経営経済数学

連続写像

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

中間試験の実施要領

- 日時:7月4日(火)15:40～17:10 (90分)
- 場所:~~いつもの講義室(WL2-401(W641))~~
  西9号館3階W9-324(W933)
  - 座席はこちらで指定
- 試験内容:第1回～第6回の授業内容
- 100点満点, 40点以下は不合格(単位不可)

- 手書きのA4用紙一枚のみ持ち込み可
  - 印刷やコピーは不可
  - 試験終了後に回収します
- 本, ノート等の持ち込みは不可

今日の内容

関数が「繋がっている」ことの定義

- 実数から実数への関数の連続性
- 実ベクトルから実数への関数の連続性
- 実ベクトルから実ベクトルへの関数の連続性
- 距離空間から距離空間への写像の連続性

参考文献:

志賀浩二:位相への30講，朝倉書店(1988)
篠田寿一，米沢佳己:集合・位相演習，サイエンス社(1995)

関数と写像

定義：写像（関数）：集合Xの各要素に対して，
集合Yの値をひとつ対応させるもの
Y が数値の集合（実数，整数など）のとき，
関数とよばれることが多い

例：

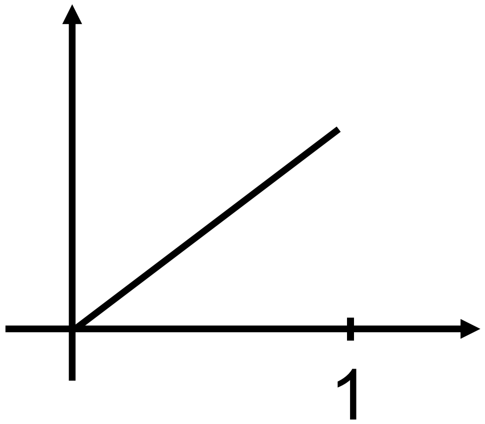
- $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$　　　$X = Y = R$
- X = 学生全体　に対し，f(x) = 学生 x の名前　（Y = 名前の集合）
- 3つの財a,b,c とそれらの価値 v_a, v_b, v_c（実数）
  - X = {a,b,c} の部分集合全体に対し，f(S) = S の中の価値最大の財
    Y = {a,b,c}の部分集合すべて
  - 財の価格 p_a, p_b, p_c を与えたときの 価値 – 価格 を最大化したい

➔ $f(p_a, p_b, p_c) = \{v_i - p_i$ を最大にする i すべて$\}$
$X=R^3$, Y = {a,b,c}の部分集合すべて

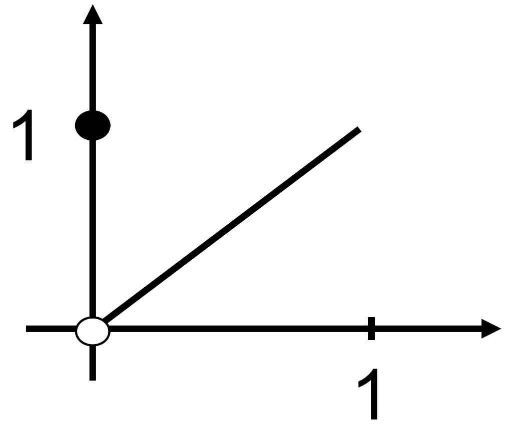
関数の連続性のイメージ

関数 f(x) は x = a において 連続

⇔ f のグラフが x = a のところで繋がっている



どの x = aに
おいても連続



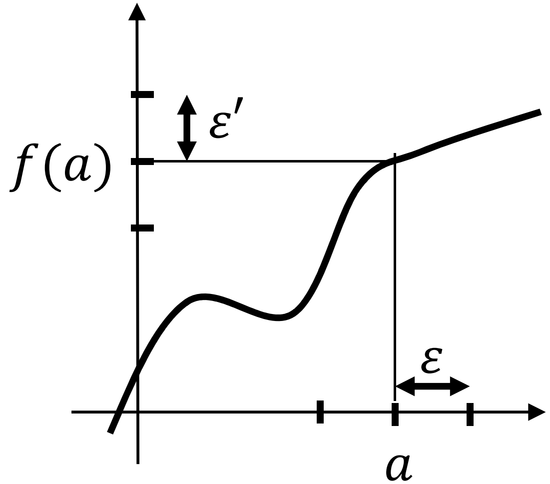
x = 0 において
不連続

グラフが繋がっているかどうか，目視では判別できないことも

- 拡大しないと判別が難しい場合
- 高次元の場合

➔ 数学的に厳密な定義の必要性

一変数関数の連続性



f は x = a において連続

⇔ x が a に近づくと，関数値 f(x) が f(a) に近づく

これを数学的に表現

定義: 一変数関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は x = a において**連続**

⇔ aに収束する任意の実数列 x_k に対し，$f(x_k)$ は f(a) に収束

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$:
$k \geq n_0 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$
x が a に近づく

$\forall \varepsilon' > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$:
$k \geq n_1 \Rightarrow |f(x_k) - f(a)| < \varepsilon'$
f(x) が f(a) に近づく

定義: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は**連続** ⇔ 任意のx = a において**連続**

一変数関数の連続性の必要十分条件

定義: 一変数関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は x = a において連続

⟺ aに収束する任意の実数列 x_k に対し，$f(x_k)$ は f(a) に収束

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$:
$k \geq n_0 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$
x が a に近づく

$\forall \varepsilon' > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$:
$k \geq n_1 \Rightarrow |f(x_k) - f(a)| < \varepsilon'$
f(x) が f(a) に近づく

命題: 一変数関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は x = a において連続

⟺ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

（証明はあとで）

一変数関数の連続性：例

f(x) = x^2 は連続

（証明） $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$:

$$|x - a| < \delta \ \Rightarrow |x^2 - a^2| < \varepsilon$$ を証明.

a = 0 のとき： $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ とおくと, $|x| < \delta = \sqrt{\varepsilon} \Rightarrow |x^2| < \delta^2 = \varepsilon$

a ≠ 0 のとき：

x = a + d とおく ➔ $|d| < \delta \ \Rightarrow |2ad + d^2| < \varepsilon$ と書き換え可

$\delta = \varepsilon/4|a|$ ➔ $|2ad| < \varepsilon/2,$ $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ ➔ $|d^2| < \varepsilon/2$ なので

$\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{4|a|}, \sqrt{2\varepsilon}\}$ とおくと, $|2ad + d^2| \leq |2ad| + |d^2| < \varepsilon$ ■

一変数関数の連続性:「$\Leftarrow$」の証明

命題: 一変数関数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は x = a において連続

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

「$\Leftarrow$」の証明:(比較的)簡単.

a に収束する任意の実数列 x_k に対し, 以下が成り立つことを示す:

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_1 \Rightarrow |f(x_k) - f(a)| < \varepsilon'$$

関数 f に対する仮定より, ある $\delta > 0$ が存在して, 以下が成り立つ:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon'$$

実数列 x_k はa に収束するので, 収束性の定義より,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_0 \Rightarrow |x_k - a| < \delta$$

以上より, $n_1 = n_0$ とおくと, 所望の条件が成り立つ:

$$k \geq n_0 \Rightarrow |x_k - a| < \delta \Rightarrow |f(x_k) - f(a)| < \varepsilon' \qquad \blacksquare$$

一変数関数の連続性:「➔」の証明

命題: 一変数関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は x = a において連続 ☆

⟵➔ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon\ |x-a| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ★

「➔」の証明の概略: 対偶「★の否定➔☆の否定」を示す

条件★の否定:

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}\colon\ |x-a| < \delta$ かつ $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$

条件☆の否定:

aに収束するある実数列 x_k が存在して, $f(x_k)$ は f(a) に収束しない

一変数関数の連続性:「➔」の証明

条件★の否定:

$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}$: $|x-a| < \delta$ かつ $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$

条件☆の否定:

aに収束するある実数列 x_k が存在して，f(x_k) は f(a) に収束しない

条件★の否定における $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta = \frac{1}{k}$ $(k = 1,2, \dots)$ とすると，

$$\exists x_k \in \mathbb{R}:\ |x_k - a| < \frac{1}{k} \text{かつ} |f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$$

あとは

(i) 実数列 $x_1, x_2, \dots$ が a に収束すること（ $|x_k - a| < 1/k$ を使う）

(ii) 関数値の列 $f(x_1), f(x_2), \dots$ が$f(a)$ に収束しないこと

（$|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$ を使う）

を示せば，条件☆の否定が得られる．■

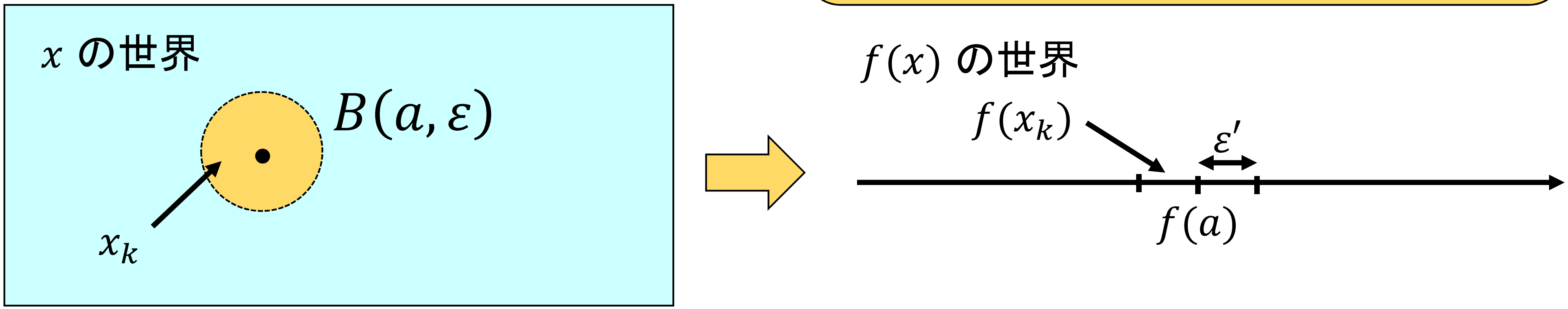
多変数関数の連続性

定義: n変数関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は x = a において**連続**

⟺ aに収束する任意の実ベクトル列 x_k に対し，$f(x_k)$ は f(a) に収束

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$:
$k \geq n_0 \Rightarrow d(x_k, a) < \varepsilon$
x が a に近づく

$\forall \varepsilon' > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$:
$k \geq n_1 \Rightarrow |f(x_k) - f(a)| < \varepsilon'$
f(x) が f(a) に近づく



定義: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は**連続** ⟺ 任意のx = a において**連続**

命題: 関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$は x = a において **連続**
⟺ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\colon\ d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

復習：ユークリッド空間の開集合

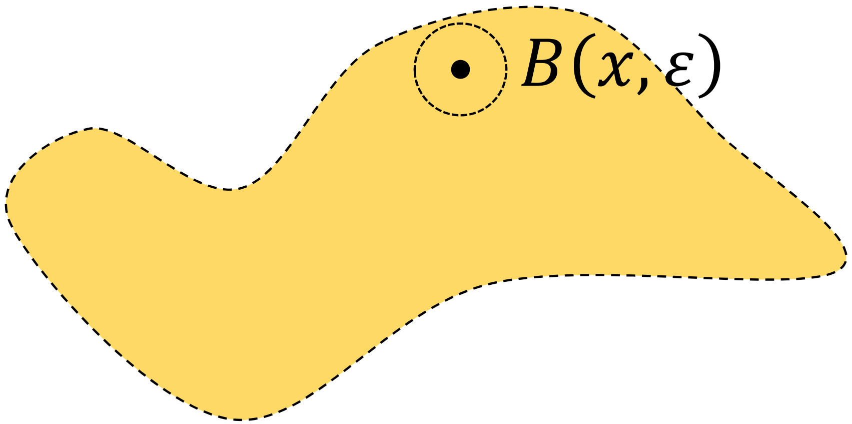
定義： 中心 $x \in \mathbb{R}^n$, 半径 $r \geq 0$ の**開球体**

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y, x) < r\}$$

n=1 ならば開区間，n=2 ならば円の内部

定義： $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は**開集合** $\Longleftrightarrow$ $\forall x \in S, \exists \varepsilon > 0\colon B(x, \varepsilon) \subseteq S$

x を中心とする十分小さい球（の内部）は S に含まれる



開集合を使った書き換え

命題 : 関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は x = a において連続
←→ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$

「x がある開球体に含まれる → f(x) が所与の開球体に含まれる」を
「x がある開集合に含まれる → f(x) が所与の開集合に含まれる」に
書き換え可能

命題 : 関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は x = a において連続
←→ f(a)を含む任意の開集合E⊆R に対し,
a を含むある開集合D⊆R^n が存在して, f(D) ≡ {f(x) | x∈D} ⊆ E

※ a を含む開集合は a の開近傍とよばれる

開集合を使った書き換え：証明

命題：関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は x = a において連続
←→ f(a)を含む任意の開集合E⊆R に対し，
a を含むある開集合D⊆R^n が存在して，f(D) ≡ {f(x) | x∈D} ⊆ E

（証明）条件(OS) と以下の条件(OB)の必要十分性を示す：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$$

（(OS)→(OB)の証明）
E=B(f(a), ε) （ε は任意）とおく
→ 条件(OS)より，∃a を含む開集合D⊆R^n: f(D)⊆ E
Dはa を含む開集合
∴開集合の定義より， ∃δ>0 s.t. B(a,δ)⊆D
∴ y∈B(a,δ) → y∈D → f(x)∈E=B(f(a), ε) ■

開集合を使った書き換え：証明の続き

条件(OS)

命題：関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は x = a において連続
←→ f(a)を含む任意の開集合E⊆R に対し，
a を含むある開集合D⊆R^n が存在して，f(D) ≡ {f(x) | x∈D} ⊆ E

（証明）条件(OS)と以下の条件(OB)の必要十分性を示す：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$$

（(OS)←(OB)の証明）
E⊆R: f(a)を含む開集合 とする.
開集合の定義より，∃ε>0: B(f(a),ε)⊆E
条件(OB)より，$\exists \delta > 0: x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$
D=B(a,δ) はaを含む開集合，f(D)⊆B(f(a),ε)⊆E ■

開集合を使った書き換えその2

定義: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続 ←→ 任意のx = a において連続

よって前述の命題より,

関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続

←→ $\forall a \in \mathbb{R}^n$, ∀f(a)を含む開集合E⊆R, ∃a を含む開集合D⊆R^n:

$$f(D) \equiv \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq E$$

この命題は下記のように簡潔な形に書き換え可能

命題: 関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続

←→ ∀開集合E⊆R, $f^{-1}(E) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in E\}$ は開集合

開集合を使った書き換えその2:証明

命題:関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続
⇔ ∀開集合E⊆R, $f^{-1}(E) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in E\}$ は開集合

証明の方針: 下記の命題を使う

命題A:関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は x = a において連続
⇔ f(a)を含む任意の開集合E⊆R に対し,
a を含むある開集合D⊆R^n が存在して, f(D) ≡ {f(x) | x∈D} ⊆ E

(➔の証明) 任意の開集合E⊆R に対し
$f^{-1}(E)$ が開集合であることを示す.
定義より,「∀a∈$f^{-1}(E)$, ∃ε>0: B(a, ε)⊆ $f^{-1}(E)$」を示せばよい.
a∈$f^{-1}(E)$ より f(a)∈E.
よって命題Aの「➔」が使える:
a を含むある開集合D⊆R^n が存在して f(D)⊆ E ∴ D⊆$f^{-1}(E)$
a∈D なので, ∃ε>0: B(a, ε)⊆D⊆$f^{-1}(E)$ ■

開集合を使った書き換えその2:証明

命題:関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は連続
⇔ ∀開集合E⊆R,　$f^{-1}(E) \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in E\}$ は開集合

証明の方針: 下記の命題を使う

命題A:関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は x = a において連続
⇔ f(a)を含む任意の開集合E⊆R に対し,
　a を含むある開集合D⊆R^n が存在して,　f(D) ≡ {f(x) | x∈D} ⊆ E

(⇐の証明)命題Aの「⇐」より,∀a∈R^n に対し,以下を示せばよい.
f(a)を含む任意の開集合E⊆R に対し,
　a を含むある開集合D⊆R^n が存在して,　f(D) ≡ {f(x) | x∈D} ⊆ E
仮定より,D=$f^{-1}(E)$ は開集合.
D の選び方より a∈D,f(D)=E.　■

実ベクトルから実ベクトルへの関数

あるユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ から別のユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ への関数

例1 : $n \times m$ 実行列 A を使って定義される関数 $f(x) = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^n)$
これは $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への関数

例2 : 2変数関数 $f(x_1, x_2)$ の勾配ベクトル $g(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$
例えば $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^3 + 1$ のとき,
$g(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 3x_2^2)$
g は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への関数

距離空間の写像

ある距離空間 (X, d) からもう一つの距離空間 (X’, d’) への写像

例1 : 2次元実ベクトル集合上の距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_2)$から [0,1]区間上の連続関数集合上の距離空間 $(C[0,1], d_2)$への写像

(a,b) → f(x) = a x^2 + b x

例2 : 距離空間 $(C[0,1], d_2)$ から距離空間 $(\mathbb{R}, d_2)$への写像

f(x) → $\int_0^1 f(x)dx$

距離空間の写像の連続性

形式的には多変数関数の場合と同じ定義

定義: 距離空間 (X,d) から (X’,d’) への写像 f は x = a において連続

←→ aに収束する任意の点列 x_k に対し，f(x_k) は f(a) に収束

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$:
$k \geq n_0 \Rightarrow d(x_k, a) < \varepsilon$
x が a に近づく

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}$:
$k \geq n_1 \Rightarrow d'(f(x_k), f(a)) < \varepsilon$
f(x) が f(a) に近づく

命題: 写像 f は x = a において 連続

←→ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$

定義: 写像 f は連続 ←→ 任意のx = a において連続

復習：距離空間の開集合

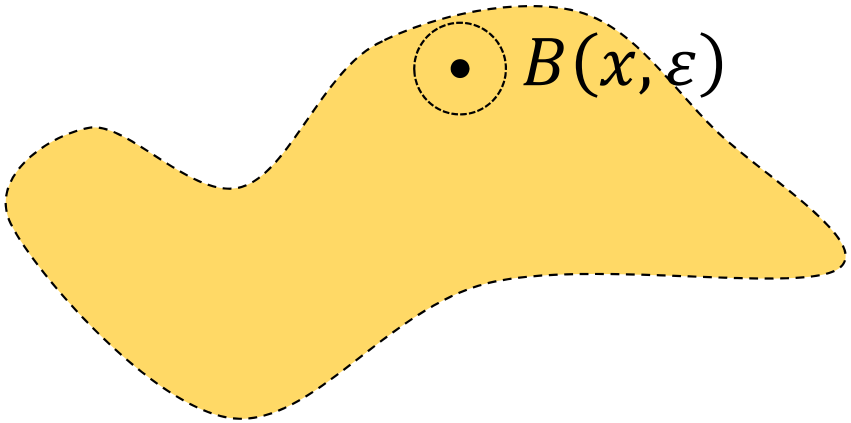
距離空間 (X, d) における開集合は,
ユークリッド空間の場合と同様に定義が可能

定義: 中心 x∈X, 半径 $r \geq 0$ の**開球体**

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(y,x) < r\}$$

定義: $S \subseteq X$ は**開集合** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in S, \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq S$

x を中心とする十分小さい球（の内部）は S に含まれる



開集合を使った書き換え

命題：距離空間 (X,d) から (X',d') への写像 f は x = a において連続
←→ $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$: $d(x,a) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon$

「x がある開球体に含まれる → f(x) が所与の開球体に含まれる」を
「x がある開集合に含まれる → f(x) が所与の開集合に含まれる」に
書き換え可能

命題： 距離空間 (X,d) から (X',d') への写像 f は x = a において連続
←→ ∀f(a)を含む開集合E⊆X', ∃a を含む開集合D⊆X:

$$f(D) \equiv \{f(x) \mid x \in D\} \subseteq E$$

命題：距離空間 (X,d) から (X',d') への写像 f は連続
←→ ∀開集合E⊆X', $f^{-1}(E) \equiv \{x \in X \mid f(x) \in E\}$ は開集合

証明はユークリッド空間のときと同様

演習問題

問1: 関数 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ について考える.

(1) 任意の実数$y \in \mathbb{R}$ および $f(y)$ を含む任意の開区間 (a, b) に対し，次の条件を満たす開区間 (p, q) をひとつ具体的に求めよ.

(i) 開区間 (p, q) は y を含む.

(ii) 任意の $z \in (p, q)$ に対し， $f(z) \in (a, b)$ が成り立つ.

(2) 任意の開区間 $I = (a, b)$ に対し， $f^{-1}(I)$ を具体的に求めよ.
また， $f^{-1}(I)$ が有限個の開区間の和集合として表されることを示せ.

演習問題

問2：距離空間 $(\mathbb{R}^2, d_2)$（d_2 はユークリッド距離）から

距離空間 $(C[0,1], d_1)$（d_1 はマンハッタン距離）への 写像

(a,b) → f(x) = a x + b

が連続であることを，定義に基づき証明せよ.