**問題 1.**

(a)　**線形計画問題**とはどのような数理計画問題か？簡潔に説明しなさい。[3 点]

**解答例**：**目的関数**及び**制約**が**線形**の式によって与えられている数理計画問題．(太字の部分がポイント)

**コメント**：太字で書かれた３つのキーワードがポイント。

(b)　次の問題を線形計画問題として定式化しなさい（問題を解く必要はない）。

とある牛乳製造会社において、牧場から工場への牛乳の輸送計画案を作ることとなった。牧場は 3ヶ所 (A, B, C) あり、工場は 2ヶ所 (P, Q) ある。各牧場で一日に生産する牛乳の量は、A 牧場では 5 キロリットル、B 牧場では 8 キロリットル、C 牧場では 4 キロリットルである。一方、P 工場では一日に 10 キロリットルの牛乳を必要としており、Q 工場では 7 キロリットルが必要である。さらに、各牧場から各工場へ牛乳を輸送するとき、牛乳 1 キロリットル当りの費用は次のようになる。

| 輸送費用 (単位: 万円) | A 牧場 | B 牧場 | C 牧場 |
|---|---|---|---|
| P 工場 | 50 | 30 | 60 |
| Q 工場 | 10 | 20 | 80 |

総輸送コストを最小にするためには、各牧場から各工場へどれだけの牛乳を運べば良いだろうか？[4 点]

**解答例**：

$$
\left\|\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 50x_{AP}+30x_{BP}+60x_{CP}+10x_{AQ}+20x_{BQ}+80x_{CQ} \\
\text{条件} & x_{AP}+x_{BP}+x_{CP}\geq 10, \quad x_{AQ}+x_{BQ}+x_{CQ}\geq 7, \\
 & x_{AP}+x_{AQ}\leq 5, \quad x_{BP}+x_{BQ}\leq 8, \quad x_{CP}+x_{CQ}\leq 4, \\
 & x_{AP}\geq 0, x_{BP}\geq 0, x_{CP}\geq 0, x_{AQ}\geq 0, x_{BQ}\geq 0, x_{CQ}\geq 0
\end{array}\right.
$$

**コメント**：上記の条件のうち、１、２行目の不等式については不等号を等号に替えても可。

(c)　次の線形計画問題を不等式標準形に書き換えなさい（答えのみ書けば良い）。[4 点]

$$
\left\|\begin{array}{lcccccc}
\text{最大化} & 3x_1 & - & 2x_2 & & \\
\text{条件} & x_1 & - & x_2 & = & 4 \\
 & 2x_1 & + & 3x_2 & \leq & 5 \\
 & & & x_1\geq 0 & &
\end{array}\right.
$$

**解答例**：

$$
\left\|\begin{array}{lcccccc}
\text{最小化} & -3x_1 & + & 2(x_{21}-x_{22}) & & \\
\text{条件} & x_1 & - & (x_{21}-x_{22}) & \geq & 4 \\
 & -x_1 & + & (x_{21}-x_{22}) & \geq & -4 \\
 & -2x_1 & - & 3(x_{21}-x_{22}) & \geq & -5 \\
 & & & x_1\geq 0, x_{21}\geq 0, x_{22}\geq 0 & &
\end{array}\right.
$$

**問題 2.**

線形計画問題の主問題 [P] とその双対問題 [D] について考える。

$$
[\mathrm{P}]\left\|\begin{array}{lllll}
\text{最小化} & c_1x_1 & +c_2x_2 & +\cdots & +c_nx_n \\
\text{条件} & a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\cdots & +a_{1n}x_n\geq b_1 \\
 & a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\cdots & +a_{2n}x_n\geq b_2 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \quad \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\cdots & +a_{mn}x_n\geq b_m \\
 & x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\ \cdots, x_n\geq 0 & & &
\end{array}\right.
\qquad
[\mathrm{D}]\left\|\begin{array}{lllll}
\text{最大化} & b_1y_1 & +b_2y_2 & +\cdots & +b_my_m \\
\text{条件} & a_{11}y_1 & +a_{21}y_2 & +\cdots & +a_{m1}y_m\leq c_1 \\
 & a_{12}y_1 & +a_{22}y_2 & +\cdots & +a_{m2}y_m\leq c_2 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \quad \vdots \\
 & a_{1n}y_1 & +a_{2n}y_2 & +\cdots & +a_{mn}y_m\leq c_n \\
 & y_1\geq 0,\ y_2\geq 0\ \cdots, y_m\geq 0 & & &
\end{array}\right.
$$

(a)　線形計画問題に対する**弱双対定理**の主張を書きなさい (証明は不要)。

**解答例**：**主問題** [P] の任意の**許容解** $\boldsymbol{x}$ と**双対問題** [D] の任意の**許容解** $\boldsymbol{y}$ に対して不等式 $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_iy_i$ が成り立つ.

**コメント**：不等式に現れる $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ がどのようなベクトルであるのか，十分な説明がされていない解答が多い．次の問題 (b) についても同様.

(b)　上記の主問題 [P] が非有界ならば、双対問題 [D] は実行不可能となることが知られている。この事実を、弱双対定理を使って証明しなさい。[6 点]

**解答例**：対偶「双対問題 [D] が実行可能ならば主問題 [P] は有界」を示せば十分である。

仮定より双対問題 [D] は**ある許容解** $\boldsymbol{y}$ をもつ．その目的関数を $\alpha = \sum_{i=1}^{m} b_iy_i$ とおく．このとき，弱双対定理より，主問題 [P] の**任意の許容解** $\boldsymbol{x}$ に対して不等式 $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_iy_i = \alpha$ が成り立つ．これは，主問題 [P] の任意の許容解の目的関数値が $\alpha$ 以上であることを示している．したがって，主問題 [P] は有界である.

**問題 3.**
次の線形計画問題について考える。

$$
\left\|\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\text{最小化} & z & & & & & & & & \\
\text{条件} & z & = & 0 & - & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 \\
 & x_4 & = & 0 & - & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 \\
 & x_5 & = & 0 & - & 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 \\
 & x_6 & = & 0 & + & 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 \\
 & & & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0}
\end{array}\right.
$$

(a)　この線形計画問題を単体法で解くとき、**巡回**が起こって終了しない場合がある。巡回とはどのような現象か？また、巡回はどのような時に起こるのか？これらの点をふまえて、巡回について説明しなさい。[3 点]
**解答例**：単体法により線形計画問題を解く過程において，**同じ許容辞書が何度も繰り返し出現し**，単体法が無限ループに陥る現象を巡回と呼ぶ．巡回はピボット演算が退化しているときに起こる．とくに，ピボット演算の際に非基底から基底に入れる変数の候補や基底から非基底に出す変数の候補が複数存在するときに，実際に**出し入れする変数を適切に選ばないと巡回が起こりうる**．
**コメント**：「退化」のことは授業であまり説明しなかったので，書いてなくても可としたが，書いてあると非常に良い．

(b)　単体法において巡回を防ぐ方策のひとつとして、**最小添字規則**が知られている。どのような規則か、説明しなさい。[3 点]
**解答例**：ピボット演算の際に，非基底から基底に入れる変数の候補が複数存在するときは，添字が最小のものを選ぶ．また，基底から非基底に出す変数の候補が複数存在するときは，添字が最小のものを選ぶ．

(c)　最小添字規則を用いた単体法を使って、上記の線形計画問題を解きなさい（途中の計算過程も書くこと）。なお、２回のピボット演算により終了するはずである。[6 点]
**解答例**：教科書 40 ページの例 2.8 を参照．
**コメント**：問 (a) が出来ているのに，実際に最小添字規則を適用していない人が結構いました．

**問題 4.**
次の線形計画問題 [P] について考える。

$$
[\mathrm{P}]\left\|\begin{array}{lrcrcr}
\text{最小化} & 2x_1 & + & x_2 & & \\
\text{条件} & -x_1 & + & 2x_2 & \geq & -2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \geq & 2 \\
 & & & \multicolumn{3}{l}{x_1, x_2 \geq 0}
\end{array}\right.
$$

(a)　上記の線形計画問題 [P] の許容解を、二段階単体法の第 1 段階を使って求めなさい (最小添字規則を使う必要なし。第 2 段階を実行する必要なし)。[6 点]
(b)　上記の線形計画問題 [P] の双対問題 [D] を書きなさい（答えのみ書けば良い）。[3 点]
**コメント**：問題 2 に双対問題の一般形が書いてあるので，それを見て書けば答えが分かるサービス問題．

(c)　上記の線形計画問題 [P] の許容解 $\boldsymbol{x}$ とその双対問題 [D] の許容解 $\boldsymbol{y}$ がそれぞれ最適であるための条件として、**相補性条件**が知られている。これらの問題に関する相補性条件を具体的に書きなさい（答えのみ書けば良い）。[4 点]

**解答例**：
(1)　$-x_1 + 2x_2 = -2$ または $y_1 = 0$,
(2)　$x_1 + x_2 = 2$ または $y_2 = 0$,
(3)　$x_1 = 0$ または $-y_1 + y_2 = 2$,
(4)　$x_2 = 0$ または $2y_1 + y_2 = 1$

(d)　上記の線形計画問題 [P] の最適解は $(x_1, x_2) = (0, 2)$ である。この事実と相補性条件を使って、双対問題 [D] の最適解をひとつ求めよ（計算の過程も書きなさい）。[4 点]
**解答例**：問 3 で示した相補性条件の (2) より $x_1 + 2x_2 = 4 > 2$ なので $y_1 = 0$ が成り立つ．また，相補性条件の (4) より $x_2 = 2 > 0$ なので $2y_1 + y_2 = 1$ が成り立つ．これらの $(y_1, y_2)$ に関する連立方程式を解くと，$(y_1, y_2) = (0, 1)$ が得られる．これは双対問題の許容解なので，最適解であることが分かる．
**コメント**：答えがあっていても，解くときに相補性条件を使っていなければ駄目．