

計算用紙 (この紙 1 枚は試験開始後に必ず切り取ってください)



学籍番号	名前

2008年度 数理計画法 中間試験問題 [50点満点]  
2008年12月4日(木) 13時00分～14時30分(90分間)

### 注意事項

1. 講義ノート、参考図書、ノート、電卓、計算機などの持込みは不可。
2. 解答は各設問の下、もしくは右側のページに書くこと。
3. 試験問題は全部でA4用紙5枚からなる。

### 試験の成績の問合せについて

次のいずれかの方法で問い合わせてください。

1. 12月11日(木)の授業時間の前後に直接聞く。本人確認のため、問合せの際は学生証を提示してください。
2. 塩浦の研究室を訪問して直接聞く。本人確認のため、問合せの際は学生証を提示してください。研究室は情報科学研究科棟8階803号室です。
3. 電子メールにて問合わせる。本人確認のため、問合せの際は東北大学でのメールアドレスを使ってメールを送信してください。携帯電話および自宅PC用のメールアドレスからのメールには返事をしません。

### 問題 1.

次の線形計画問題 [A] について考える。この問題は最適解をもつことがわかっている。

$$[A] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{最小化} & 3x_1 + 6x_2 \\ \text{条件} & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 + 4x_2 \geq 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

- (a) 問題 [A] の許容解領域を図を使って書き表しなさい。また、[A] の最適解を図中に書きなさい。
- (b) 単体法のピボット演算における最小添字規則とはどのような規則か、説明しなさい。
- (c) 上記の問題 [A] に対する初期辞書を (行列表現ではなく) 式の形で書きなさい。また、この辞書は許容辞書かどうか、説明しなさい。
- (d) 問 (c) の初期辞書に対して二段階単体法を適用し、最終辞書と最適解を求めなさい。なお、ピボット演算の際は最小添字規則を使うこと。また、途中の計算過程をきちんと書くこと。

---

### 問題 1 の解答欄

## 問題 1 の解答欄

## 問題 2.

次の線形計画問題 [B] について考える。なお、これは問題 1 の線形計画問題 [A] の双対問題である。

$$[B] \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{最大化} & 2y_1 + y_2 \\ \text{条件} & y_1 + y_2 \leq 3 \\ & y_1 + 4y_2 \leq 6 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

- (a) 問題 [B] を不等式標準形に変換しなさい。結果のみ書けば良い。
- (b) 問 (a) で得られた不等式標準形に対する初期辞書を (行列表現ではなく) 式の形で書きなさい。また、この辞書は許容辞書かどうか、説明しなさい。
- (c) 問 (b) で得られた初期辞書に対して単体法を適用し、最終辞書と最適解を計算しなさい。なお、ピボット演算の際は最小添字規則を使うこと。途中の計算過程をきちんと書くこと。
- (d) 問題 [A] のスラック変数と問題 [B] の変数  $y_1, y_2$  の間には一対一対応が存在するが、これについて説明せよ。同様に、問題 [B] のスラック変数と問題 [A] の変数  $x_1, x_2$  の間には一対一対応が存在するが、これについて説明せよ。
- (e) 問題 1(d) で得られた最終辞書と、上記の問 (c) で得られた最終辞書の関係について説明しなさい。(ヒント : (d) で得られた変数の対応関係に注意する)

---

## 問題 2 の解答欄

## 問題 2 の解答欄

### 問題 3.

次の線形計画問題 [P] とその双対問題 [D] について考える。

$$\begin{array}{l} \left[ \begin{array}{l} \text{最小化} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{条件} \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \quad \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{array} \right. \quad \left[ \begin{array}{l} \text{最大化} \quad b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\ \text{条件} \quad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\ \quad \quad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \leq c_2 \\ \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n \\ \quad \quad y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, \dots, y_m \geq 0 \end{array} \right. \end{array}$$

- (a) 問題 [P] とその双対問題 [D] に対する弱双対定理の主張を書きなさい。  
(b) 「問題 [P] の許容解と問題 [D] の許容解の目的関数値が一致するならば、それぞれの許容解はともに最適解である」ことを証明しなさい。なお、証明においては (a) で示した弱双対定理を使うこと。  
(c) 次の線形計画問題の双対問題、および相補性条件を書きなさい。

$$\left[ \begin{array}{l} \text{最小化} \quad -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ \text{条件} \quad -13x_1 - 10x_2 - 9x_3 - 17x_4 \geq -7 \\ \quad \quad -14x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 8x_4 \geq -1 \\ \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

- (d) ベクトル  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1/2, 0, 0)$  が主問題の最適解かどうかを判定しなさい。また、ベクトル  $(y_1, y_2) = (1/30, 4/15)$  が双対問題の最適解かどうかを判定しなさい。なお、最適性の証明において、上記の間 (a), (b), (c) の結果を使っても良い。

---

### 問題 3 の解答欄



### 問題 3 の解答欄

#### 問題 4.

(a) 主問題は実行不可能であり、双対問題は非有界となるような線形計画問題  $P$  とその双対問題  $D$  の対を書きなさい。ただし、それらの問題は次の条件を満たすものとする。

(\*) 主問題の変数は  $x_1, x_2$  の 2 つ、双対問題の変数は  $y_1, y_2$  の 2 つであり、いずれも非負。

なお、 $P$  が実行不可能であり、 $D$  が非有界であることに対して、説明 (もしくは証明) をきちんと書くこと。

(b) 次の問題を線形計画問題として定式化せよ。定式化に用いた変数の意味についても説明すること。定式化した問題を解く必要はない。

ある工場において、ある製品を組み立てるためのスケジュールを考えている。この製品をつくるには第 1 から第 5 までの 5 つの作業が必要であるが、作業のスケジュールは次の条件を満たす必要がある。

(1) 第 1 の作業は 1.5 時間を要する。第 1 の作業は、午前 9 時以降に開始することができる。

(2) 第 2 の作業は 2 時間を要する。第 2 の作業を開始するためには、第 1 の作業が終わっていないなければならない。第 1 の作業が終わってから第 2 の作業を開始するまでには、少なくとも 1 時間待つ必要がある。

(3) 第 3 の作業は 4 時間を要する。第 3 の作業を開始するためには、第 1 の作業が終わっていないなければならないが、第 1 の作業が終了後ただちに第 3 の作業を開始することができる。

(4) 第 4 の作業は 1.5 時間を要する。第 4 の作業を開始するためには、第 2 と第 3 の作業が終わっていないなければならない。また、第 2 の作業の終了後、1 時間以内に第 4 の作業を開始する必要がある。

(5) 第 5 の作業は 1 時間を要する。第 5 の作業を開始するためには、第 4 の作業が終わっていないなければならないが、第 4 の作業が終わってから、少なくとも 2 時間待った後に第 5 の作業を開始可能である。第 5 の作業が終了したら、製品は完成する。

以上の条件の下で、なるべく早く製品を完成させたい。もっとも早くて何時に完成させることができるだろうか？

---

#### 問題 4 の解答欄

## 問題 4 の解答欄