経営経済数学

凸関数

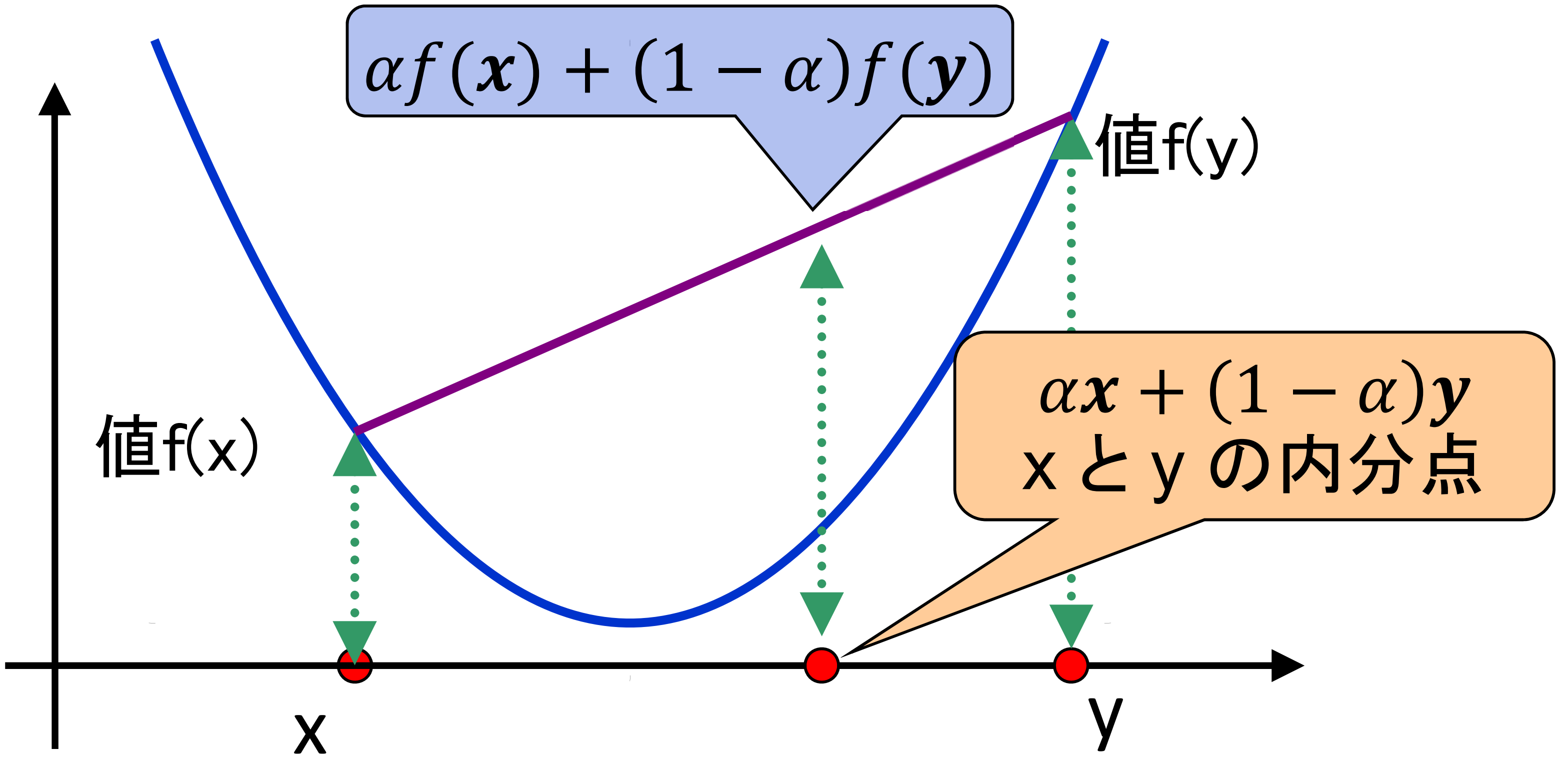
塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

凸関数の定義

定義 : 関数$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$は凸関数

$\Leftrightarrow \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \forall \alpha \leq 1,$

$$f(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \leq \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y})$$



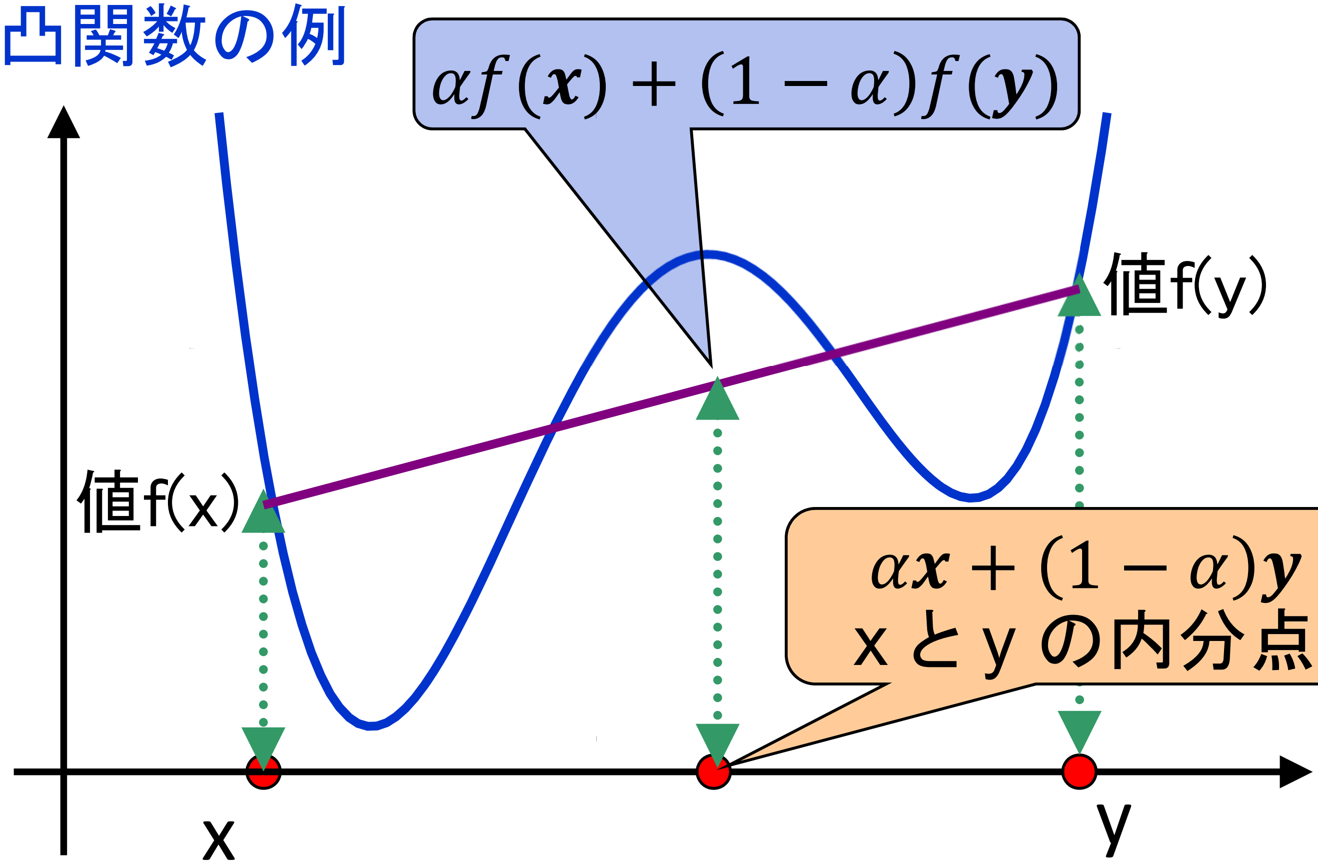
凸関数の定義(続き)

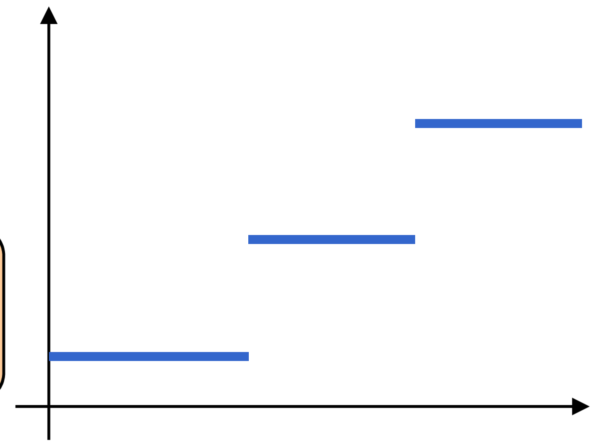
定義:関数$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$は凸関数

$\Leftrightarrow \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \forall \alpha \leq 1,$

$$f(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \leq \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y})$$

非凸関数の例





より一般的な凸関数

$S \subseteq \mathbb{R}^n$ とする

定義: 関数 $f: S \to \mathbb{R}$ は凸関数 ⟺ S は凸集合, かつ以下の条件:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S,\ 0 \le \forall \alpha \le 1,$$
$$f(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \le \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y})$$

定義: 関数 $f: S \to \mathbb{R}$ は凹関数 ⟺ $-f$ は凸関数

⟺ S は凸集合, かつ以下の条件:

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S,\ 0 \le \forall \alpha \le 1,$$
$$f\big((1-\alpha)\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}\big) \ge (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}) + \alpha f(\boldsymbol{y})$$

※凸関数, 凹関数は連続関数とは限らない

連続な凸関数の特徴付け

定義：関数$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$は凸関数

$\Leftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\ 0 \le \forall \alpha \le 1, \quad f(\alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \le \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y})$

関数 f が連続のとき，α を常に 1/2 としてもよい．

定理： 関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が連続のとき，

fは凸関数 $\Leftrightarrow$ $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\ \ f\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\right) \le \frac{f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})}{2}$

（証明の雰囲気）例えば，$\alpha = 3/4$ の場合の不等式を得るには，

$f\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\right) \le \frac{f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})}{2}$ ①

$\boldsymbol{z} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ とおいて $f\left(\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y})\right) \le \frac{f(\boldsymbol{z})+f(\boldsymbol{y})}{2}$ ②

$\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}) = \frac{3}{4}\boldsymbol{x} + \frac{1}{4}\boldsymbol{y}$ と①，②より $f\left(\frac{3}{4}\boldsymbol{x} + \frac{1}{4}\boldsymbol{y}\right) \le \frac{3}{4} f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{4} f(\boldsymbol{y})$

凸関数，凹関数の具体例

- 速度 v，質量 m の物体の運動エネルギー ＝ $(1/2)mv^2$
  v に関する凸関数
- 抵抗Rの導体にxアンペアの電流を流したときの電力＝ R x^2
  x に関する凸関数
- 半径 r の球の表面積 ＝ $4\pi r^2$，体積 ＝ $(4/3)\pi r^3$
  r に関する凸関数
- ミクロ経済学における効用関数
  「もの」を沢山もらうと，1単位当たりの「満足度」が減っていく
  ⇔ 傾きが減っていく ⇔ 凹関数

などなど，多数存在

凸関数の具体例その1

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ は凸関数（例題11.6）

$\forall(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le \forall\alpha \le 1,$

$$\alpha f(x_1, x_2) + (1-\alpha) f(y_1, y_2) - f\big(\alpha(x_1, x_2) + (1-\alpha)(y_1, y_2)\big) \ge 0$$

を示せば良い.

$$\text{左辺} = \alpha(x_1^2 + 2x_2^2) + (1-\alpha)(y_1^2 + 2y_2^2) \\ -\big((\alpha x_1 + (1-\alpha) y_1)^2 + 2(\alpha x_2 + (1-\alpha) y_2)^2\big)$$

$$\alpha x_1^2 + (1-\alpha) y_1^2 - (\alpha x_1 + (1-\alpha) y_1)^2$$

$$= \alpha x_1^2 + (1-\alpha) y_1^2 - (\alpha^2 x_1^2 + 2\alpha(1-\alpha) x_1 y_1 + (1-\alpha)^2 y_1^2)$$

$$= \alpha(1-\alpha) x_1^2 + \alpha(1-\alpha) y_1^2 - 2\alpha(1-\alpha) x_1 y_1$$

$$= \alpha(1-\alpha)(x_1 - y_1)^2 \ge 0$$

残りの項についても同様に非負　∴左辺≧0

凸関数の具体例その2

- $f(x) = e^x$ は凸関数

（証明）連続関数なので，$e^{(x+y)/2} \leq (e^x + e^y)/2$ を示せば良い.

$e^{(x+y)/2} = \sqrt{e^x \cdot e^y}$ なので，相加相乗平均より成り立つ.

- $f(x) = -\log_e x$ は(x>0 の範囲で)凸関数

（証明）連続関数なので，$-\log_e\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{-\log_e x - \log_e y}{2}$ を示せば良い.

両辺に－1を掛けると$\log_e\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\log_e x + \log_e y}{2} = \log_e \sqrt{xy}$

この不等式は相加相乗平均より成り立つ.

凸関数の演算

命題: 凸関数 $f, g: S \to \mathbb{R}$, 実数 $\alpha, \beta > 0$ に対し,

(i) 関数 $\alpha f(x) + \beta g(x)$ は凸関数

(ii) 関数 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$は凸関数

（証明）(i) は定義より簡単に示せる.

(ii): $x, y \in S, \alpha \in [0,1]$ とする.

一般性を失うことなく $h\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) = f((1-\alpha)x + \alpha y)$ と仮定.

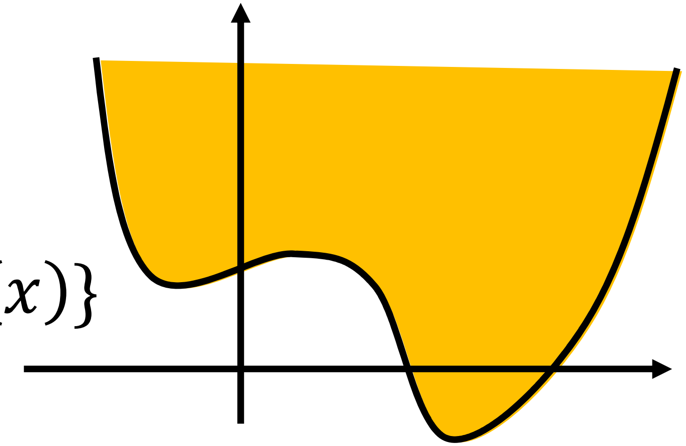
$$
\begin{aligned}
h\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) &= f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \\
&\leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \quad （f \text{ の凸性}） \\
&\leq (1-\alpha)h(x) + \alpha h(y) \quad （h \text{ の定義}）
\end{aligned}
$$

※ (i) より，有限個の凸関数の和は凸関数

(ii)より，有限個の線形関数の最大値は凸関数

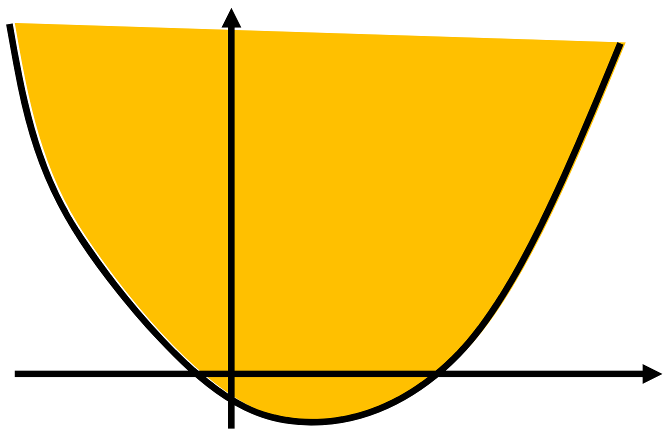
※関数 $\min\{f(x), g(x)\}$は凸関数ではない

関数のエピグラフ



定義：集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された
関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$ のエピグラフ
$\mathrm{epi}\, f$ ＝集合 $\{(x, \beta) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S,\ \beta \geq f(x)\}$

定理：集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$ の
エピグラフは凸集合 ←→ S は凸集合かつ f は凸関数



「➔」は定理11.3, 「🡐」は定理11.2
どちらも証明は比較的かんたん

※ エピグラフは閉集合とは限らない

関数のエピグラフと凸性の関係

エピグラフ $\mathrm{epi}f = \{(x,\beta) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S,\ \beta \geq f(x)\}$ が凸集合

⇔任意の $(x,\beta),(y,\gamma) \in \mathrm{epi}f$ および $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす

任意の α に対し， $(1-\alpha)(x,\beta)+\alpha(y,\gamma) \in \mathrm{epi}f$

⇔

$x,y \in S,\ \beta \geq f(x),\ \gamma \geq f(y)$ を満たす任意の $(x,\beta),(y,\gamma) \in \mathbb{R}^{n+1}$

および $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす任意の α に対し，

$$(1-\alpha)x+\alpha y \in S, \quad (1-\alpha)\beta+\alpha y\gamma \geq f((1-\alpha)x+\alpha y)$$

エピグラフが凸➔S, f が凸　の証明

（エピグラフは凸集合 ➔ S は凸集合かつ f は凸関数 の証明）
任意の $x, y \in S$ および $0 \le \alpha \le 1$ を満たす
任意の α に対し，$(1-\alpha)x + \alpha y \in S$ かつ

$$f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \le (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

を示せば良い.
これは，$(x, f(x)), (y, f(y)) \in \mathrm{epi} f$ に対して
前のスライドの事実を使えば直ちに得られる　■

エピグラフが凸🡸S, f が凸　の証明

（エピグラフは凸集合 🡸 S は凸集合かつ f は凸関数 の証明）

$x, y \in S,\ \beta \geq f(x),\ \gamma \geq f(y)$ を満たす任意の $(x, \beta), (y, \gamma) \in \mathbb{R}^{n+1}$

および $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす任意の α に対し,

$$(1-\alpha)x + \alpha y \in S, \quad (1-\alpha)\beta + \alpha\gamma \geq f((1-\alpha)x + \alpha y)$$

を示せば良い.

S は凸集合なので，$(1-\alpha)x + \alpha y \in S$ 成立.

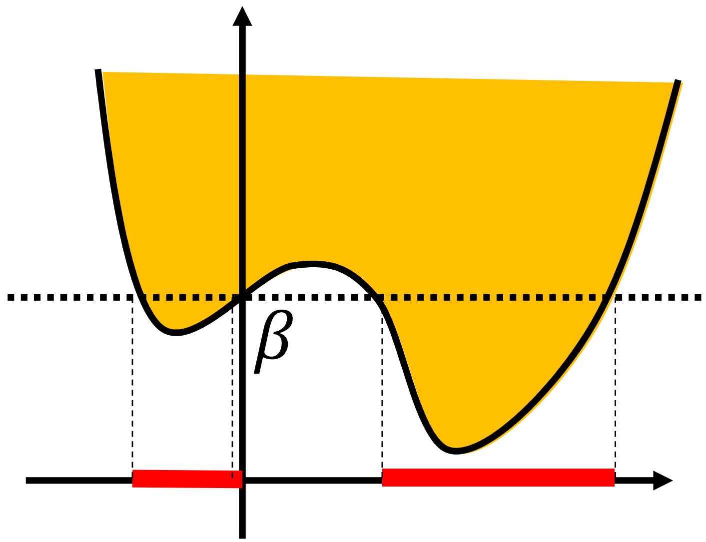
f は凸関数なので,

$$f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \leq (1-\alpha)\beta + \alpha\gamma$$

■

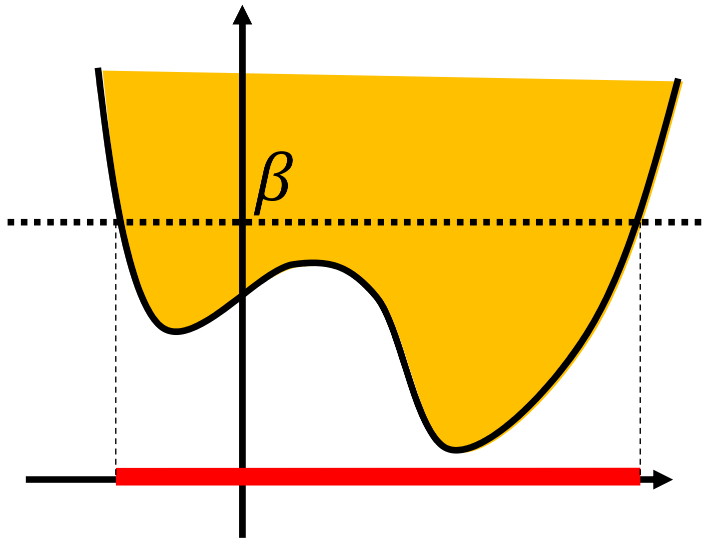
関数のレベルセット

定義 : 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された
関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$ のレベルセット
$T_f(\beta) =$ 集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in S, f(x) \leq \beta\}$



定理11.4 : 凸集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された凸関数 $f\colon S \to \mathbb{R}$ の
レベルセット $T_f(\beta)$は凸集合

※任意のβに対するレベルセットが
凸集合であっても, f は凸関数とは限らない
例: 任意の単調増加関数
→「準凸関数」の概念



関数のレベルセット

レベルセット　$T_f(\beta)$ ＝集合 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in S, f(x) \leq \beta\}$

定理11.4: 凸集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された凸関数 $f: S \to \mathbb{R}$ の
レベルセット $T_f(\beta)$は凸集合

（証明）$T_f(\beta)$ が空集合ならば，定義より凸集合.

$T_f(\beta)$ が非空のとき，

任意の $x, y \in T_f(\beta)$および $0 \leq \alpha \leq 1$ を満たす
任意の α に対し，$(1-\alpha)x + \alpha y \in T_f(\beta)$ を示せば良い.

$x, y \in T_f(\beta) \Leftrightarrow x, y \in S, f(x), f(y) \leq \beta$ なので，

S の凸性より $(1-\alpha)x + \alpha y \in S$

f の凸性より $f\big((1-\alpha)x + \alpha y\big) \leq (1-\alpha)f(x) + \alpha f(y) \leq \beta$

$\therefore\ (1-\alpha)x + \alpha y \in T_f(\beta)$　■

関数の最小化

集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で定義された関数 $f: S \to \mathbb{R}$ の最小化問題

定義: $x^* \in S$ は最小化問題の大域的最適解

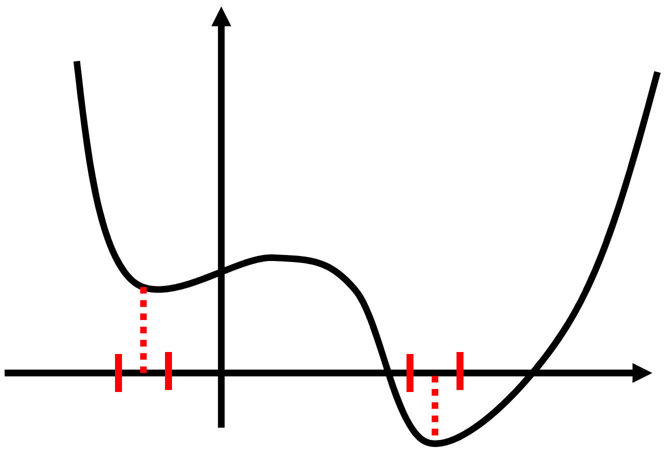
⟺ x^* は関数 f の S における最小解

⟺ $\forall x \in S, \quad f(x) \geq f(x^*)$

S 全体の中で最適

定義: $x^* \in S$ は最小化問題の局所的最適解（極小解）

⟺ $\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in S \cap B(x^*, \varepsilon), \quad f(x) \geq f(x^*)$



x^* の近傍の中で最適

凸関数の最小化

定理11.5： $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が凸集合，$f: S \to \mathbb{R}$ が凸関数の場合，

局所的最適解➔大域的最適解

（証明）背理法を使わない証明

$x^* \in S$ は局所的最適解と仮定

➔定義より，$\exists \varepsilon > 0, \quad \forall x \in S \cap B(x^*, \varepsilon), \qquad f(x) \geq f(x^*)$

f は凸関数➔ $\forall x \in S, \forall \alpha \in (0,1),$

$$f\big((1-\alpha)x^* + \alpha x\big) \leq (1-\alpha)f(x^*) + \alpha f(x)$$

$\therefore\ \alpha\{f(x) - f\big((1-\alpha)x^* + \alpha x\big)\} \geq (1-\alpha)\{f\big((1-\alpha)x^* + \alpha x\big) - f(x^*)\}$

α が十分0に近いとき，$(1-\alpha)x^* + \alpha x \in B(x^*, \varepsilon)$

$\therefore f\big((1-\alpha)x^* + \alpha x\big) - f(x^*) \geq 0$

$\therefore f(x) \geq f\big((1-\alpha)x^* + \alpha x\big) \geq f(x^*) \qquad \blacksquare$

演習問題

問1: 関数$f(x) = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ が凸関数であることを，凸関数の定義に基づき証明せよ.

問2: 凸関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が以下の条件を満たすことを証明せよ.

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R},\ \forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,$$

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) + \alpha_3 f(x_3)$$

（ヒント:３つのベクトルの凸結合に関する性質の証明）

問3: 関数$f(x, y) = x^2 + y^2$ について考える.

(1) この関数のレベルセット$T_f(\beta)$ を求めよ. ただし，$\beta \geq 0$ とする.

(2) 上記で求めたレベルセットが凸集合であることを，凸集合の定義に基づき証明せよ.