2002 年度　数理計画法　中間試験問題 [50 点満点]

問題 1.[5 点× 3 = 15 点]　次の質問に答えよ。

(a)　線形計画問題とはどのような問題か、簡潔に述べよ。

[ヒント：余り専門的な言葉を使わずに,「**...** という問題である」という形で書くこと]

(b)　線形計画問題の基本定理とは何か、簡潔に述べよ。

[ヒント：定理の主張だけ書けば良い]

(c)　単体法における最小添字規則について簡潔に述べよ。

[ヒント：規則の説明だけでなく, 何のために使うか書くこと]

問題 2.[定式化 5 点＋第 1 段階 5 点＋第 2 段階 5 点＝ 15 点]

次の問題を線形計画問題として定式化し、2 段階単体法を用いて解け。なお, 必ずしも最小添字規則を適用する必要はない。

最近のペットは運動不足・高カロリー食品の摂取のため、肥満気味のものが少なくないらしい。そこで、Ａ君の家では３種類のペットフードを混ぜてバランスの良い犬の餌を作ることにした。各ペットフードの単位当たりのカロリー・ビタミン・ミネラルの含有量と単価は下表に示された通りだ。１日当たり最低１２０、５０、８０のカロリー・ビタミン・ミネラルを摂取し、価格を最小にしたい。どのように混合すればよいか。

	カロリー	ビタミン	ミネラル	単　価
ペットフード 1	２０	２０	２０	２０
ペットフード 2	３０		３０	２１
ペットフード 3	４０	３０		２５

[ヒント：最適解は (1，2，1)，最適値は８７となる．途中のピボット演算が正しいことをチェックするには, 他の反復で得られた基底解を辞書に代入して等式が成り立つことを調べると良い]

問題 3.[5 点× 4 = 20 点]　以下の問に答えよ。

(a)　次の線形計画問題の双対問題を書け。

$$
\left\|\begin{array}{lccccccccc}
\text{最小化} & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \cdots & + & c_nx_n & & \\
\text{条件} & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \\
 & \multicolumn{9}{l}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \cdots, x_n \geq 0}
\end{array}\right.
$$

(b)　(a) の結果を使って, 次の線形計画問題 [P] の双対問題が [D] のようになることを示せ。

$$
[\mathrm{P}]\left\|\begin{array}{llllll}
\text{最小化} & c_1x_1 & + c_2x_2 & + \cdots & + c_nx_n & \\
\text{条件} & a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots & + a_{1n}x_n & \geq b_1 \\
 & a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots & + a_{2n}x_n & \geq b_2 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \cdots & + a_{mn}x_n & \geq b_m
\end{array}\right.
$$

$$
[\mathrm{D}]\left\|\begin{array}{llllll}
\text{最大化} & b_1y_1 & + b_2y_2 & + \cdots & + b_my_m & \\
\text{条件} & a_{11}y_1 & + a_{21}y_2 & + \cdots & + a_{m1}y_m & = c_1 \\
 & a_{12}y_1 & + a_{22}y_2 & + \cdots & + a_{m2}y_m & = c_2 \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 & a_{1n}y_1 & + a_{2n}y_2 & + \cdots & + a_{mn}y_m & = c_n \\
 & \multicolumn{5}{l}{y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\ \cdots, y_m \geq 0}
\end{array}\right.
$$

[ヒント：下記の手順で示せば良い. (i) [P] を不等式標準形の問題 [P′] に書き変える. (ii) (a) の結果を用いて [P′] の双対問題 [D′] を作る. (iii) [D′] の制約式を整理して [D] を得る.]

(c)　線形計画問題 [P] の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ とその双対問題 [D] の実行可能解 $\boldsymbol{y}$ に対して $\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_iy_i$ が成り立つことを証明せよ.

[ヒント：[P] と [D] は (b) に出てきた問題のことである. [P] と [D] の制約を使って示すことができる. 証明の際, どの制約をどこに使っているのかきちんと説明を書くこと.]

(d)　線形計画問題 [P] の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ とその双対問題 [D] の実行可能解 $\boldsymbol{y}$ が条件

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right)y_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

を満たすならば $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ はそれぞれの問題の最適解となることを示せ。

[ヒント：証明することは, 「条件を満たす $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が最適解であること」であり, 逆を証明しては間違いとなる. (c) で示した弱双対定理を使って証明する. これらの問題に対する双対定理や相補性定理はまだ示していないのだから使ってはならない.]