2013 年度 数理計画法 中間試験問題 [50 点満点]

2013 年 11 月 28 日(木) 13 時 00 分～14 時 30 分 (90 分)

問 1： 0-1 ナップサック問題を分枝限定法で解いている過程で，下記の部分問題(A)，(B)，(C) が出てきた場合について考える． (A)，(B)，(C) のそれぞれに対して，次の問いに答えなさい．

[1] 部分問題に対する緩和問題（連続ナップサック問題）の**最適解とその目的関数値**を求めなさい．
答えのみ書けば良い．

[2] 部分問題(A)，(B)，(C)が出てきた時点で，**目的関数値が 30 の暫定解**が得られているとする．
このとき，各々の部分問題に対して分枝操作と限定操作のどちらを適用すべきか答えなさい．
また，その理由を詳しく書くこと．なお，限定操作を適用するときは，緩和問題を利用すること．

(A) 最大化 $7x_1 + 10x_2 + 25x_3 + 8x_4$
条件 $x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 \le 7$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

(B) 最大化 $10x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 4x_4$
条件 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

(C) 最大化 $7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 5x_4$
条件 $x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 \le 7$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

問 2： 次の線形計画問題の主問題(P)と双対問題(D)を考える．

(P) 最小化： $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$
条件： $a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1$
$\vdots$
$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m$
$x_1 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0$

(D) 最大化： $b_1y_1 + \cdots + b_my_m$
条件： $a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \le c_1$
$\vdots$
$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \le c_n$
$y_1, y_2,\ \ldots,\ y_m \ge 0$

[1] 線形計画問題の弱双対定理とは，次のような定理である．

主問題(P)の任意の許容解 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と双対問題(D)の任意の許容解 $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ に対して，
$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \ge b_1y_1 + \cdots + b_my_m$$
が成り立つ．

弱双対定理を用いて，以下のことを**証明せよ**：双対問題(D)が非有界ならば，主問題(P)は実行不可能．

[2] 双対問題が非有界となるような線形計画問題の具体例を一つ書きなさい．ただし，変数は 2 つ，制約（変数の非負条件は除く）の数は 2 つとすること．なお，その具体例に対し，双対問題が非有界となることを説明すること．

[3] 双対問題(D)を不等式標準形に書き直しなさい．**変換途中の過程についても省略せずに書くこと**．

[4] 上記の[3]で得られた線形計画問題に対し，その双対問題を書きなさい．結果のみ書けば良い．
また，得られた問題と，主問題(P)との関係を説明せよ．

問 3：

二段階単体法を使って，下記の線形計画問題(a)，(b)が実行可能解をもつか否かを判定したい．

[1] これらの問題に対する補助問題を書け．結果のみ書けば良い．

[2] **二段階単体法を使って**，これらの問題が実行可能解をもつか否か判定せよ．実行可能解をもつ場合には，**元の問題の初期辞書**を求めなさい．**計算の過程も省略せずに書く**こと．

(a) 最小化 $-2x_1 + 3x_2$

条件
$$
\begin{aligned}
-x_1 - x_2 &\geq 1 \\
-2x_1 - x_2 &\geq 2 \\
-x_1 - 2x_2 &\geq -3 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

(b) 最小化 $x_1 + 3x_2$

条件
$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 &\geq 2 \\
x_1 + x_2 &\geq 1 \\
x_1 + 2x_2 &\geq -1 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

問 4： 右の線形計画問題について考える．

[1] この問題に対して単体法を使って最適解を求めよ．ただし，**最小添字規則を使う**とともに，**各反復で用いた辞書やピボット演算で入れ替えた変数**を明記すること．

（ヒント：初期辞書は許容辞書である）

[2] この問題の実行可能領域（実行可能解全体の集合）を図示せよ．また，[1]の単体法の計算過程で得られた基底解が，図示した実行可能領域のどの点に対応するか，説明せよ．

[3] この問題の双対問題を書け．また，相補性条件を全て書け．

[4] **相補性条件を利用**して，双対問題の**最適解をすべて**計算せよ．

最小化 $-x_1 - x_2$

条件
$$
\begin{aligned}
-x_1 \qquad &\geq -1 \\
-2x_1 - x_2 &\geq -3 \\
-x_2 &\geq -1 \\
x_1 \geq 0, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$