

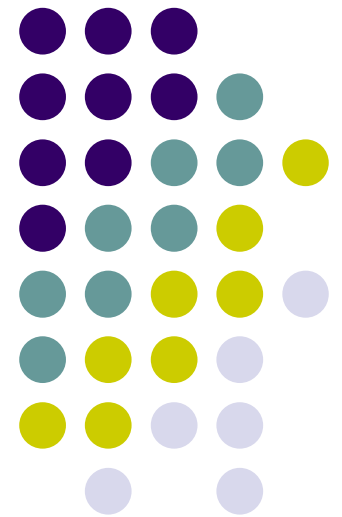
数理計画法 第5回

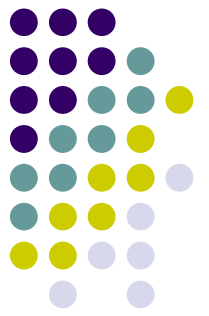
2段階単体法

担当： 塩浦昭義

(情報科学研究科 准教授)

shioura@dais.is.tohoku.ac.jp





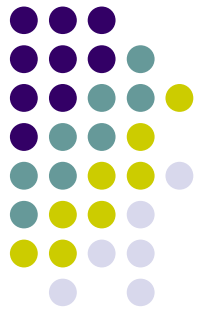
今後の予定

今月はすべて総合研究棟110講義室での講義になります

- 11/15 第6回目 --- 組合せ計画
- 11/22 第7回目 --- ネットワーク計画その1
- 11/29 第8回目 --- 中間試験

※レポート未提出の場合、中間試験は受験できません。

単体法の問題点

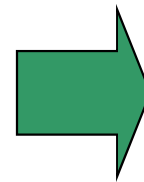


- 反復回数は有限回か？

巡回(cycling) — 同じ辞書が繰り返し現れること

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

$$\begin{array}{l} \text{最小化} \quad -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{条件} \quad -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ \quad \quad -2x_1 \quad \quad -4x_3 \geq -4 \\ \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 = 4 - 2x_1 \quad \quad -4x_3 \end{array}$$

巡回の例



		x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

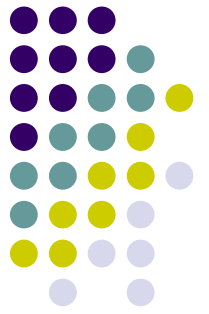
		x_1	x_6	x_3
z	0	$7/3$	$-2/3$	$1/3$
x_4	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$
x_5	0	$-14/3$	$1/3$	$-5/3$
x_2	0	$5/3$	$-1/3$	$2/3$

		x_1	x_6	x_4
z	0	2	-1	-1
x_3	0	-1	-1	-3
x_5	0	-3	2	5
x_2	0	1	-1	-2

		x_5	x_2	x_3
z	0	$1/3$	$7/3$	$-2/3$
x_4	0	$2/3$	$5/3$	$-1/3$
x_1	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$
x_6	0	$-5/3$	$-14/3$	$1/3$

		x_5	x_2	x_4
z	0	-1	-1	2
x_3	0	2	5	-3
x_1	0	-1	-2	1
x_6	0	-1	-3	-1

		x_5	x_6	x_4
z	0	$-2/3$	$1/3$	$7/3$
x_3	0	$1/3$	$-5/3$	$-14/3$
x_1	0	$-1/3$	$2/3$	$5/3$
x_2	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$



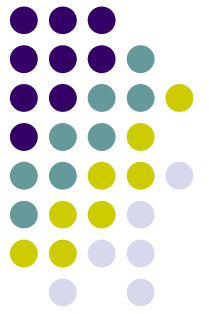
単体法と巡回

- 基底・非基底変数が決まると、辞書は一意に定まる
- 基底・非基底変数の組合せは有限個

- 単体法は辞書を繰り返し生成する
- 単体法が終了しない→辞書が無限に生成される
 - 同じ辞書が何回も現れる
 - 巡回が起こっている

注意: 巡回が起こっているときは目的関数値が変化しない

最小添字規則



ピボット演算のとき、

最小添字規則 (smallest subscript rule) を適用

⇒ 有限反復で終了

基底に入る
変数の候補

- ステップ1にて **係数が負の非基底変数** が複数存在

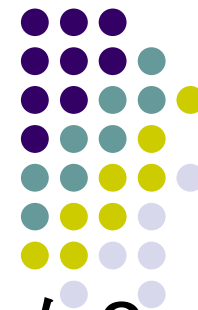
⇒ **添字最小** のものを選択

基底から出る
変数の候補

- ステップ2にて **値が0に減少する基底変数** が複数存在

⇒ **添字最小** のものを選択

最小添字規則の適用例



入る変数の候補

x_1 はどれだけ増やせるか?

出る
変数
の候補

	x_1	x_2	x_3	
z	0	-1	2	-1
x_4	0	-2	1	-1
x_5	0	-3	-1	-1
x_6	0	5	-3	2

$$x_4: 0 \rightarrow 0 - 2\alpha$$

$$x_5: 0 \rightarrow 0 - 3\alpha$$

$$x_6: 0 \rightarrow 0 + 5\alpha$$

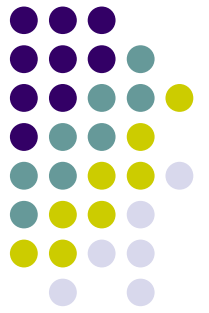
$\therefore \alpha$ は最大 0

そのとき $x_4 = x_5 = 0$

注意: x_6 は増加するので、

出る変数の候補ではない!

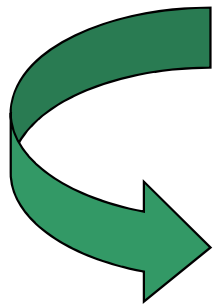
最小添字規則の適用例(つづき)



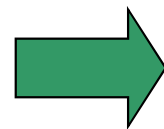
入る変数の候補

出る変数の候補

	x_1	x_2	x_3
z	0	-1	2
x_4	0	-2	1
x_5	0	-3	-1
x_6	0	5	-3

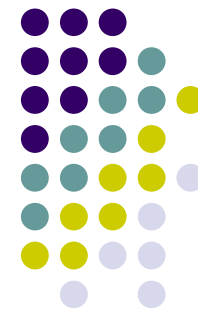


	x_4	x_2	x_3
z	0	$1/2$	$3/2$
x_1	0	$-1/2$	$1/2$
x_5	0	$3/2$	$-5/2$
x_6	0	$-5/2$	$-1/2$



最適

	x_4	x_2	x_1
z	0	1	1
x_3	0	-1	-2
x_5	0	1	-1
x_6	0	-2	1



2段階単体法

単体法の問題点

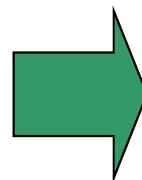
- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化 $-2x_1 - x_2$

条件 $-2x_1 - x_2 \geq 3$

$-2x_1 + 3x_2 \geq -4$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



$z = 0 - 2x_1 - x_2$

$x_3 = -3 - 2x_1 - x_2$

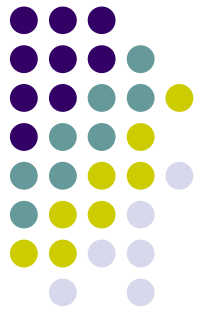
$x_4 = 4 - 2x_1 + 3x_2$

実は実行不可能なLP

基底解(0,0,-3,4)は
許容解でない

- そもそも、LPの実行可能、不可能はどうやって判定する？

2段階単体法の流れ



- 任意のLPに適用可、実行可能性も判定
- 単体法を2回使用

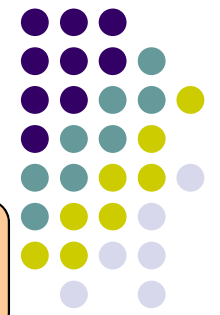
1段階目: 実行可能性の判定

- **補助問題**を作成
 - 単体法を適用、元の問題の実行可能性を調べる
 - 許容解をもたない⇒終了
 - 許容解をもつ⇒許容辞書を出力、2段階目へ

2段階目: 非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

補助問題の作り方



元の問題



補助問題

人工変数

最小化 $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$

条件 $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$

...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$

$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

最小化 x_a

条件 $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_a \geq b_1$

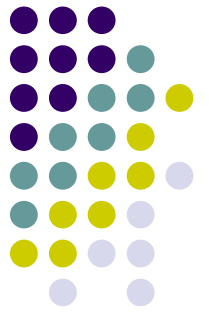
...

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_a \geq b_m$

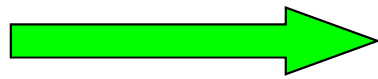
$x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_a \geq 0$

- 大きな x_a に対して (x_1, \dots, x_n, x_a) は許容解
- 元の問題が実行可能 \Leftrightarrow 補助問題の最適値 = 0
- (x_1, \dots, x_n) : 元の問題の許容解
 $\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n, 0)$: 補助問題の許容解

補助問題の解き方(その1)



元問題



補助問題

最小化 $-x_1 - 2x_2$

条件 $-x_1 - x_2 \geq -1$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

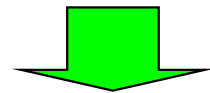
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

最小化 x_a

条件 $-x_1 - x_2 + x_a \geq -1$

$$x_1 + x_2 + x_a \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_a \geq 0$$



初期辞書

$$z_a = \quad \quad \quad x_a$$

$$z = \quad -x_1 - 2x_2$$

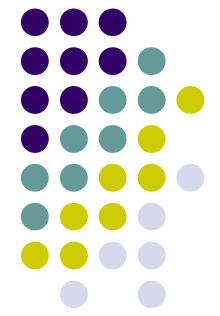
$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 + x_a$$

$$x_4 = -1 + x_1 + x_2 + x_a$$

負の値なので
許容辞書ではない

元問題の目的
関数も追加

補助問題の解き方(その2)



許容でない初期辞書

→ ピボット演算により許容辞書へ

$$z_a = 0 \quad x_a$$

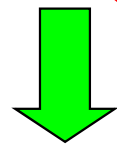
$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 + x_a$$

$$x_4 = -1 + x_1 + x_2 + x_a$$

- 非基底変数 x_a を基底に入れる
- 基底変数の式の定数項を比較
- 定数項最小の基底変数を

基底から出す



x_a と x_4 を入れ替え

⇒ 許容辞書が得られる

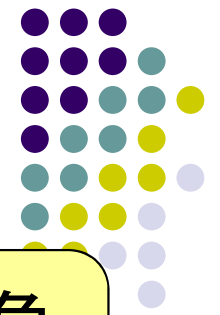
$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

補助問題の解き方(その3)



許容辞書が得られた

→ 単体法で最適解を求める

係数が全て非負
なので最適

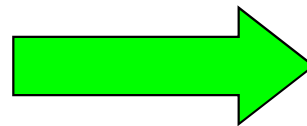
$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

x_1 と x_a を
入れ替え



$$z_a = 0 + x_a$$

$$z = -1 + x_a - x_2 - x_4$$

$$x_3 = 0 + 2x_a - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_a - x_2 + x_4$$

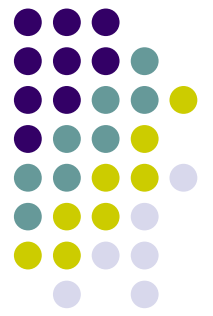
• 補助問題の最適値 $z_a = 0 \Rightarrow$ 元問題は実行可能

• 現在の基底解 $(1, 0, 0, 0)$: 元問題の許容解

• x_a が非基底変数

\Rightarrow 最終辞書から x_a, z_a を削除すると元問題の許容辞書

補助問題の解き方(その4)



最終辞書で x_a が基底に入っている場合は？

係数が全て非負なので最適

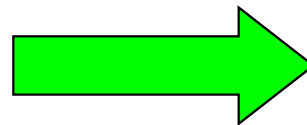
$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

x_1 と x_3 を
入れ替え



$$z_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

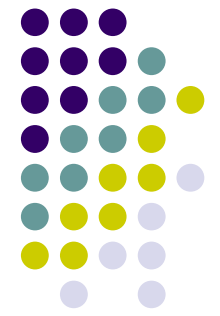
$$z = -1 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 - x_2 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

元問題の許容辞書をどうやって求めるか？

補助問題の解き方(その5)



最適辞書において x_a が基底に入っている

→ ピボット演算で x_a を基底から出す

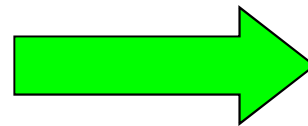
$$z_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$z = -1 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 - x_2 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

x_3 と x_a を
入れ替え



$$z_a = 0 + x_a$$

$$z = -1 + x_a - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_a - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 + 2x_a - x_4$$

x_a が非基底にある

⇒ x_a, z_a を削除すると

元問題の許容辞書

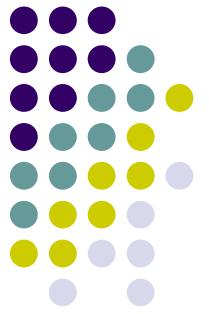
係数が非ゼロの
変数と x_a を入れ替え

$$z = -1 - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

2段階単体法の2段階目



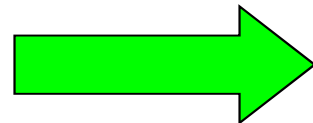
1段階目で得られた許容辞書に
単体法を適用

$$z = -1 - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

x_2 と x_1 を
入れ替え

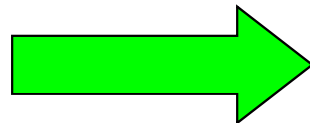


$$z = -2 + x_1 - 2x_4$$

$$x_2 = 1 - x_1 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

x_4 と x_3 を
入れ替え



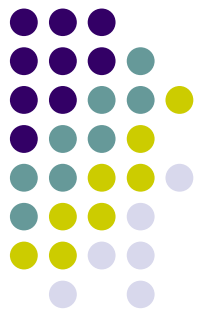
$$z = -2 + x_1 + 2x_3$$

$$x_2 = 1 - x_1 - x_3$$

$$x_4 = 0 - x_3$$

最適解 $(0, 1, 0, 0)$ が得られた

2段階単体法の流れ



- 入力: 不等式標準形のLP

- 1段階目: 実行可能性の判定

- 補助問題に単体法を適用、

元問題の実行可能性を調べる

許容解をもたない \Rightarrow 終了

許容解をもつ \Rightarrow 許容辞書を出力、2段階目へ

- 2段階目: 非有界性判定、最適解の検出

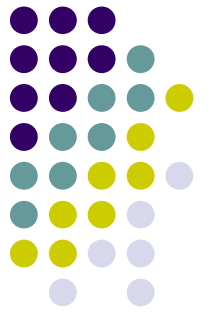
- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

非有界 \Rightarrow 終了

有界 \Rightarrow 最適解を出力

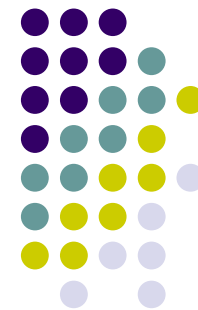
∴ 実行可能で有界なLPは最適解をもつ(基本定理)

双対定理



定理2.3 (双対定理, duality theorem) :
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒ 他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

以下では、具体例を使って証明の流れを説明する



双対定理の証明(その1)

主問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} & -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{条件} & -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\ & -2x_1 \quad \quad - 4x_3 \geq -4 \\ & 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

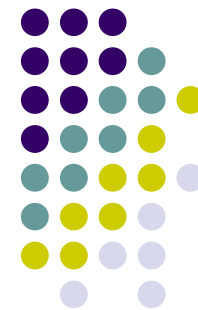
初期辞書

$$\begin{aligned} \text{最小化} & z \\ \text{条件} & z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ & x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ & x_5 = 4 - 2x_1 \quad \quad - 4x_3 \\ & x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

双対問題

$$\begin{aligned} \text{最大化} & -4y_1 - 4y_2 - y_3 \\ \text{条件} & -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2 \\ & -2y_1 \quad \quad - 3y_3 \leq -1 \\ & y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- 主問題のスラック変数
 - 主問題の制約
 - 双対問題の変数
- の間の1対1対応
- $$\begin{aligned} x_4 & \leftrightarrow \text{第1制約} \leftrightarrow y_1 \\ x_5 & \leftrightarrow \text{第2制約} \leftrightarrow y_2 \\ x_6 & \leftrightarrow \text{第3制約} \leftrightarrow y_3 \end{aligned}$$



双対定理の証明(その2)

主問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} & -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{条件} & -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\ & -2x_1 \quad \quad - 4x_3 \geq -4 \\ & 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

初期辞書

$$\begin{aligned} \text{最小化} & z \\ \text{条件} & z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ & x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ & x_5 = 4 - 2x_1 \quad \quad - 4x_3 \\ & x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

主問題の最適解は

$$x_1^* = 2, x_2^* = 0, x_3^* = 0, \text{最適値} = -4$$

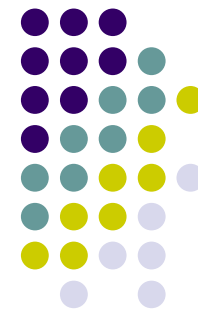
最終辞書

$$\begin{aligned} z &= -4 + (3/5)x_4 + (1/5)x_2 + (2/5)x_5 \\ x_1 &= 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5 \\ x_3 &= 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5 \\ x_6 &= 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5 \end{aligned}$$

$$y_1^* = \frac{3}{5}, y_2^* = \frac{2}{5}, y_3^* = 0$$

が双対問題の許容解,
目的関数値 = -4

となることを示せば証明終了(弱双対定理より)



双対定理の証明(その3)

$$\begin{array}{ccc} x_4 & & x_5 & & x_6 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_1^* = \frac{3}{5}, & y_2^* = \frac{2}{5}, & y_3^* = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} x_1 & & x_2 & & x_3 \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_4^* = 0, & y_5^* = \frac{1}{5}, & y_6^* = 0 \end{array}$$

が双対問題の許容解,

目的関数値 = -4

となることを示す

と便宜上おく

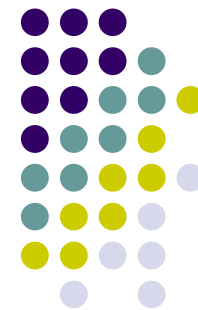
最終辞書

$$\begin{aligned} z &= -4 + \boxed{\frac{3}{5}}x_4 + \boxed{\frac{1}{5}}x_2 + \boxed{\frac{2}{5}}x_5 \\ x_1 &= 2 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_2 - \frac{1}{10}x_5 \\ x_3 &= 0 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_5 \\ x_6 &= 9 - \frac{7}{5}x_4 - \frac{29}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_5 \end{aligned}$$

最終辞書なので,
z の式の係数は非負
→ y_i^* はすべて非負

z の式の右辺を書き換える

$$\begin{aligned} z &= -4 + (y_1^*x_4 + y_5^*x_2 + y_2^*x_5) + (y_4^*x_1 + y_6^*x_3 + y_3^*x_6) \\ &= -4 + y_4^*x_1 + y_5^*x_2 + y_6^*x_3 + y_1^*x_4 + y_2^*x_5 + y_3^*x_6 \end{aligned}$$



双対定理の証明(その4)

最終辞書

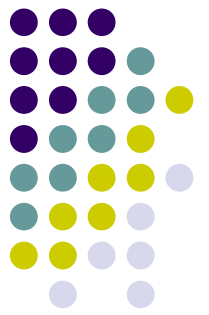
$$z = -4 + y_4^*x_1 + y_5^*x_2 + y_6^*x_3 + y_1^*x_4 + y_2^*x_5 + y_3^*x_6$$
$$x_1 = 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5$$
$$x_3 = 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5$$
$$x_6 = 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5$$

$(x_1, x_2, \dots, x_6, z)$ は
最終辞書の解 \leftrightarrow 初期辞書の解

初期辞書

$$z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$
$$x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3$$
$$x_5 = 4 - 2x_1 - 4x_3$$
$$x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3$$

初期辞書の4つの式を
最終辞書のzの式に代入



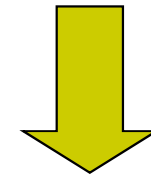
双対定理の証明(その5)

最終辞書の z の式

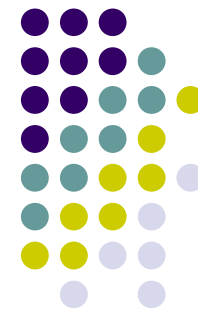
$$\text{左辺} = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= -4 + \{y_1^*(4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ &\quad + y_2^*(4 - 2x_1 - 4x_3) \\ &\quad + y_3^*(1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3)\} \\ &\quad + (y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3) \\ &= (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*) \\ &\quad + (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)x_1 \\ &\quad + (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*)x_2 \\ &\quad + (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)x_3 \end{aligned}$$

この式は恒等式,
任意の x_1, x_2, x_3 に対して成り立つ
→ 両辺の各項の
係数, 定数は等しい



$$\begin{aligned} 0 &= (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*) \\ -2 &= (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*) \\ -1 &= (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*) \\ -1 &= (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*) \end{aligned}$$



双対定理の証明(その6)

$$0 = (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*) \quad \longrightarrow \quad -4y_1^* - 4y_2^* - y_3^* = -4$$

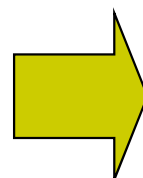
双対問題において

(y_1^*, y_2^*, y_3^*) の**目的関数値** = -4

$$-2 = (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)$$

$$-1 = (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*)$$

$$-1 = (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)$$



y_4^*, y_5^*, y_6^* は非負なので

$$-2 \geq -2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*$$

$$-1 \geq -2y_1^* - 3y_3^*$$

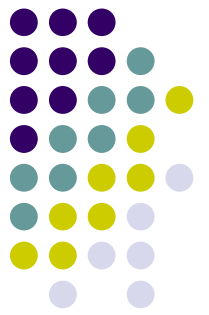
$$-1 \geq y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*$$

(y_1^*, y_2^*, y_3^*) は

双対問題の許容解

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$
条件 $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$
 $-2y_1 - 3y_3 \leq -1$
 $y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1$
 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

双対定理の証明終わり



今日のレポート問題

問1: 右の辞書に最小添字規則を適用して解きなさい。

	x_1	x_2	x_3	
z	0	-1	2	-1
x_4	6	-2	2	0
x_5	3	-1	-1	2
x_6	3	-1	-1	-1

問2: 次の線形計画問題を二段階単体法で解きなさい。

(a) 最小化 $-3x_1 - 2x_2$
条件 $2x_1 - x_2 \geq -1$
 $-x_1 + 2x_2 \geq 4$
 $-x_1 - x_2 \geq -2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(b) 最小化 $-3x_1 - 2x_2$
条件 $2x_1 - x_2 \geq -1$
 $-x_1 + 2x_2 \geq 0$
 $x_1 + x_2 \geq 2$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

問3: 講義に対する感想、意見、要望を自由に書いてください。