字規則を適用して解きなさい.

		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	6	-2	2	0
x_5	3	-1	-1	2
x_6	3	-1	-1	-1

問2：次の線形計画問題を二段階単体法で解きなさい.

(a) 最小化 $-3x_1 - 2x_2$

条件
$$2x_1 - x_2 \geqq -1$$
$$-x_1 + 2x_2 \geqq 4$$
$$-x_1 - x_2 \geqq -2$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$$

(b) 最小化 $-3x_1 - 2x_2$

条件
$$2x_1 - x_2 \geqq -1$$
$$-x_1 + 2x_2 \geqq 0$$
$$x_1 + x_2 \geqq 2$$
$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$$

問3：講義に対する感想、意見、要望を自由に書いてください.