数理計画法（数理最適化）第3回

線形計画問題の諸定理

塩浦昭義 Akiyoshi Shioura
(情報科学研究科 准教授)
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

復習：主問題と双対問題

主問題(primal problem)

最小化： $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

条件： $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

双対問題(dual problem)

最大化： $b_1y_1 + \cdots + b_my_m$

条件： $a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1$

$$\vdots$$

$$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$$

主問題の i 番目の不等式

$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$

対応

双対問題の i 番目の変数

$y_i \geq 0$

主問題の j 番目の変数

$x_j \geq 0$

対応

双対問題の j 番目の不等式

$a_{1j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$

実行可能，実行不可能

定義：不等式標準形のLPに対し

- 実行可能(feasible)⇔許容解（実行可能解）が存在する
- 実行不可能(infeasible)⇔許容解（実行可能解）が存在しない

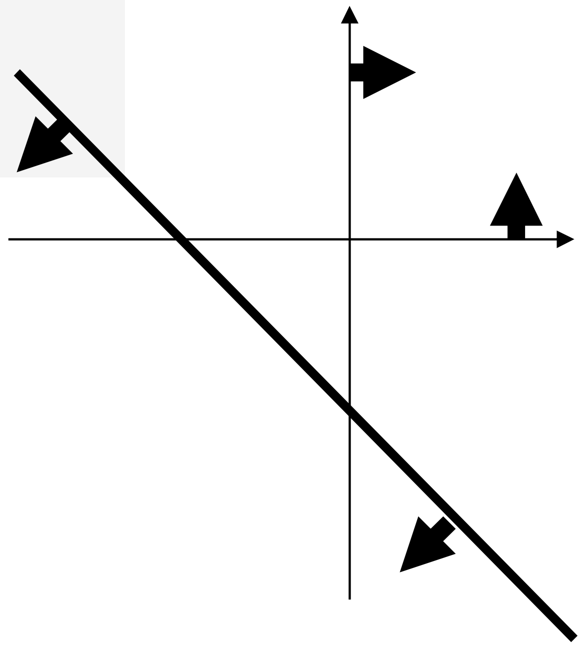
最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq -3$
$x, y \geqq 0$

実行可能

（1，1）は許容解

最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq 1$
$x, y \geqq 0$

実行不可能



有界, 非有界

定義：実行可能なLPは（最小化の場合)

- 有界(bounded)
  ⇔任意の許容解の目的関数値がある定数より大きい
- 非有界(unbounded)⇔目的関数値をいくらでも小さく出来る

最小化 x + 2y
条件 -x - y≧ -3
x, y≧ 0

有界
目的関数値≧0

最小化 - x - y
条件 x + y ≧ 0
x, y≧ 0

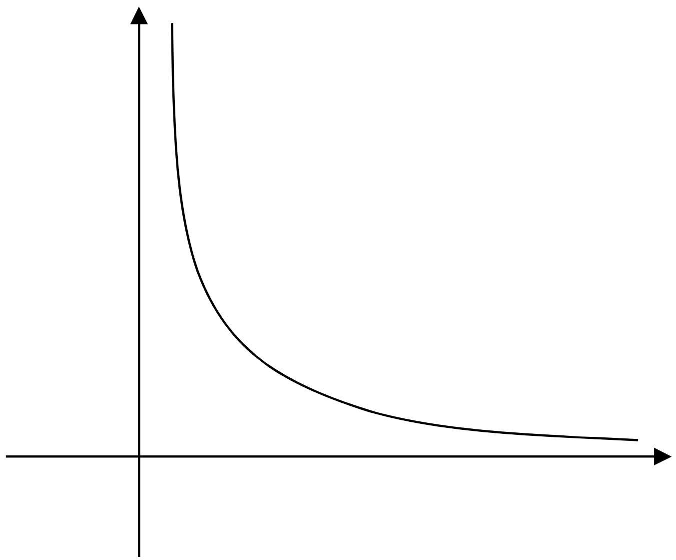
非有界
任意の$\alpha > 0$に対し(α, α)は許容解
目的関数値＝-2α

LPの基本定理

定理3．1（基本定理, fundamental theorem）
任意のLPに対し、
実行可能かつ有界 ⇒ 最適解が存在

※非線形計画の場合は成り立つとは限らない！

最小化 y
条件 $xy \geqq 1$
$x, y \geqq 0$



最適値＝0
でも $y = 0$ なる許容解はない

弱双対定理

定理３．２（弱双対定理, weak duality theorem）:

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

主問題の目的関数値　　双対問題の目的関数値

弱双対定理の証明

シグマの順番を換える

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \ge \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件
$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$
$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$
$\cdots$
$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最大化　$b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件
$a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$
$a_{12}y_1+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$
$\cdots$
$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_n \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

弱双対定理の系

系３．１
主問題が非有界 ⇒ 双対問題は実行不可能
双対問題が非有界 ⇒ 主問題は実行不可能

証明: 対偶 （双対:実行可能⇒主:有界） を示す

双対問題が実行可能と仮定

y: 双対問題の許容解、 $\alpha = \sum b_i y_i$

弱双対定理より、主問題の任意の許容解 **x** に対し

$$\sum c_j x_j \geqq \alpha \quad \therefore$$ 主問題は有界

弱双対定理の系

系３．２
x: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解，
$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ を満たす
⇒ **x**: 主問題の最適解、**y**: 双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理（定理３．２）を使って証明すること

弱双対定理の系

例３．３

最小化	$-2x_1 - x_2 - x_3$
条件	$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$
	$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$
	$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$
	$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0$

最大化	$-4y_1 - 4y_2 - y_3$
条件	$-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$
	$-2y_1 - 3y_3 \leqq -1$
	$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$
	$y_1 \geqq 0, y_2 \geqq 0, y_3 \geqq 0$

x = (2, 0, 0): 許容解　　　y = (3/5, 2/5, 0): 許容解

－２×２－０－０＝－４＝－４×（3/5）－４×（2/5）－０

⇒ 系３．２より、 x, y はそれぞれ最適解

双対定理

定理３．３（双対定理，duality theorem）：
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明　→　後日

主問題と双対問題の答えの組合せ

			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	○ （双対定理）	× （系3．1）	× （双対定理）
		非有界	× （系3．1）	× （系3．1）	○ （系3．1）
	実行不可能		× （双対定理）	○ （系3．1）	○

相補性定理(complementarity slackness theorem)

定理３．４:

x: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解

x および **y** は最適解

⇕

相補性条件
(complementarity slackness condition)

各 j = 1, ..., n について

$\sum_i a_{ij} y_i \geqq c_j$ と $x_j \geqq 0$ のどちらかは等号成立

各 i = 1, ..., m について

$\sum_j a_{ij} x_j \geqq b_i$ と $y_i \geqq 0$ のどちらかは等号成立

相補性定理の証明

x: 主問題の許容解　　　**y**: 双対問題の許容解

x、**y**　は最適解

⇕

$\sum_i a_{ij} y_i = c_j$　または　$x_j = 0$　$(\forall j = 1, 2, \ldots, n)$

$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$　または　$y_i = 0$　$(\forall i = 1, 2, \ldots, m)$

証明:　弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

x、yが最適　⇔　最初の項＝最後の項

⇔　$(\sum_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j$, $(\sum_i a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i$　⇔　相補性

レポート問題

問１: 系３．2を証明せよ.

問２: 下記の２つのLPの双対問題を求めなさい.

また, それぞれの双対問題が

　(a)最適解をもつ, (b)非有界, (c)実行不可能

のいずれに当てはまるか, 調べなさい（理由も書くこと）

最小化	$x + 2y$
条件	$-x - y \geqq -3$
	$x, y \geqq 0$

最小化	$x + 2y$
条件	$-x - y \geqq 1$
	$x, y \geqq 0$

レポート問題

問3：右の線形計画問題について考える.

(a) [P] の双対問題[D]を書きなさい.

(b) [P]と[D]に対する相補性条件をすべて(具体的に)書きなさい.

(c) [P] の最適解のひとつは$x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$である.
相補性定理を使って，双対問題[D]の最適解をすべて計算しなさい．計算の過程も書くこと.

$$
[\mathrm{P}]\quad
\begin{array}{|lrrrl}
\text{最小化} & -2x_1 & -x_2 & +x_3 & \\
\text{条件} & -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & \geq -4 \\
 & -2x_1 & & -4x_3 & \geq -4 \\
 & 4x_1 & -3x_2 & +x_3 & \geq 2 \\
 & \multicolumn{4}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0}
\end{array}
$$