2012 年度 数理計画法 期末試験問題 [50 点満点]

2013 年 1 月 24 日(木) 13 時 00 分～14 時 30 分 (90 分)

問 1

(1)： 関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は，任意のベクトル$x, y \in \mathbb{R}^n$と任意の実数 $t\,(0 \le \mathrm{t} \le 1)$ に対して不等式

$$(1-t)f(x) + tf(y) \ge f((1-t)x + ty)$$

が成り立つとき，凸関数と呼ばれる．

(1-a)： 凸関数**ではない**関数の**具体例**を一つ書け．

(1-b)： 凸関数に関して次の定理が知られている：

定理Ａ：微分可能な関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が凸関数であることの必要十分条件は，
任意のベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して不等式 $f(y) \ge f(x) + \nabla f(x)(y-x)$ が成り立つことである．

この**定理Ａを使って**，$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$ が凸関数であることを証明せよ．

(1-c)： 微分可能な凸関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し，f の停留点 $x^* \in \mathbb{R}^n$ は f に関する制約なし最小化問題の最適解である．このことを，**定理Ａを使って証明せよ**．

(2)： 微分可能な関数に関して次の定理が知られている：

定理Ｂ：微分可能な関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ およびベクトル $y \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\nabla f(y) \ne 0$ ならば，
十分小さい実数 $\delta > 0$ が存在して，$f\big(y - \delta\nabla f(y)\big) < f(y)$ が成り立つ．

この**定理Ｂを使って**，関数 f の制約なし最小化問題の最適解 x^* が停留点であることを証明せよ．

問 2 関数 $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^4 - \frac{1}{3}x_2^3$ について考える．

(1)： 関数 f の勾配ベクトル$\nabla f(x_1, x_2)$とヘッセ行列 $\mathrm{H}f(x_1, x_2)$ を計算せよ．
ヒント： $\nabla f(-1,2) = (-6,6)$ となります．

(2)： 関数 f に対して，初期点を $(x_1, x_2) = (0,1)$ として最急降下法を適用したときの，次の点を計算せよ．計算の過程，とくに移動方向やステップサイズも書くこと．

(3)： 関数 f の$(x_1, x_2) = (0,-1)$ におけるニュートン方向（移動方向）を計算せよ．

ヒント：行列$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ が正則のとき，その逆行列は $\frac{1}{ac-b^2}\begin{bmatrix} c & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$ である．

(4)： 関数 f の停留点をすべて計算せよ．

(5)： 問(4)で求めた停留点に対し，ヘッセ行列を計算せよ．

(6)： 問(5)で求めたヘッセ行列を使って各停留点が極小解か否かを判定し，その理由を書け．

ただし，次の性質を使うこと：

定理Ｃ：ベクトルx は関数fの停留点とする．このとき，次が成り立つ．
（i）ベクトルxでのヘッセ行列が正定値ならば，xは極小解である．
（ii）ベクトルxが極小解ならば，xのヘッセ行列は半正定値である．

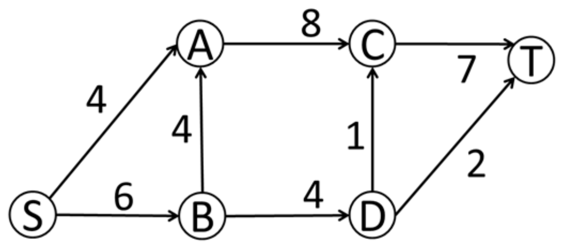
定理Ｄ：

（i）行列$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ は半正定値⇔ $a \ge 0, c \ge 0, ac - b^2 \ge 0$

（ii）行列$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ は正定値⇔ $a > 0, c > 0, ac - b^2 > 0$

（次のページに続く）

問 3

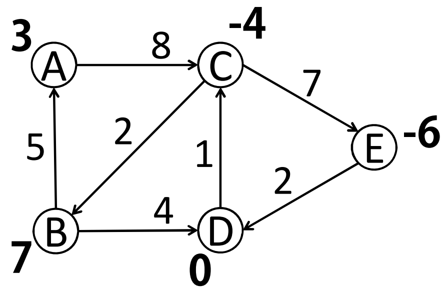


(1)： 右のネットワークにおいて，ソース（供給点）S からシンク(需要点)T への最大フローを**フロー増加法により**求めよ．各反復でのフローの値，残余ネットワーク，および用いた増加パスを省略せずに書くこと．

(2)： 問(1)で求めた最大フローの残余ネットワークを使って，右のネットワークの最小カットを計算せよ．

(3)： **一般の**最大流問題について考える．最大フローに対する残余ネットワークにおいて，ソース S から到達可能な頂点すべての集合を X とおくと，X にはシンク T が含まれないことを証明せよ．

問 4



(1)： 各頂点に与えられた需要供給量を満たすフローを求める問題は，最大流問題に帰着して解くことができる．右の図に示したネットワークの例に対し，どのような最大流問題を作ればよいか，説明せよ（実際にフローを求める必要はない）．なお，右のネットワークにおいて，枝に付随する数値は容量，頂点に付随する数値は需要供給量を表す．

(2)： 下図の左側のネットワークの最小費用流を，**負閉路消去法を使って**計算せよ．ただし，**初期フローは下図の右側のように与えられる**とする．各反復でのフローの値，残余ネットワーク，および用いた負閉路を省略せずに書くこと．なお，左側のネットワークに置いて枝に付随する数値は「容量，費用」を表し，各頂点に付随する数値は需要供給量を表す．

ヒント：最小費用フローの総費用は８２となる．