2011年度 数理計画法 中間試験問題 [50点満点]

2011年12月8日(木)13時00分～14時30分 (90分)

問1（数理計画問題の定式化，分枝限定法）

(1)：次の(a)，(b)に述べられた問題を数理計画問題として定式化せよ．定式化の際には，**1つ1つの式が何を意味するのか，簡単に説明せよ**．なお，**問題の最適解を求める必要はない**．また，定式化して得られた問題が線形計画問題，ネットワーク計画問題，非線形計画問題，組合せ計画問題の何れに当てはまるかを述べると共に，**その理由**を簡単に説明せよ．

(a)：ヨーロッパのとあるワイン製造会社では，3 種類のぶどう G1，G2，G3 を原材料として，赤，白，ロゼの3種類のワインを生産している．各ワインを1樽（たる）分だけ生産することによって得られる利益と，1樽分を生産するために必要なぶどうの量は表の通りである．ただし，各々のぶどうの最大供給量は決まっており，G1は4トン，G2は8トン，G3 は 6 トンとなっている．このとき，総利益を最大にするような各ワインの生産量を決定せよ．

ワインの種類	1樽分を生産するのに必要なぶどうの量（単位：トン）			1樽当りの利益（単位：1万ユーロ）
	G1	G2	G3	
赤	2	1	0	4
白	0	0	3	6
ロゼ	0	2	1	3

(b)：仙台のとあるライブハウスでは音楽イベントの企画を検討している．このイベントでは，n 組のアーティストの中から何組かを選び，公演してもらう予定である．ただし，イベントの総時間は b 時間と決まっており，またアーティストのギャラ（報酬）に使える金額は全部で c 万円となっている．各アーティストを番号 1, 2, ⋯, n により表したとき，j 番目のアーティスト(j=1, 2, ⋯, n)の公演時間は t_j 時間，ギャラは c_j 万円となっていて，またファン（聴衆）の数は f_j 人と言うことがわかっている．このとき，公演時間とギャラの制限の下で，招待するアーティストをうまく選んで，ファンの数の合計が最大になるようなイベントの計画を立てたい．どうしたらよいか？なお，（よくあることではあるが）ファンの人々は，特定の1組のアーティストのみを好み，他のアーティストは好きではないと仮定する．

(2)：組合せ計画問題に対する分枝限定法がどのような解法であるか，説明せよ．必ずしも長く説明する必要はなく，**重要なポイントを押さえて**簡潔に記述すること．

問2（線形計画問題の基底解）

右の線形計画問題(A)について考える．

(A) 目的関数：$-2x_1 - 3x_2$ →最小化
制約条件：$3x_1 + 2x_2 \leq 12$
$x_1 + 2x_2 \leq 8$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(1)：問題(A)を図示せよ．ただし，横軸を変数x_1の軸，縦軸を変数x_2の軸とすること．また，**実行可能解の集合のところは斜線を引く**とともに，目的関数の等高線を書いて，**最適解がどこに位置するか明記せよ**．

(2)：問題(A)を標準形に書き換えよ．**結果のみ書けば良い**．

(3)：線形計画問題の標準形における基底解の定義を書け．必要であれば，(2)の結果を使っても良い．

(4)：問題(A)の（標準形の）基底解を全て求めよ．また，各々の基底解に対して，その基底解が(1)で求めた図の中のどの点に対応するか，説明せよ．

（次のページに続く）

問 3（線形計画問題の双対性）

右の線形計画(B)について考える．ここで，x_1, x_2は変数であり，$c_1, c_2, b_1, b_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$は与えられた定数（実数）である．

(B) 目的関数：$c_1x_1 + c_2x_2 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件：

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

(1)：問題(B)の双対問題を書け．結果のみ書けば良い．

(2)：問題(B)とその双対問題に対する弱双対定理の主張を書け．

(3)：問題(B)が非有界ならば，その双対問題は実行可能解をもたない．この性質を，弱双対定理を使って証明せよ．

(4)：(1)で得られた双対問題を標準形に書き直せ．結果のみ書けば良い．

(5)：(4)で得られた標準形の線形計画問題に対し，その双対問題を書け．結果のみ書けば良い．

(6)：(5)で得られた線形計画問題は，元の問題(B)と等価である．その理由を説明せよ．

問 4（シンプレックス法）

以下の２つの線形計画問題(C)，(D)に対し，変数x_1, x_2を**非基底**変数としたときの基底解が最適か否かを判定せよ．基底解が最適な場合には，**最適性を証明**せよ．また，基底解が最適でない場合には**ピボット操作を１回**行って基底解を改善せよ．

(C) 目的関数：$-3 + 2x_1 + 5x_2 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件：

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2$$
$$x_4 = 1 - 2x_1 + 3x_2$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

(D) 目的関数：$-3 - x_1 - x_2 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件：

$$x_3 = 2 - 2x_1 - x_2$$
$$x_4 = 2 - x_1 - 2x_2$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

問 5（二段階シンプレックス法）

(1)：二段階シンプレックス法においては，与えられた線形計画問題の実行可能解の存在性を判定するために，人工問題と呼ばれる問題を作成し，シンプレックス法で解く．以下の問に答えよ．

(a)：右の線形計画問題(E)を例に使って，人工問題の作り方を説明せよ．

(b)：人工問題をシンプレックス法で解いた結果，どのように実行可能解の存在性を判定するのか，説明せよ．また，そのやり方によってなぜ判定できるのか，理由を説明せよ．

(E) 目的関数：$7x_1 - 5x_2 \ \rightarrow$ 最小化

制約条件：

$$2x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 = -1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

(c)：問題(E)が実行可能解をもつか否か，(b)のやり方で判定せよ．計算の過程は省略せずに書くこと．