# 経営経済数学

## 点列の収束

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

# 中間試験の実施要領

- 日時：7月4日（火）15:40～17:10 (90分)
- 場所：~~いつもの講義室（WL2-401(W641)）~~
  西9号館3階W9-324(W933)
  - 座席はこちらで指定
- 試験内容：第1回～第6回の授業内容
- 100点満点，40点以下は不合格（単位不可）

- 手書きのA4用紙一枚のみ持ち込み可
  - 印刷やコピーは不可
  - 試験終了後に回収します
- 本，ノート等の持ち込みは不可

# 今日の内容

実数，実数ベクトル，．．．が「限りなく近づく」とは？
- 実数の列の収束・発散
- 実数ベクトルの列の収束（ユークリッド空間における収束）
- 距離空間における点列の収束

参考文献：

志賀浩二：位相への30講，朝倉書店(1988)
篠田寿一，米沢佳己：集合・位相演習，サイエンス社(1995)

# 実数列の収束

# 実数の列が収束するとは？

- 高校までの定義: 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は実数 $c$ に収束する

  ←→ k が大きくなるにつれて，$a_k$ が実数 $c$ に限りなく近づく

  「限りなく近づく」とは？

- $a_k = 1 + 1/k$ は $k$ が大きくなるにつれて小さくなる

  ∴ 0 に限りなく近づく？

- $a_k = \begin{cases} 1 & (k \leq M) \\ 1/(k-M) & (k > M) \end{cases}$ （ただし，M=10000000000000)

  は k が大きくなっても変化しない？

➔「限りなく近づく」を数学的に厳密に表現する必要性

# 実数の列の収束

定義： 数列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は実数 $c$ に収束する

⟺ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_0 \Rightarrow |a_k - c| < \varepsilon$

※ $|x - c| < \varepsilon$ を満たす x 全体は c の近傍（c の「近所」）

c の「近所」を定める（広い「近所」でも狭い「近所」でも可）

→ k を十分大きくすれば，かならず「近所」にたどり着く

# 実数の列の発散

**定義**:　数列$a_1, a_2, a_3, \dots$は$+\infty$に**発散する**

$\Leftrightarrow\ \forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_0 \Rightarrow a_k > M$

**定義**:　数列$a_1, a_2, a_3, \dots$は$-\infty$に**発散する**

$\Leftrightarrow\ \forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_0 \Rightarrow a_k < M$

# 実ベクトルの収束
# （ユークリッド空間における収束）

# 実ベクトルの列の収束

**定義:**　ユークリッド距離（$\ell_2$ 距離）$d(x,y) \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x(i)-y(i)\right)^2}$

**定義:**　実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は実ベクトル $c$ に収束する

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_0 \Rightarrow d(a_k, c) < \varepsilon$

- n=1 の場合，$d(a_k, c) < \varepsilon \Leftrightarrow |a_k - c| < \varepsilon$

実数列の収束の定義の一般化

開球体 $B(x,r) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(y,x) < r\}$ を使って，

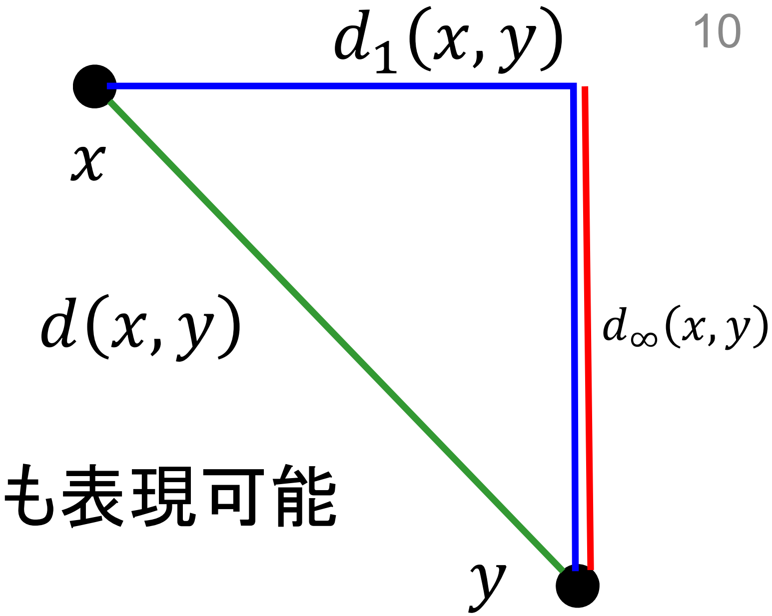
定義を書き換え可能

**書き換えた定義:**

実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は実ベクトル $c$ に収束する

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_0 \Rightarrow a_k \in B(c, \varepsilon)$

# 様々な距離を使った定義




実ベクトルの収束は,

ユークリッド距離以外の距離を用いても表現可能

**定義:** n次元実ベクトルx, y のマンハッタン距離（$\ell_1$ 距離）

$$d_1(x,y) \equiv \sum_{i=1}^{n} |x(i) - y(i)|$$

**定義:** n次元実ベクトルx, y のチェビシェフ距離（$\ell_\infty$ 距離）

$$d_\infty(x,y) \equiv \max_{1 \le i \le n} |x(i) - y(i)|$$

**命題:** 実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は実ベクトル $c$ に収束する

$$(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \ge n_0 \Rightarrow d(a_k, c) < \varepsilon\ )$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}: \quad k \ge n_1 \Rightarrow d_1(a_k, c) < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}: \quad k \ge n_2 \Rightarrow d_\infty(a_k, c) < \varepsilon$$

# 様々な開球体を使った定義

実ベクトルの収束は，他の距離に基づく開球体を使っても表現可能

**定義：** 半径 $r > 0$，中心 $x \in \mathbb{R}^n$ の$\ell_1$ 距離に関する開球体

$$B_1(x, r) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_1(y, x) < r\}$$

**定義：** 半径 $r > 0$，中心 $x \in \mathbb{R}^n$ の$\ell_\infty$ 距離に関する開球体

$$B_\infty(x, r) \equiv \{y \in \mathbb{R}^n \mid d_\infty(y, x) < r\}$$

**命題：** 実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は実ベクトル $c$ に収束する

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_0 \Rightarrow a_k \in B_2(c, \varepsilon)$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_1 \Rightarrow a_k \in B_1(c, \varepsilon)$

$\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_2 \Rightarrow a_k \in B_\infty(c, \varepsilon)$

※「近所」の決め方を変えても，「近づく」ことに変わりなし

# 様々な開球体を使った定義

命題:　実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \dots$ は実ベクトル $c$ に収束する

🡸🡺 ① $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}:\quad k \geq n_0 \Rightarrow a_k \in B_2(c, \varepsilon)$

🡸🡺 ② $\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}:\quad k \geq n_1 \Rightarrow a_k \in B_1(c, \varepsilon)$

🡸🡺 ③ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_2 \in \mathbb{N}:\quad k \geq n_2 \Rightarrow a_k \in B_\infty(c, \varepsilon)$

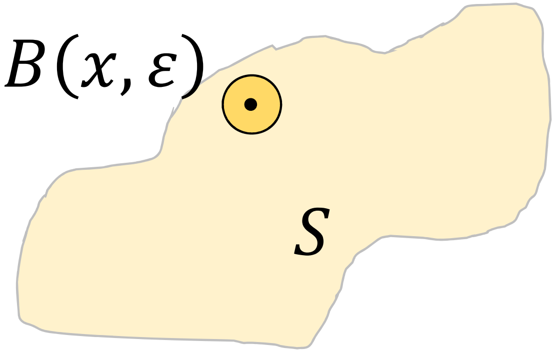
①🡺② のみ証明する（他も同様に証明可能）
①が成り立つとする．このとき，任意に選んだ $\varepsilon > 0$ に対し，
「$k \geq n_1 \Rightarrow a_k \in B_1(c, \varepsilon)$」を満たす$n_1 \in \mathbb{N}$ が存在することを示す．
ユークリッド距離とマンハッタン距離の関係より，
$B_1(c, \varepsilon') \subseteq B_1(c, \varepsilon)$ ★ を満たすある $\varepsilon' > 0$ が存在する
（例えば $\varepsilon' = \varepsilon/\sqrt{2}$）．
この $\varepsilon'$ に対し，①より，$\exists n_0 \in \mathbb{N}: k \geq n_0 \Rightarrow a_k \in B_2(c, \varepsilon')$
このことと★より，$n_0$ は「$k \geq n_0 \Rightarrow a_k \in B_1(c, \varepsilon)$」を満たす．
よって，$n_1 = n_0$ とおけば，②が成り立つ．■

# 収束の開集合による特徴付け

実ベクトルの収束の定義：距離を使って近づく様子を表現
開球体を使って表現可能

以下の定理：収束する様子は任意の**開集合**を使っても表現可能

定義：　集合$S \subseteq \mathbb{R}^n$ は開集合
$\Leftrightarrow$ $\forall x \in S,\ \exists \varepsilon > 0\ \ s.t.\ \ B(x, \varepsilon) \subseteq S$




定理：　実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は実ベクトル $c$ に収束する
$\Leftrightarrow$ $c$ を含む任意の開集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し，
ある自然数 $n_0$ が存在して，$k \geq n_0 \Rightarrow a_k \in S$

# 収束の開集合による特徴付け：証明

（証明）定義に基づき，下記を示す：

① $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_0 \Rightarrow a_k \in B(c, \varepsilon)$

⇔ ② $c$ を含む任意の開集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ に対し，

ある自然数 $n_0$ が存在して，$k \geq n_0 \Rightarrow a_k \in S$

（⇐ の証明） $B(x, \varepsilon)$ は（特殊な）開集合なので，②よりただちに成立.

（⇒ の証明）$c$ を含む開集合 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ を任意に選ぶ.

→ 開集合の定義より，$\exists \varepsilon > 0 \;\; s.t. \quad B(c, \varepsilon) \subseteq S$

① より，この $\varepsilon$ に対し，$\exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_0 \Rightarrow a_k \in B(c, \varepsilon)$

以上から，$k \geq n_0 \Rightarrow a_k \in S$ ■

# 距離空間における収束

# 距離空間の復習

- 定義 : 距離空間 (X, d) とは,
  集合 X と, その各要素の間の距離を与える距離関数 d の対
  X の要素は点と呼ばれる

- 定義 : $d: X \times X \to \mathbb{R}$ は距離関数 ⇔ 以下の4条件を満たす
  (0) ∀x,y∈X,　d(x,y)≧0
  (1) ∀x,y∈X,　d(x,y) = 0 ⇔ x = y
  (2) ∀x,y∈X,　d(x,y) = d(y,x)
  (3) [三角不等式] ∀x,y,z∈X,　d(x,z)≦d(x,y)+d(y,z)
  ※ 条件 (0) は不要（他の条件から導出可能）

# 距離空間における点列の収束

定義(再掲): 実ベクトルの列$a_1, a_2, a_3, \ldots$ は実ベクトル $c$ に収束する

⟺ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_0 \Rightarrow d(a_k, c) < \varepsilon$

距離空間においても，点列の収束が同様に定義可能

定義: 距離空間 (X, d) の点列 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ は $x \in X$ に収束

⟺ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad k \geq n_0 \Rightarrow d(x_k, x) < \varepsilon$

※ 点列の収束先が X に含まれることに注意

# 連続関数の収束その1

定義：$C[0,1] \equiv$ 区間[0,1]で定義された実数値連続関数すべての集合

$C[0,1]$ における距離 $d_1$ を定義：

$$d_1(f,g) \equiv \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

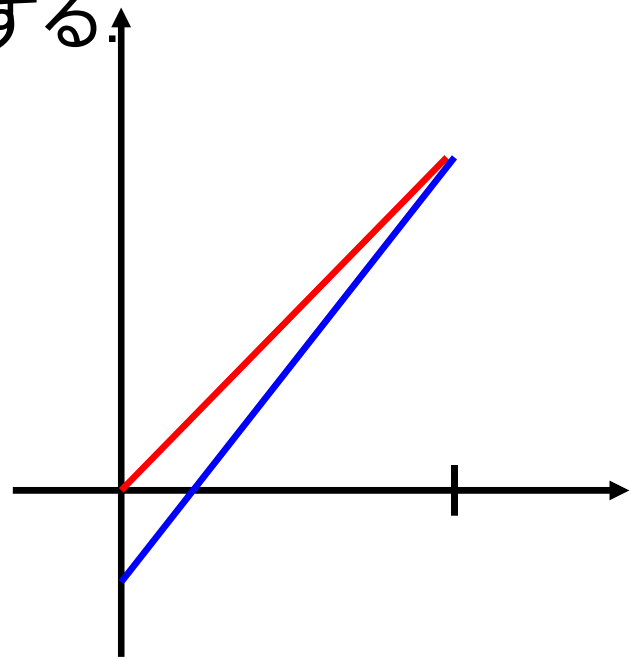
例：$f_k(x) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)x - \frac{1}{k}$ は $f(x) = x$ に収束する.

（証明）$d_1(f, f_k) = \int_0^1 |f(x) - f_k(x)|\, dx = \frac{1}{2k}$

∴ 任意の ε>0 に対し，$n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil$ とおけば

$$k \geq n_0 \Rightarrow d_1(f, f_k) < \varepsilon$$

※ $\lceil a \rceil$ ＝ 実数 a の整数値への切り上げ



# 連続関数の収束その２

$C[0,1]$ における距離　$d_\infty(f,g) \equiv \max_{0\le x\le 1} |f(x) - g(x)|$

例１: $f_k(x) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)x - \frac{1}{k}$ は $d_\infty$ に関して $f(x) = x$ に収束する.

（証明）$d_\infty(f, f_k) = \max_{0\le x\le 1} |f(x) - f_k(x)| = f(0) - f_k(0) = \frac{1}{k}$

∴ 任意の ε>0 に対し, $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ とおけば　$k \ge n_0 \Rightarrow d_\infty(f, f_k) < \varepsilon$

例２: $f_k(x) = \begin{cases} -k^3 x + k & \left(0 \le x \le \frac{1}{k^2}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{k^2} < x \le 1\right) \end{cases}$

と $f(x) = 0$ に対し, $d_\infty(f, f_k) = k$ なので収束しない

# 距離空間の開集合

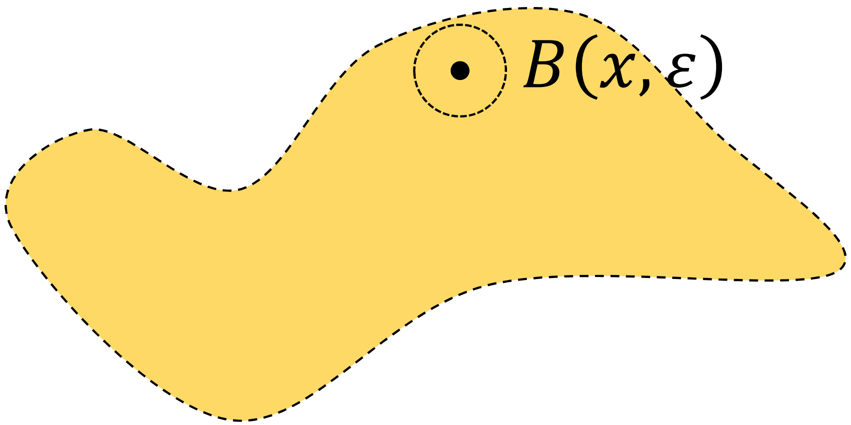
距離空間 (X, d) における開集合は,
ユークリッド空間の場合と同様に定義が可能

**定義**: 中心 x∈X, 半径 $r \geq 0$ の**開球体**

$$B(x,r) = \{y \in X \mid d(y,x) < r\}$$

**定義**: $S \subseteq X$ は**開集合** ⇔ $\forall x \in S, \exists \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subseteq S$

x を中心とする十分小さい球（の内部）は S に含まれる



# 距離空間での収束:開集合による特徴付け

距離空間における収束の定義:距離を使って近づく様子を表現

→開球体を使っても表現可能

以下の定理: 収束する様子は任意の開集合を使っても表現可能

証明はユークリッド空間の場合と同様.

定理: 距離空間 (X,d) の点列$a_1, a_2, a_3, \ldots$は X の点 $c$ に収束する

⇔ $c$ を含む任意の開集合 $S \subseteq X$ に対し,

ある自然数 $n_0$ が存在して, $k \geq n_0 \Rightarrow a_k \in S$

# 演習問題 問1

数列$a_k$ $(k = 1,2,\ldots)$ が 1 に収束するとき，数列

$$b_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k} = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i$$

は 1 に収束する．これを証明したい．

(1) 数列$a_k$ が1に収束することの定義を書け.

(2) 数列$b_k$ が1に収束することの定義を書け.

(3) 数列$b_k$ が1に収束することを証明せよ.

ヒント: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k'}}{k} + \frac{a_{k'+1}+a_{k'+2}+\cdots+a_k}{k}$

k’ が十分に大きい → $\frac{a_{k'+1}+a_{k'+2}+\cdots+a_k}{k} \fallingdotseq 1$

k が k’ よりも十分に大きい → $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k'}}{k} \fallingdotseq 0$

# 演習問題 問2

距離空間 $(C[0,1], d_1)$ について考える.

(1) $f_k(x) = \begin{cases} -k^3x + k & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{k^2}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{k^2} < x \leq 1\right) \end{cases}$

が $f(x) = 0$ に収束することを証明せよ.

(2) $f_k(x) = \begin{cases} -k^2x + k & \left(0 \leq x \leq \frac{1}{k}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{k} < x \leq 1\right) \end{cases}$

は $C[0,1]$ のどの関数にも収束しないことを証明せよ. つまり,
$C[0,1]$ のどの関数fに対しても, ある正数εと自然数$n_0$が存在して,
任意の k≧$n_0$ に対して $d_1(f, f_k) > \varepsilon$が成り立つことを示せ.
（ヒント: 連続関数は, 有界閉区間において最大値をもつ）

# 演習問題 問3 (昨年中間試験の問題)

距離空間 $(X, d)$ における点列 $a_1, a_2, \ldots \in X$ および $c \in X$ について考える．任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対し，ある自然数 $n_0$ が存在して，$k \geq n_0$ を満たす任意の $k$ に対して $d(a_k, c) < \varepsilon$ が成り立つとき，$a_1, a_2, \ldots$ は $c$ に収束する，という．

(1) 実ベクトル列 $a_1, a_2, \ldots$ と実ベクトル $c$ に対し，$c$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球体 $B(c, r)$ が存在して，$a_1, a_2, \ldots$ はすべて $B(c, r)$ に含まれないとする．このとき，$a_1, a_2, \ldots$ は $c$ に収束しない．このことを，収束の定義に基づいて証明せよ． ヒント: 収束しないことの定義をまず書いてみる.

(2) 区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数の集合 $C[0, 1]$ について考える．$f, g \in C[0, 1]$ に対する距離 $d_1(f, g)$ を

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

により定める．このとき，距離空間 $(C[0, 1], d_1)$ において，

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k-1} & (x \in [0, 1 - \frac{1}{k})), \\ 1 & (x \in [1 - \frac{1}{k}, 1]) \end{cases}$$

により定義される関数の列 $f_1, f_2, \ldots$ が関数 $g(x) = x$ $(x \in [0, 1])$ に収束すること証明したい．

(2-1) $d_1(f_k, g)$ の値を計算せよ． ヒント: 積分はある図形の面積に等しい.

(2-2) $f_1, f_2, \ldots$ が $g$ に収束することを，収束の定義に基づいて証明せよ．