経営経済数学

凸集合

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

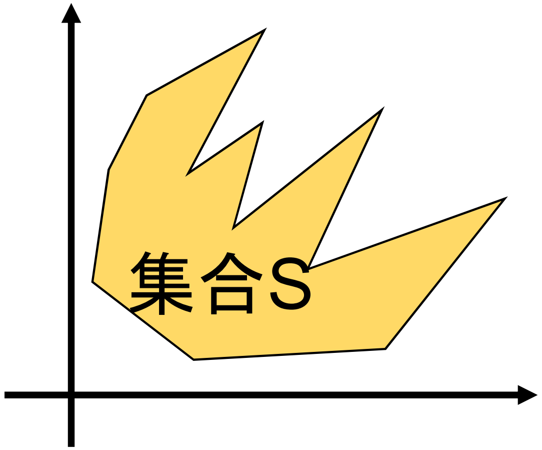
期末試験の実施要領

- 日時：7月28日（金）15:40～17:10 (90分)
- 場所：西9号館3階W9-324(W933)
  - 座席はこちらで指定
- 試験内容：第8回～第13回の授業内容
- 100点満点，40点以下は不合格（単位不可）
  - 中間試験の結果との合計÷2が60点未満の場合も不合格（レポート課題提出者は救済の可能性あり）
- 手書きのA4用紙一枚のみ持ち込み可
  - 印刷やコピーは不可
  - 試験終了後に回収します
- 本，ノート等の持ち込みは不可

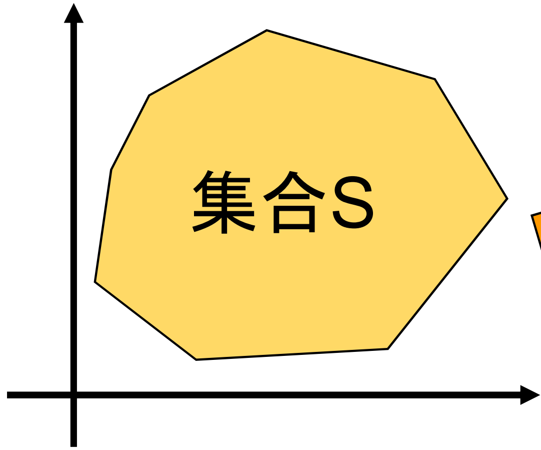
凸集合·凸関数のありがたみ

- 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ の上で関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を最小化・最大化する

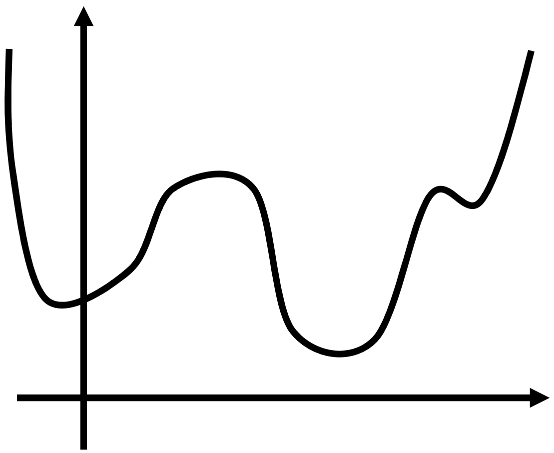
  --- S, f がどのようなときに問題が解きやすい？



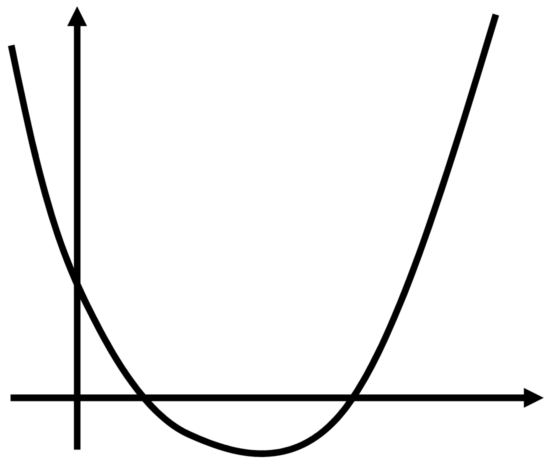
集合Sの上で
x+y の最大化



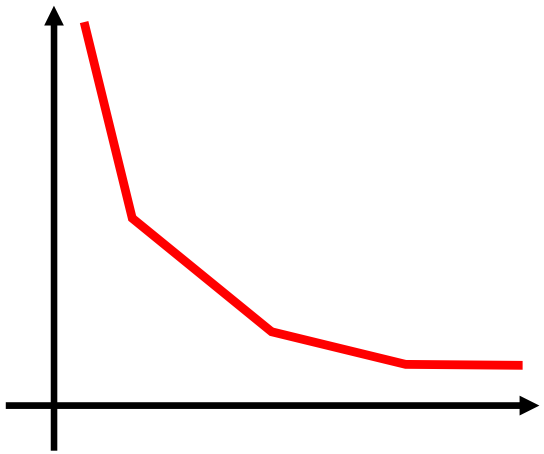
このような
集合·関数
は様々な
分野で
しばしば
現れる



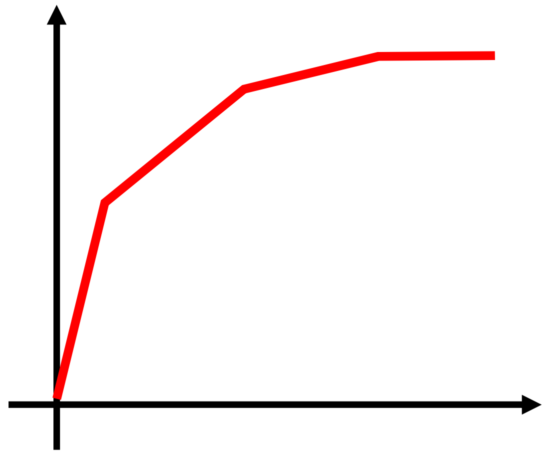
関数の最小化



凸関数・凹関数の具体例



- ある仕事を処理するための労働力と処理時間の関係



- ある商品を生産する際の生産量と~~単位~~生産コスト

総

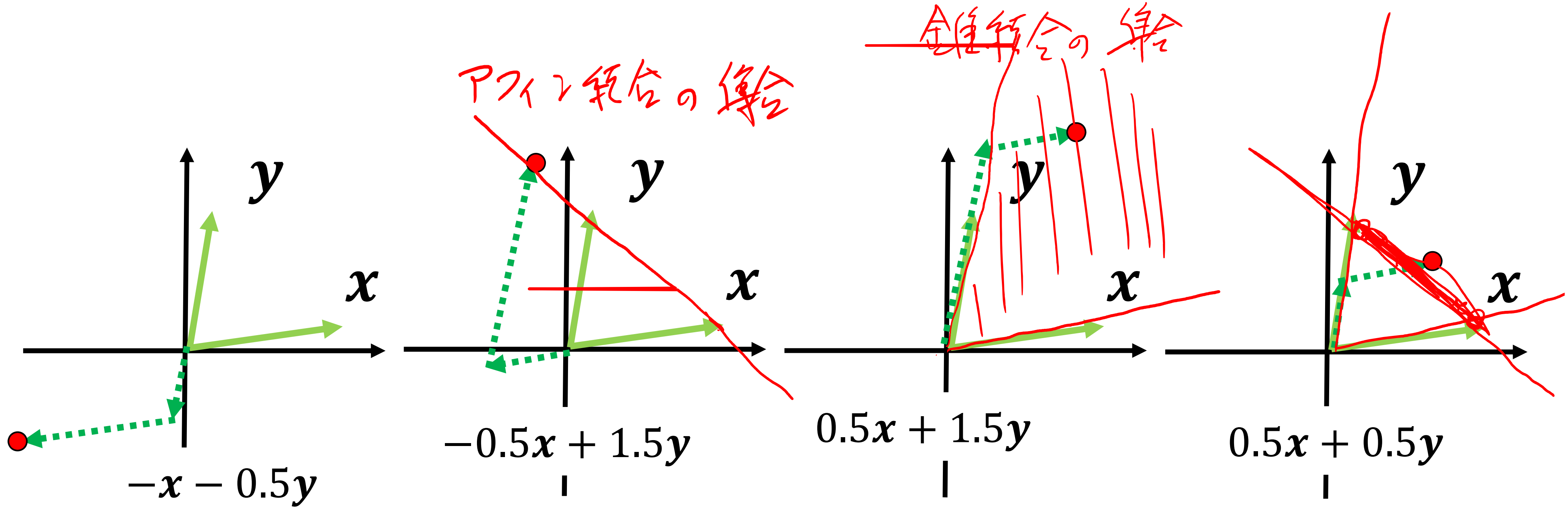
2つのベクトルの「結合」

定義: 2つの実ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ の

線形結合 --- 実数α, β を用いて $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ と表されるベクトル

とくに,

- $\alpha + \beta = 1$ のとき → $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ は**アフィン結合**
- $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ のとき → $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ は**錐結合（非負線形結合）**
- $\alpha + \beta = 1,\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$ のとき → $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ は**凸結合**



「結合」に関して閉じている集合

定義：集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の線形結合に関して閉じている→ S は部分空間
  （つまり, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in S$ が成立）
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ のアフィン結合に関して閉じている
  （つまり, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in S$ が成立）
  → S はアフィン集合
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の錐結合に関して閉じている
  （つまり, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in S$ が成立）
  → S は凸錐
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の凸結合に関して閉じている
  （つまり, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
  $\alpha + \beta = 1$ かつ $\alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in S$ が成立）
  → S は凸集合

「結合」に関して閉じている集合

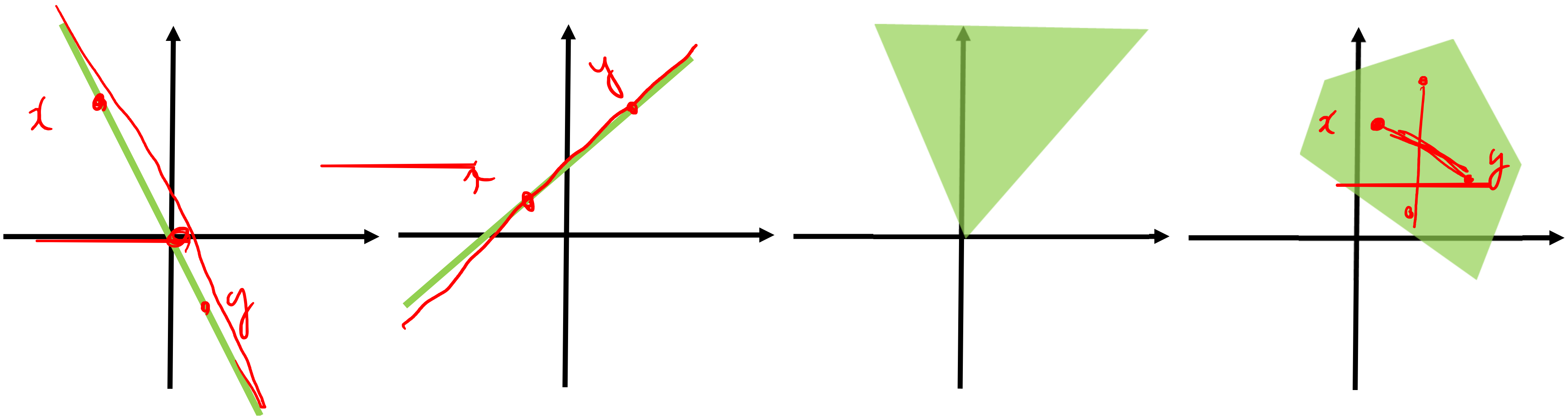
$0 \in S$

定義：集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し

- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の線形結合に関して閉じている→ S は部分空間

  （つまり，$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} \in S$ が成立）
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ のアフィン結合に関して閉じている

  → S はアフィン集合
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の錐結合に関して閉じている→ S は凸錐
- 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の凸結合に関して閉じている→ S は凸集合



4種類の集合の関係

命題：集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し，以下が成立：

$$
\begin{tikzcd}
 & S\ \text{はアフィン集合} \arrow[dr] & \\
S\ \text{は部分空間} \arrow[ur] \arrow[dr] & & S\ \text{は凸集合} \\
 & S\ \text{は凸錐} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

例：$\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$ はアフィン集合であって，
部分空間ではない．

※ 原点を含むアフィン集合は部分空間である．

4種類の集合の関係

$x, y \in S, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha+\beta=1 \Rightarrow \alpha x+\beta y \in S$

$x_1+x_2+x_3=1$

$y_1+y_2+y_3=1$

$(\alpha x_1+\beta y_1, \alpha x_2+\beta y_2, \alpha x_3+\beta y_3)$

$\underbrace{(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_2)+(\alpha x_3+\beta y_3)}_{=1}$

$\alpha(x_1+x_2+x_3)+\beta(y_1+y_2+y_3)$

$=\alpha+\beta=1$

例: $S=\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1+x_2+x_3=1\}$ はアフィン集合であって,
部分空間ではない.

※ 原点を含むアフィン集合は部分空間である.

部分空間の特徴付け

命題: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が部分空間であることの必要十分条件は，以下の2条件を満たすことである:
(i) $\forall x \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha x \in S$,　(ii) $\forall x, y \in S,\ \ x + y \in S$.

（証明）定義より，S が部分空間であるとは，
$\forall x, y \in S, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha x + \beta y \in S$ をみたすことである.
よって，必要性は明らか.
一方，(i), (ii) の条件が成り立つと仮定する.
任意の$x, y \in S, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し，条件 (i) より$\alpha x \in S, \beta y \in S$ 成立.
これと条件 (ii) より $\alpha x + \beta y \in S$ 成立. よって十分性も示された. ■

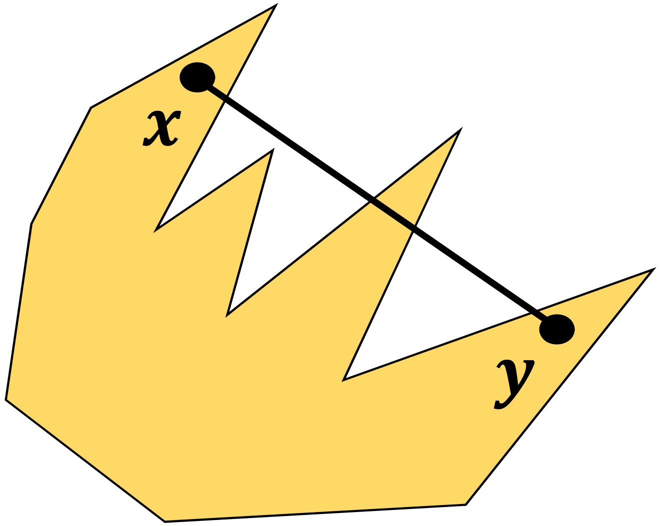
アフィン集合と部分空間の関係

命題: アフィン集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は，原点**0**を含むとき，部分空間である．

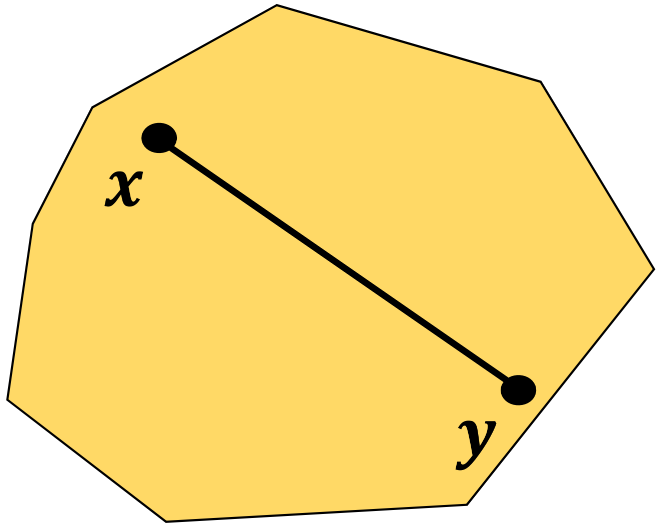
（証明）部分空間に関する前のスライドの命題より，
(i) $\forall x \in S, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha x \in S$,　(ii) $\forall x, y \in S,\ x + y \in S$.
を示せば良い．
[(i) の証明] 任意の $x \in S, \alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$y = \mathbf{0}$, $\beta = 1 - \alpha$ とおけば，
x と原点 0 とのアフィン結合$\alpha x + \beta y = \alpha x$ は S に含まれる．
[(ii) の証明] 任意の$x, y \in S$ に対し，$\alpha = \beta = 0.5$ とおくと，
x と yアフィン結合$\alpha x + \beta y = 0.5 \cdot (x + y)$ は S に含まれる．
このことと，上記で示した条件 (i) より $2 \cdot 0.5 \cdot (x + y) = x + y$ は
S に含まれる．　■

凸集合

- 定義 : 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は凸集合
  $\Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S,\ 0 \leq \forall \alpha \leq 1,\ \alpha \boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in S$



凸集合ではない



凸集合である

※ 空集合 $\emptyset$ や空間全体 $\mathbb{R}^n$ も凸集合

凸集合の性質

定理11.1: 凸集合の族 S_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の共通部分$S^* = \cap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ は凸集合

※集合 Λ は非可算無限集合でもよい

（証明）凸集合の定義より，

$$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^*, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha + \beta = 1 \text{かつ} \alpha, \beta \geq 0 \Rightarrow \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in S^*$$

を示せば良い．

$S^* = \cap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ なので，

$$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in S^* \Leftrightarrow \text{任意の} \lambda \in \Lambda \text{に対して} \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in S_\lambda$$

各 S_λ は凸集合であり， $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S^* \subseteq S_\lambda$ であるから， $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in S_\lambda$成立．

よって， $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in S^*$ が得られた． ■

凸集合の性質

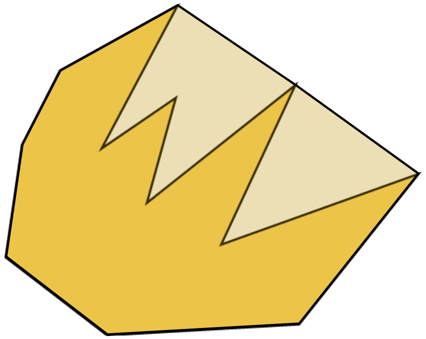
定理11.1: 凸集合の族 S_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の共通部分 $\cap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ は凸集合

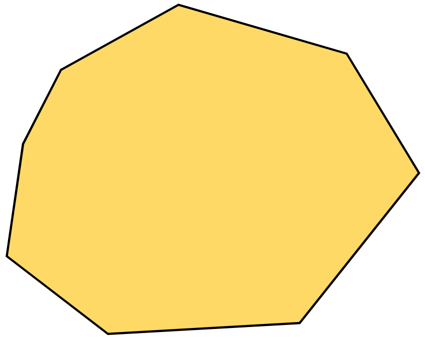
定理11.1の系: 任意の集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し,
S を含む(包含関係に関して)最小の凸集合 S^* が存在する.

(証明) S を含む凸集合は存在(例: $\mathbb{R}^n$).
S を含むすべての凸集合 S_λ $(\lambda \in \Lambda)$ に対し, $S^* = \cap_{\lambda\in\Lambda} S_\lambda$ とおく
➔ S^* は S を含む凸集合であり,
S を含む任意の凸集合は S^* を必ず含む
∴ S^* は最小の凸集合. ■

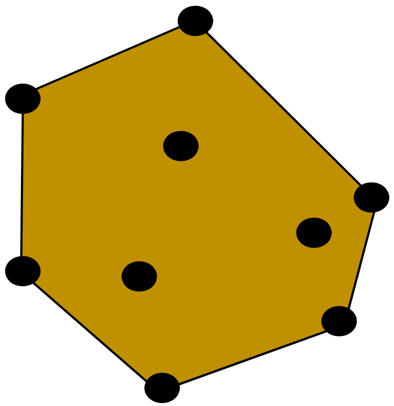
集合の凸包

定義：集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ の凸包 $\mathrm{co}\, S =$ S を含む最小の凸集合





凸集合の凸包
＝もとの集合そのもの



2次元ベクトル集合の
凸包は凸多角形

※ 凸包は閉集合とは限らない

例： $\{(x, y) \mid y \geq 1/x\} \cup \{(0,0)\}$
の凸包は
$\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\} \cup \{(0,0)\}$

多数のベクトルの「結合」

線形結合，凸結合などは，3つ以上のベクトルに対しても定義可能

定義：m 個のベクトル $\boldsymbol{a}^1,\ \boldsymbol{a}^2,\ \ldots \boldsymbol{a}^m \in \mathbb{R}^n$ の

線形結合 --- $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ を用いて $\sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}^i$ と表されるベクトル

とくに

- $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ のとき → $\sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}^i$ はアフィン結合
- $\alpha_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, m)$ のとき → $\sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}^i$ は錐結合（非負線形結合）
- $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\ (i = 1, \ldots, m)$ のとき → $\sum_{i=1}^m \alpha_i \boldsymbol{a}^i$ は凸結合

「結合」に関する性質その1

命題: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$に対し以下が成立:

- S が部分空間 ➔ $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m \in S$ の線形結合はSに含まれる
- S がアフィン空間 ➔ $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m \in S$ のアフィン結合はSに含まれる
- S が凸錐 ➔ $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m \in S$ の錐結合はSに含まれる
- S が凸集合 ➔ $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m \in S$ の凸結合はSに含まれる

凸集合の場合のみ，以降のスライドで証明する.
他の証明も同様.

「結合」に関する性質その1

命題: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$が凸集合

➔ $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m \in S$ の任意の凸結合はSに含まれる

(証明)任意の非負の実数 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ (ただし$\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = 1$)に対して，$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}^1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}^2 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{a}^m$ がSに含まれることを示す.

m = 2 のときは定義より明らか.

m > 2 のとき:帰納法で証明.

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ のいずれかが0に等しい場合,

$\boldsymbol{x}$ は m−1個のベクトルの凸結合である. ∴ 帰納法の仮定より $\boldsymbol{x} \in S$.

「結合」に関する性質その1

命題: 集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$が凸集合

➔ $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m \in S$ の任意の凸結合はSに含まれる

（証明のつづき）

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ のすべてが正のとき，$1 - \alpha_m = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i > 0$ なので，

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}^1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}^2 + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{a}^m$$

$$= (1 - \alpha_m) \left\{ \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_m} \boldsymbol{a}^1 + \frac{\alpha_2}{1 - \alpha_m} \boldsymbol{a}^2 + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{1 - \alpha_m} \boldsymbol{a}^{m-1} \right\} + \alpha_m \boldsymbol{a}^m$$

と表せる.

$\boldsymbol{y} = \frac{\alpha_1}{1-\alpha_m} \boldsymbol{a}^1 + \frac{\alpha_2}{1-\alpha_m} \boldsymbol{a}^2 + \cdots + \frac{\alpha_{m-1}}{1-\alpha_m} \boldsymbol{a}^{m-1}$ とおくと，

$\frac{\alpha_{i-1}}{1-\alpha_i} \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m-1)$，$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\alpha_{i-1}}{1-\alpha_i} = 1$ より，

$\boldsymbol{y}$ は m−1個のベクトルの凸結合　∴ 帰納法の仮定より $\boldsymbol{y} \in S$.

$\boldsymbol{x} = (1 - \alpha_m)\, \boldsymbol{y} + \alpha_m \boldsymbol{a}^m$ なので，$\boldsymbol{x}$ は 2個のベクトルの凸結合

∴ 帰納法の仮定より $\boldsymbol{x} \in S$.　■

「結合」に関する性質その2

命題: ベクトル $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m \subseteq \mathbb{R}^n$に対し以下が成立:

- $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ の線形結合全体は部分空間
- $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ のアフィン結合全体はアフィン空間
- $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ の錐結合全体は凸錐
- $\boldsymbol{a}^1, \ldots, \boldsymbol{a}^m$ の凸結合全体は凸集合

（証明の概略）任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の〇〇結合に関して
閉じていることを示せば良い.
つまり, $\boldsymbol{x} = \sum_i \eta_i \boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{y} = \sum_i \gamma_i \boldsymbol{a}^i$の〇〇結合$\boldsymbol{z} = \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}$が
m個のベクトルの〇〇結合$\boldsymbol{z} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{a}^i$ という形で表現できることを
示せば良い.

凸集合の場合のみ, 以降のスライドで詳しく証明. 他の証明も同様.

「結合」に関する性質その2

命題： ベクトル $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m \subseteq \mathbb{R}^n$に対し

$\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m$ の凸結合全体は凸集合

（証明） $\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m$ の凸結合全体をSとおく.

任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ の凸結合がSに含まれることを示せば良い.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S$ なので，$\sum_i \eta_i = 1, \sum_i \lambda_i = 1, \eta_i \geq 0, \lambda_i \geq 0 (i = 1,2, \dots, m)$

を用いて $\boldsymbol{x} = \sum_i \eta_i \boldsymbol{a}^i, \boldsymbol{y} = \sum_i \lambda_i \boldsymbol{a}^i$ と表現できる.

したがって，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の凸結合$\boldsymbol{z} = \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y}$ $(\alpha + \beta = 1, \alpha, \beta \geq 0)$ は

$$\boldsymbol{z} = \sum_i (\alpha \eta_i + \beta \lambda_i) \boldsymbol{a}^i$$

という形で表現できる. ここで $\gamma_i = \alpha \eta_i + \beta \lambda_i$ とおくと,

$\sum_i \gamma_i = \sum_i (\alpha \eta_i + \beta \lambda_i) = \alpha \sum_i \eta_i + \beta \sum_i \lambda_i = \alpha + \beta = 1$

および $\gamma_i = \alpha \eta_i + \beta \lambda_i \geq 0$ が成り立つので，$\boldsymbol{z}$ は$\boldsymbol{a}^1, \dots, \boldsymbol{a}^m$ の凸結合

である. ゆえに $\boldsymbol{z} \in S$ が成り立つ.　■

演習問題

問1：任意の集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し，S を含む（包含関係に関して）
最小のアフィン空間 S^* が存在することを証明せよ.

問2：$\{(x, y) | \, x > 0, y > 0\} \cup \{(0,0)\}$ が凸集合であることを証明せよ.

問3：凸集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ が以下の条件★を満たすとき，
S が凸錐であることを証明せよ：　（条件★）$\forall x \in S, \forall \alpha \geq 0, \ \alpha x \in S$