経営経済数学

数列・点列の部分列

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

実数点列·集合の有界性

- 定義: 数列$a_1, a_2, a_3, \dots$は実数 c に収束する

  ←→ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq k_0 \Rightarrow |a_k - c| < \varepsilon$
- 定義: 実数の集合(数列)は有界

  ←→ ある実数 q≧0 が存在して，その集合(数列) に含まれる
  任意の実数 x に対し，|x| < q
- 定義: 実数の集合(数列)は非有界 ←→ 有界ではない

  ←→任意の実数 q に対し，その集合(数列) に含まれる
  ある実数 x が存在して，|x| ≧ q

命題: 数列$a_1, a_2, a_3, \dots$は，収束するならば有界

(証明)演習問題．定義を使う.

※ 有界でも収束しない例が存在: $a_k = (-1)^k$

実数点列･集合の有界性

命題: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は, 収束するならば有界
(証明)演習問題. 定義を使う.
　※ 有界でも収束しない例が存在: $a_k = (-1)^k$

コーシー列も有界である.

命題: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は, コーシー列であるならば有界
(証明略)

- 定義: 　数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$はコーシー列(基本列)
  $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}:\quad k', k \geq k_0 \Rightarrow |a_{k'} - a_k| < \varepsilon$

実ベクトル点列･集合の有界性

- $||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$
- 定義:　実ベクトル列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は実ベクトル c に収束する
  ←→ $\forall\varepsilon>0, \exists k_0\in\mathbb{N}:\quad k\geq k_0 \Rightarrow \|a_k-c\|<\varepsilon$
- 定義:実ベクトルの集合（数列）は有界
  ←→ ある実数 q≧0 が存在して，その集合（数列）に含まれる
  任意の実数ベクトル x に対し，$\|x\|<q$
- 定義: 実ベクトルの集合（数列）は非有界 ←→ 有界ではない
  ←→任意の実数 q に対し，その集合（数列）に含まれる
  ある実ベクトル x が存在して，$\|x\|\geq q$

命題: n次元実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は，収束するならば有界

※　有界でも収束しない例が存在

部分列と極限

- **定義**: 点列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ の**部分列**

  --- 点列 の一部を抜き出した点列 $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots$

  ただし$1 \leq k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$

命題: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ がcに収束（±∞に発散）するとき,

その任意の部分列も c に収束（±∞に発散）する.

（証明）演習問題. 収束の定義を使えばすぐ分かる. ■

実数列の部分列の収束

定理9.4： 任意の有界な数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ は，収束する部分列をもつ.

（証明）数列 a_k は有界なので，ある実数 d が存在して $-d \leqq a_k \leqq +d$ が成り立つ.
$p_0=-d$, $q_0=+d$ とおくと，区間$[p_0, q_0]$に数列の要素が無限個含まれる.
区間 $[p_0, q_0]$ に含まれる数列の要素 a_{i_0} を選ぶ.
半分にした区間 $[p_0,, (p_0+ q_0)/2]$と$[(p_0+ q_0)/2, q_0]$のどちらか一方には，数列の要素が無限個の要素が含まれるが，$[p_1, q_1]$ とおく.
$[p_1, q_1]$ に含まれる数列の要素 a_{i_1} で $i_1 > i_0$ を満たすものを選ぶ.

実数列の部分列の収束

定理9.4: 任意の有界な数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ は, 収束する部分列をもつ.

（証明のつづき）
一般に, 数列の要素を無限個含む区間 $[p_k, q_k]$ に対し, 半分にした区間 のどちらか 一方には, 数列の要素が無限個の要素が含まれるが, それを $[p_{k+1}, q_{k+1}]$ とおく.
$[p_{k+1}, q_{k+1}]$ に含まれる数列の要素 $a_{i_{k+1}}$ で $i_{k+1} > i_k$ を満たすものを選ぶ.
➔ 以下の不等式が成立:

$$p_0 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_k \leq \cdots \leq q_k \leq \cdots \leq q_1 \leq q_0$$

$$q_k - p_k = \frac{q_0 - p_0}{2^k}$$

$$p_k \leq a_{i_k} \leq q_k$$

実数列の部分列の収束

定理9.4: 任意の有界な数列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$ は，収束する部分列をもつ.

（証明のつづき）

➔ 以下の不等式が成立:

$p_0 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_k \leq \cdots \leq q_k \leq \cdots \leq q_1 \leq q_0$ ①

$q_k - p_k = \frac{q_0 - p_0}{2^k}$ ②　　　　$p_k \leq a_{i_k} \leq q_k$ ③

①より，数列 p_k は単調非減少，上に有界

∴定理9.1より，ある実数 p に収束.

①より，数列 q_k は単調非増加，下に有界

∴定理9.1より，ある実数 q に収束.

②より p = q（演習問題）.

③より，部分列 a_{i_k} は p に収束する.

部分列の収束

定理9.4: 任意の有界な数列は，収束する部分列をもつ.

この定理を使うと，以下を得ることが可能

定理9.5: 任意の有界な実ベクトル列は，収束する部分列をもつ.

（証明のアイディア）有界な実ベクトル列の各成分に注目すると，
有界な実数列である → 定理9.4より収束する部分列をもつ.

■

収束点列による閉集合の特徴付け

定理9.6: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ は閉集合
⇔ A の収束する任意の実ベクトル列に対し，
その極限が A に含まれる

（⇒の証明）点列 a_k は点 c に収束するとする．

収束の定義より，$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq k_0 \Rightarrow ||a_k - c|| < \varepsilon$

よって，$\forall \varepsilon > 0: B(c, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

∴ c は A の触点

A は閉集合なので，その触点全体に一致する．よって $c \in A$ ■

収束点列による閉集合の特徴付け

定理9.6: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ は閉集合
⇔ A の収束する任意の実ベクトル列に対し,
その極限が A に含まれる

(⇐の証明) 対偶を証明する.

A は閉集合ではない ⇒ A の収束するある実ベクトル列が存在して,
その極限が A に含まれない

A は閉集合ではないので，その定義より,

$$\exists \boldsymbol{x} \in A^c, \forall \varepsilon > 0 : B(\boldsymbol{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$

よって，任意の自然数 k に対し,

$B(\boldsymbol{x}, 1/k) \cap A$ の要素をひとつ選び，a_k とする.

その選び方より，数列 a_k は $\|a_k - x\| < 1/k$ を満たすので
x に収束するが，A の要素ではない. ■

最大元，最小元の存在

定義：集合 $A \subseteq \mathbb{R}$ に対し，$a, b \in A$はAの最大元と最小元

$\Leftrightarrow \forall x \in A: b \leq x \leq a$

定理9.8: $A \subseteq \mathbb{R}$ は有界閉集合 ➔ A は最大元と最小元を含む

（証明）

A は有界 ➔ 以前紹介した定理より，上限 a と下限 b が存在.

したがって，$\forall x \in A: b \leq x \leq a$ を満たす.

よって，$a, b \in A$ を示せば良い. 以下，$a \in A$ のみ証明する.

$a \notin A$ と仮定する.

A は閉集合なので，その補集合A^cは開集合，$a \in A^c$

よって，$\exists \varepsilon > 0: B(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq A^c$

このことから，$(a - \varepsilon, a]$ はA に含まれない

$\therefore a - \varepsilon$ は A の上界　← これは，a が上限であることに矛盾 ■

演習問題

問1：

(1) 数列 a_k が実数 c に収束することの定義を書け.

(2)数列 a_k の部分列数列 $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots$ が実数 c に収束することの定義を書け.

(3) 小問(1),(2)の定義に基づき，実数 c に収束する実数列の部分列が c に収束することを証明せよ.

問2：数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ が +∞に発散するとき，
その任意の部分列も+∞に発散することを証明せよ.

演習問題

問3： 数列 p_k および数列 q_k は同じ値 p に収束するとする.
このとき，各 k に対して $p_k \leq a_k \leq q_k$ を満たす任意の数列 a_k を考える. このとき，数列 a_kが p に収束することを証明したい.

(1) 数列 p_k および数列 q_k が p に収束することの定義を書け.

(2) 小問(1)の結果を使って，以下が成り立つことを示せ：

(i) 任意のε>0 に対し，ある自然数k_1 が存在して，$k \geqq k_1$ ならば $q_k - p < \varepsilon$ が成り立つ.

(ii) 任意のε>0 に対し，ある自然数k_2 が存在して，$k \geqq k_2$ ならば $p_k - p > -\varepsilon$ が成り立つ.

(3) 任意のε>0 に対し，ある自然数k_0 が存在して，$k \geqq k_0$ ならば $|a_k - p| < \varepsilon$ が成り立つことを示せ

（ヒント: $p_k - p < a_k - p < q_k - p$）