学籍番号	名前

2006 年度　数理計画法　期末試験問題 [50 点満点]

平成 19 年 2 月 8 日 (木) 13 時〜14 時 30 分 (９ ０分間)

注意事項

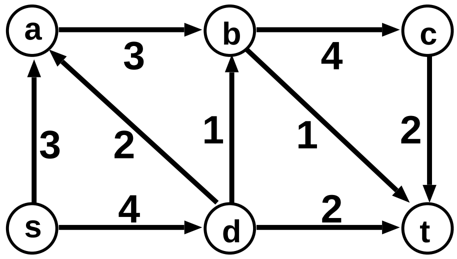
1. 講義ノート、参考図書、ノート、電卓、計算機などの持込みは不可。
2. 解答は各設問の下、もしくは右側のページに書くこと。
3. 試験問題は全部で A4 用紙 6 枚からなる。最後の 1 枚は切り取って計算用紙として使っても良い。

試験の結果と単位について

1. 単位の可否に関する問い合わせは 2 月 16 日 (金) 午後 5 時までにしてください。
2. ただし、期末試験等の得点についての問い合わせについてはいつでも答えます。

問題 1.[14 点]

右図のネットワークにおいて、頂点 s から t への最大フローを求めたい。なお、 各枝の数値はその枝の容量を表している。



(a)[3 点]　この最大フロー問題を定式化せよ。「最大化… 条件…」の形で、全ての条件を省略せずに書くこと。

(b)[3 点]　問 (a) の定式化に出てくる式を用いて、s-t カット $(S, T) = (\{s, a, b\}, \{t, c, d\})$ の容量が需要点 t に流れ込むフロー量以上であることを証明せよ。

(c)[4 点]　この問題の最大フローをパス増加法により求めよ。さらに、最大フローに関する残余ネットワークを書くとともに最小カットを求めよ。アルゴリズムの各反復において現れるフロー、残余ネットワークおよび選んだ $s-t$ パスを省略せずに書くこと。

(d)[4 点]　上記のネットワークにおいて、頂点 s, a が供給点、頂点 c, t が需要点という状況を考え、頂点 s の供給量が 4, 頂点 a の供給量が 2, 頂点 c の需要量が 4, 頂点 t の需要量が 2 とする。この需要供給を満たすフローを求める問題を最大フロー問題に帰着して解く方法について、具体的に説明せよ（実際にフローを求める必要はない)。

問題 1 の解答欄

(a) の答え

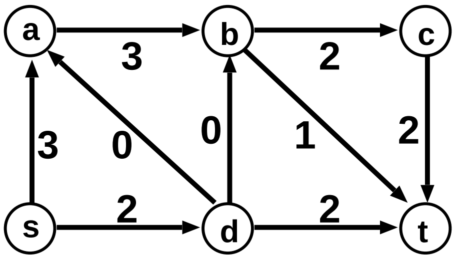
2006 年度第 5 回の講義資料 5 ページを参照。

(b) の答え

2006 年度第 6 回の講義資料 2 ページ (性質 2) を参照。

(c) の答え

最大フローの一例



(d) の答え

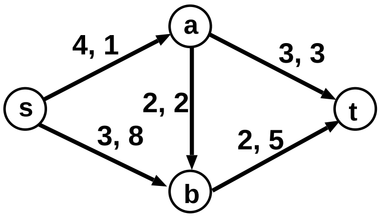
2006 年度第 6 回の講義資料 5–6 ページを参照。

問題 1 の解答欄

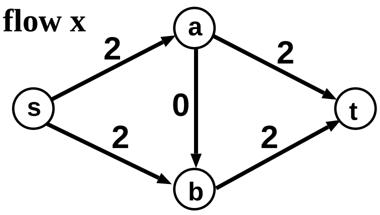
問題 2.[10 点]

(a)[2 点]　最小費用フロー問題について考える。与えられたフローが最小費用であることの必要十分条件を、「残余ネットワーク」という言葉を使って述べよ。

(b)[4 点]　左下図のネットワークにおける最小費用フローを求めたい。t における需要量 (s における供給量) は 4 とする。各枝の左側の数値は容量、右側の数値は費用を表す。右下図のフロー x を初期フローとして、負閉路消去法を用いて最小費用フローを求めよ。アルゴリズムの各反復において現れるフロー、残余ネットワークおよび選んだ負閉路を省略せずに書くこと。



flow x



(c)[4 点]　下記の研究室配属問題は、最小費用フロー問題に帰着して解くことができる。どのようにして帰着するか、説明せよ。また、2 つの問題の解（フロー）がどのような関係にあるか、説明せよ（問題を解く必要はない）。

[研究室配属問題] 4 人の学生 A, B, C, D を 2 つの研究室 X, Y に割り当てたい。ただし、各研究室の定員は 3 名までとなっている。このとき、学生の満足度の合計を最大にするにはどのように割り当てたら良いか？

満足度	A	B	C	D
研究室 X	6	8	5	9
研究室 Y	9	1	5	3

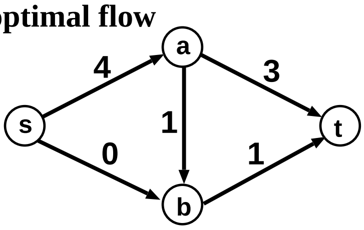
問題 2 の解答欄

(a) の答え

2006 年度第 7 回の講義資料 4 ページを参照。

(b) の答え

optimal flow



(c) の答え

2006 年度第 7 回の講義資料 7 ページを参照。

問題 2 の解答欄

問題 3.[12 点]
制約なしの非線形計画問題「最小化　$f(\boldsymbol{x})$　条件　$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$」について考える。ここで $f(\boldsymbol{x})$ は $\mathbf{R}^n$ 上で定義された、何回でも微分可能な関数とする。

(a)[4 点]　関数 $f(\boldsymbol{x})$ の停留点の定義を述べよ。また、停留点は極小解、極大解、鞍点の 3 種類に分類されるが、これらの定義についても述べよ。

(b)[1 点]　勾配ベクトルについて、「任意の $\boldsymbol{x}$ に対し、$\nabla f(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$ ならば、十分小さい $\delta > 0$ に対して $\boxed{}$」という性質が知られている。ここで、四角い空欄の中には、関数値 $f(\boldsymbol{x} - \delta \nabla f(\boldsymbol{x}))$ と $f(\boldsymbol{x})$ に関する不等式が入る。この空欄に入れるのに適切な不等式を書きなさい。

(c)[3 点]　ベクトル $\boldsymbol{x}^*$ は制約なし問題の最適解とする。このとき、$\boldsymbol{x}^*$ が停留点であることを証明せよ。問 (b) で示した勾配ベクトルの性質を使ってもよい。

(d)[4 点]　制約なしの非線形計画問題に対する最急降下法について、基本的なアイディアおよびアルゴリズムの流れを説明しなさい。

問題 3 の解答欄

(a) の答え
2006 年度第 9 回の講義資料 2–3 ページを参照。

(b) の答え
2006 年度第 9 回の講義資料 1 ページを参照。

(c) の答え
2006 年度第 9 回の講義資料 2 ページを参照。

(d) の答え
2006 年度第 9 回の講義資料 3 ページを参照。

問題 3 の解答欄

問題 4.[14 点]
制約なしの非線形計画問題「最小化　$f(\boldsymbol{x})$　条件　$\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$」について考える。ここで $f(\boldsymbol{x})$ は $\mathbf{R}^n$ 上で定義された、何回でも微分可能な関数とする。

(a)[4 点]　制約なし問題に対する「2 次の最適性条件」とは、与えられたベクトル $\boldsymbol{x}$ が極小解であることの必要条件・十分条件をヘッセ行列 $\mathrm{H}f(\boldsymbol{x})$ を用いて述べたものである。2 次の最適性条件の必要条件・十分条件を具体的に書け。

(b)[4 点]　関数 $f(x,y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{3}y^3$ について停留点をすべて求めよ。さらに、問 (a) で述べた条件を用いて、各停留点が極小解か否かを判定せよ。

(c)[4 点]　制約なしの非線形計画問題に対するニュートン法について、アルゴリズムの流れ、および最急降下法と比較したときの長所、短所を簡潔に説明しなさい。

(d)[2 点]　凸関数であって狭義凸関数でない関数の例（ただし線形関数は不可）をグラフに書け。また、書いた関数が狭義凸関数ではない理由を簡単に説明せよ。

問題 4 の解答欄

(a) の答え
2006 年度第 10 回の講義資料 3 ページを参照。

(b) の答え
停留点は $(-1,-1), (0,0), (2,2)$. 極小解は $(-1,-1), (2,2)$. $(0,0)$ においてヘッセ行列は半正定値ではないので、極小解ではない。

(c) の答え
2006 年度第 10 回の講義資料 5–6 ページを参照。

(d) の答え
2006 年度第 10 回の講義資料 7 ページを参照。

問題 4 の解答欄

計算用紙

計算用紙