経営経済数学

距離空間

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

授業で教えること

宮川，水野，矢島（著）「経営工学の数理（Ｉ）」，朝倉書店

7.　ユークリッド空間の位相
- 7.1　ユークリッド空間
- 7.2　内部，外部，境界
- 7.3　部分集合の閉包
- 7.4　開集合と閉集合
- 7.5　開集合系と閉集合系

8.　距離空間と位相空間
- 8.1　距離空間
- (8.2　位相空間)
- 8.3　点列の収束
- 8.4　連続写像

9.　点列と連続関数の性質
- 9.1　コーシー列
- 9.2　部分列
- 9.3　連続関数の最小値

11.　凸集合と凸関数
- 11.1　凸集合
- 11.2　凸結合
- 11.3　超平面と半空間
- 11.4　凸関数
- 11.5　凸関数と最適化

空間とは？

〇〇空間 ＝ 「もの」の集まり（集合）
＋「もの」の数学的な構造・関係

- ユークリッド空間
  ＝ 実数ベクトルの集合
  ＋ 各種演算で定義された実数ベクトルの関係 ＋ . . .
- 距離空間 ＝ 集合 ＋ 要素間の距離
- 位相空間 ＝ 集合 ＋ 要素のグループの集合（開集合）
  同じグループに所属 ←→「近い」
- ノルム空間 ＝ ベクトルの集合 ＋ ノルム
- 線形空間 ＝ ベクトルの集合 ＋ 線形演算

距離と距離空間の定義

集合 X の要素 x, y に対する関数 d(x,y) は X 上の距離
←→ 以下の4条件を満たす：
(i) $d(x,y) \geq 0$
(ii) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(iii) [対称性] $d(x,y) = d(y,x)$
(iv) [三角不等式] $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
※ (i) は(ii), (iii), (iv)から導くことが可能.

※ユークリッド空間の距離$d = d_2$は，上記の条件を満たす
（ユークリッド距離，ℓ_2 距離と呼ばれる）
定義：
集合 X と関数 d(x,y) (x,y∈X) は距離空間 ←→ d は X 上の距離

距離空間の例

例1 : ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n, d)$

例2 : 任意の集合 S に対し,

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$ ➔ d は距離

（三角不等式の証明: x,y,zの3つに対し

x=y or x≠y, x=z or x≠z, y=z or y≠z の全ての組合せを調べる）

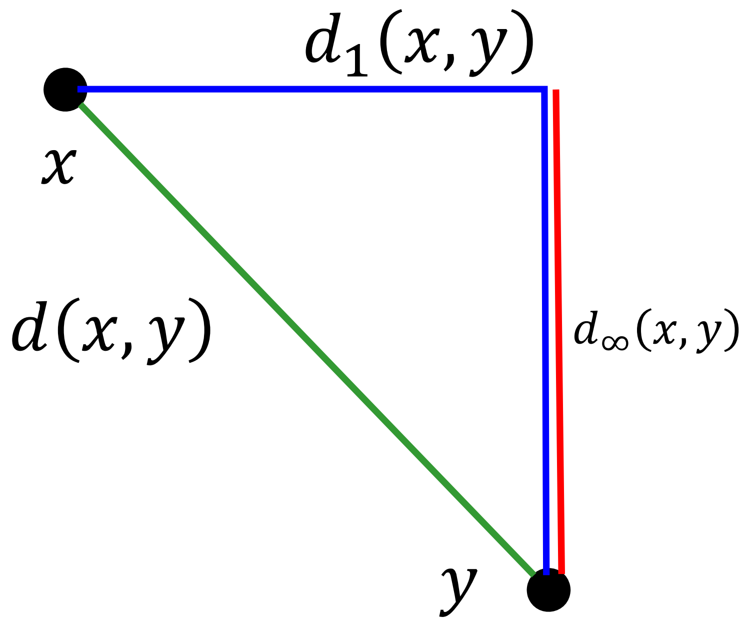
距離空間の例

例3：集合 $\mathbb{R}^n$ に対するマンハッタン距離（ℓ_1 距離）

$$d_1(x, y) \equiv \sum_{i=1}^{n} |x(i) - y(i)|$$

例4：集合 $\mathbb{R}^n$ に対するチェビシェフ距離（ℓ_∞ 距離）

$$d_\infty(x, y) \equiv \max_{1 \leq i \leq n} |x(i) - y(i)|$$



距離空間の例：三角不等式の証明

絶対値の性質 $|a+b| \leq |a|+|b|$ を使って三角不等式を導く

例3： $d_1(x,y) \equiv \sum_{i=1}^{n} |x(i)-y(i)|$

各 i に対し

$$|x(i)-z(i)| = \left|\left(x(i)-y(i)\right) + \left(y(i)-z(i)\right)\right| \leq |x(i)-y(i)| + |y(i)-z(i)| \bigstar$$

$$\begin{aligned}\therefore d_1(x,z) &= \sum_{i=1}^{n} |x(i)-z(i)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x(i)-y(i)| + \sum_{i=1}^{n} |y(i)-z(i)| \\ &= d_1(x,y) + d_1(y,z)\end{aligned}$$

距離空間の例:三角不等式の証明

絶対値の性質 $|a+b| \le |a| + |b|$ を使って三角不等式を導く

$$|x(i) - z(i)| = \left|\big(x(i) - y(i)\big) + \big(y(i) - z(i)\big)\right| \le |x(i) - y(i)| + |y(i) - z(i)| \quad ★$$

例4: $d_\infty(x,y) \equiv \max_{1 \le i \le n} |x(i) - y(i)|$

ある i* に対し $d_\infty(x,z) = |x(i^*) - z(i^*)|$ とする.

上記の不等式 ★ より

$$\begin{aligned} |x(i^*) - z(i^*)| &\le |x(i^*) - y(i^*)| + |y(i^*) - z(i^*)| \\ &\le \max_{1 \le i \le n} |x(i) - y(i)| + \max_{1 \le i \le n} |y(i) - z(i)| \\ &\le d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z) \end{aligned}$$

実数値連続関数の距離

C[a,b] : 閉区間[a,b]上の実数値連続関数全体の集合

--- 添字が x∈[a,b]の無限次元のベクトル集合とみなせる

C[a,b] に対する距離

例5 : 集合C[a,b]に対するマンハッタン距離（ℓ_1 距離）

--- ベクトルの成分和を積分に置き換え

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

例6 : 集合C[a,b]に対するチェビシェフ距離（ℓ_∞ 距離）

$$d_\infty(f,g) = \max_{a \le x \le b} |f(x) - g(x)|$$

※両方の距離ともに, f, g が有限区間での連続関数なので,

適切に定義されている(well-defined)

文字列間のハミング距離

- 長さ n の文字列（アルファベット列，01の列，DNA配列）に対する
  ハミング距離 ＝対応する位置にある異なった文字の個数

shioura
shimura ➔ 距離1

shioura
chiyoda ➔ 距離4

一般に，文字列 $A = a_1 a_2 \cdots a_n, B = b_1 b_2 \cdots b_n$ に対し

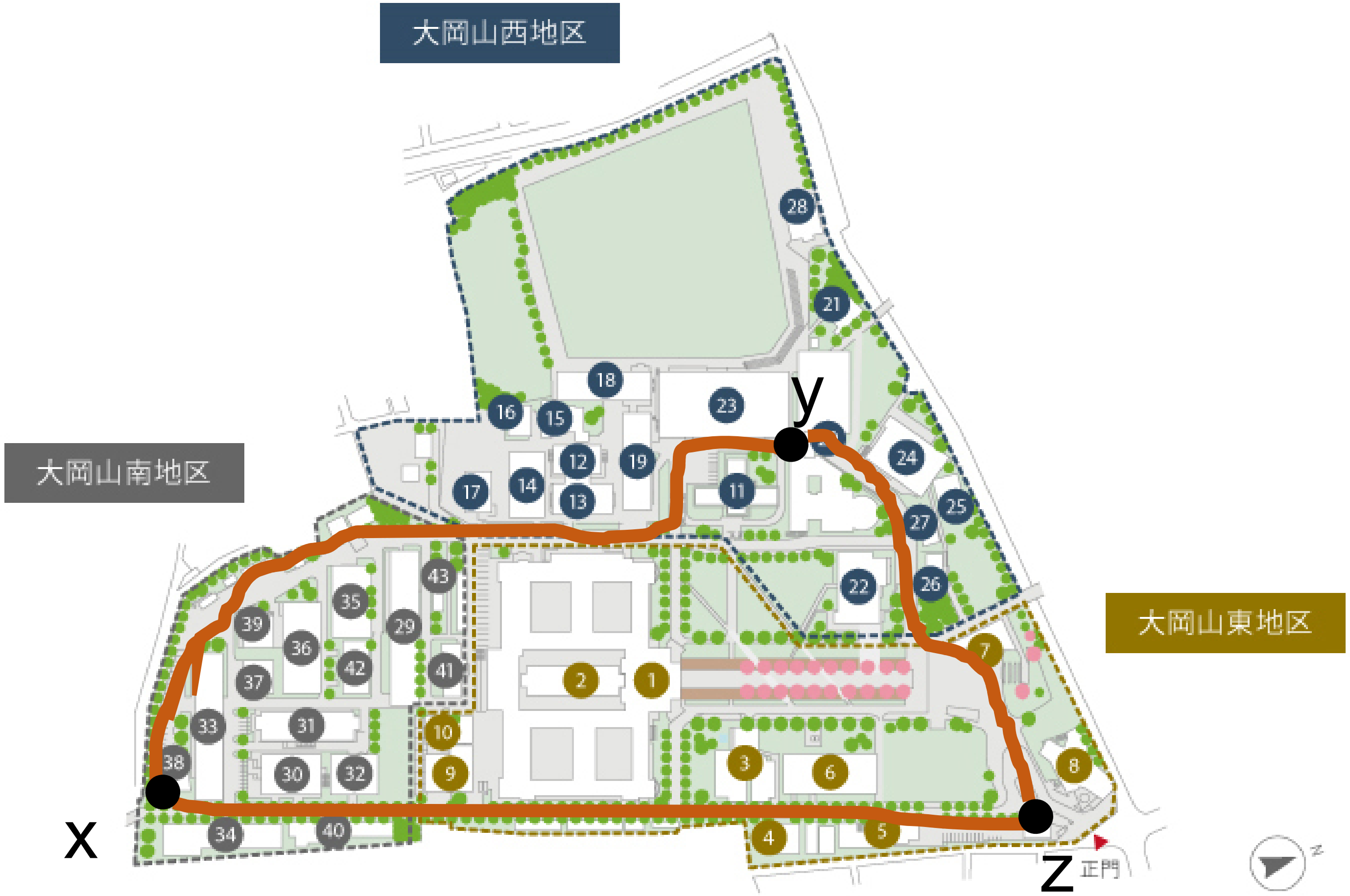
$d(A, B) = (a_i = b_i$ を満たす i の個数)

抽象化することの利点

距離空間には様々な例が存在し，同様の性質が成り立つ
➔一般の距離空間に対して，ある性質を証明できれば，
　個々の距離空間に対して証明する必要なし

みちのりから得られる距離

- X = 道路上の地点の集合
- d(x,y) = x 地点から y 地点への最短ルートの距離



距離空間の具体例

- 球面上の点集合（地球など）

　　2点間の距離をユークリッド距離で与えるのは不自然

　　　　2点を結ぶ弧の長さで定義するのが自然

この例のように，

扱うデータ（点集合）に対して適切な距離を使う必要性

　機械学習，ファイナンス，ゲーム理論，数理経済学，最適化，．．．

　画像，音声，時系列，混合戦略，確率分布，グラフ，．．．

➔ 距離空間を学ぶ意義

三角関数を満たさない d の例

X = {p, q, r},　d(p,q) = d(p,r) = 1, d(q,r) = 3

➔ d(p,q)+d(p,r) = 2 < 3 = d(q,r)

X = 実数全体$\mathbb{R}\cup\{0'\}$　(0’ は 0 の「コピー」)

$d(x,y) = |x-y|$ $(\forall x, y \in \mathbb{R})$,

$d(0',y) = d(0,y) = |y|$ $(\forall y \in \mathbb{R})$, $d(0,0') = 10$

➔ $d(0,1) + d(1,0') = 1 + 1 < 10 = d(0,0')$

X = $\mathbb{R}$

$d(x,y) = |x-y|$ (x, y がともに有理数またはともに無理数),

$d(x,y) = 1$ (x 有理数，y 無理数)

※ 距離の条件のうち，(3) のみを満たさない → 半距離(semimetric)

距離空間の開集合，閉集合など

- ユークリッド空間の内点，外点，境界点，などの概念は開球を使って定義された
- 開球はユークリッド距離を使って定義された

➔ 距離空間に対しても同様に，各種概念を定義することが可能
- 単にユークリッド距離を距離空間の距離に置き換えればよい

復習：ユークリッド空間の開集合

定義：中心 $x \in \mathbb{R}^n$, 半径 $r \geq 0$ の**開球体**

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}$$

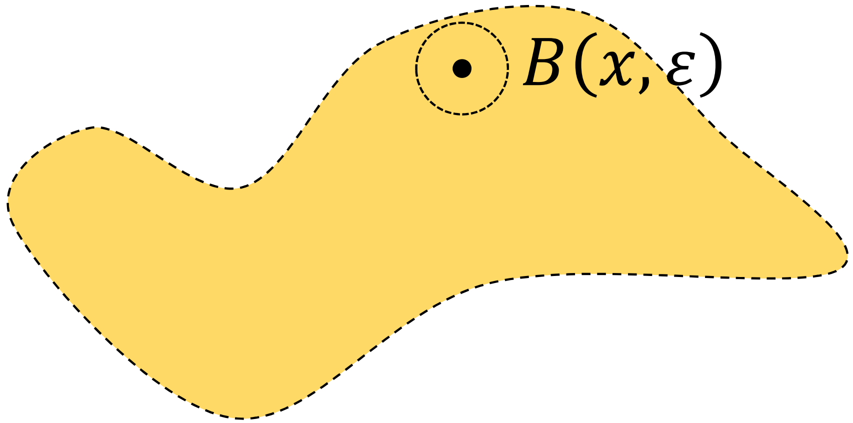
n=1 ならば開区間，n=2 ならば円の内部

定義：a は $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の**内点** ⟺ $\exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \subseteq M$

x を中心とする十分小さい球（の内部）は S に含まれる

定義：$M \subseteq \mathbb{R}^n$ の**内部** ＝ Mの内点の集合

定義：$M \subseteq \mathbb{R}^n$ は**開集合** ⟺ M ＝ Mの内部



※定義より，空集合，全体集合は開集合

距離空間の開集合

そうなるようにユークリッド空間における定義を書いていた

距離空間 (X, d) における開集合は,
ユークリッド空間の場合と同様に定義が可能

定義: 中心 $x \in \mathbb{R}^n$, 半径 $r \geq 0$ の**開球体**

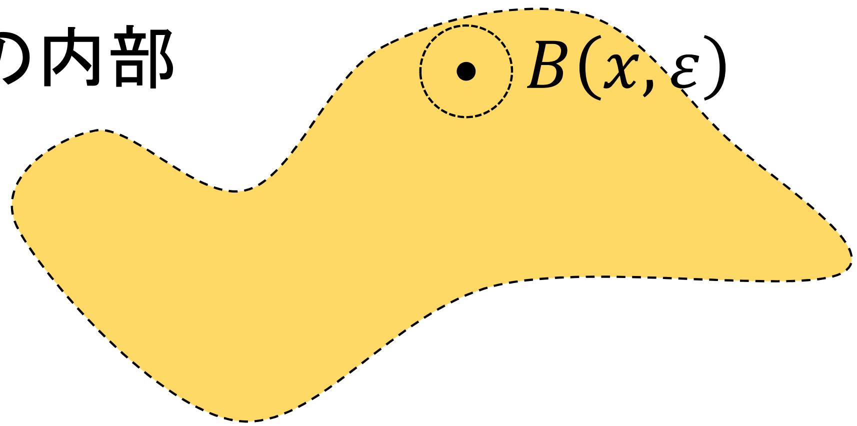
$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}$$

定義: a は $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の**内点** ⇔ $\exists \varepsilon > 0: B(a, \varepsilon) \subseteq M$

x を中心とする十分小さい球（の内部）は S に含まれる

定義: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ の**内部** ＝ Mの内点の集合

定義: $M \subseteq \mathbb{R}^n$ は**開集合** ⇔ M ＝ Mの内部



※定義より，空集合，全体集合は開集合

ユークリッド空間における距離の比較

ユークリッド距離(ℓ_2 距離)　$d_2(x,y) \equiv \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$

マンハッタン距離(ℓ_1 距離)　$d_1(x,y) \equiv \sum_{i=1}^{n} |x(i) - y(i)|$

チェビシェフ距離(ℓ_∞ 距離)　$d_\infty(x,y) \equiv \max_{1 \le i \le n} |x(i) - y(i)|$

$\mathbb{R}^n$ に対する距離をマンハッタン距離やチェビシェフ距離に変えたとき，開集合，閉集合，境界は変化するか？ しない！

→ $\mathbb{R}^n$ における開集合，閉集合，境界を定義するときは，
ユークリッド距離，マンハッタン距離，チェビシェフ距離のどれを使ってもよい

※一般に，同じ集合に対して異なる距離を用いると，
開集合，閉集合，境界は変化する

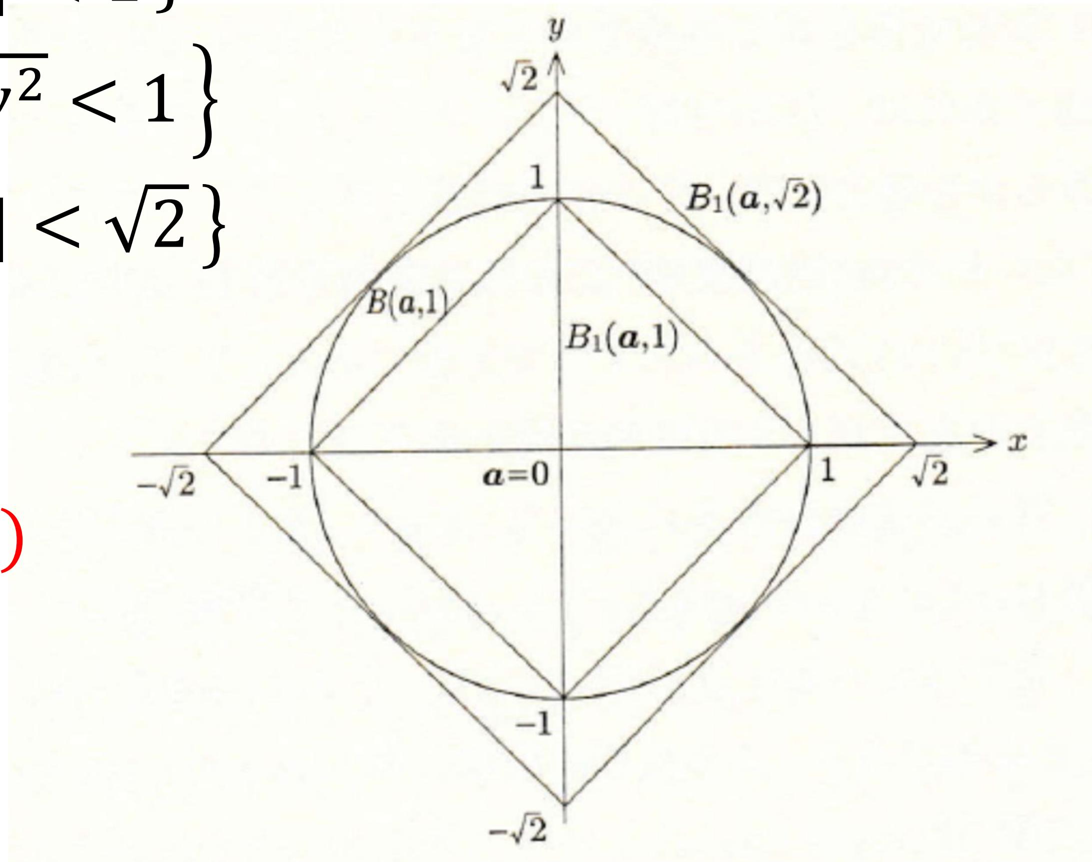
ユークリッド距離とマンハッタン距離の比較：2次元の場合

$\mathbb{R}^2$ におけるユークリッド距離とマンハッタン距離の関係

$B_1((0,0),1) = \{ (x,y) \mid |x| + |y| < 1 \}$

$B_2((0,0),1) = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2} < 1 \right\}$

$B_1((0,0),1) = \left\{ (x,y) \;\middle|\; |x| + |y| < \sqrt{2} \right\}$



一般に $a \in \mathbb{R}^2, r > 0$ に対して

$B_1(a,r) \subseteq B_2(a,r) \subseteq B_1(a,\sqrt{2}r)$

ユークリッド距離とマンハッタン距離の比較

次元が n の場合は　$B_1(a,r) \subseteq B_2(a,r) \subseteq B_1(a,\sqrt{n}r)$

この事実より「ユークリッド距離に関する開集合と，

マンハッタン距離に関する開集合は一致」が示せる

（証明）任意の集合 M とベクトル a に対して，

「ユークリッド距離に関して a は M の内点

$\Leftrightarrow$ マンハッタン距離に関して a は M の内点」を示せばよい．

ユークリッド距離に関する任意の開球 $B_2(a,r)$に対し，

それに含まれるマンハッタン距離に関する

開球 $B_1(a,r')$ (r’>0) が存在

よって，$B_2(a,r) \subseteq M$ ならば $B_1(a,r') \subseteq M$

∴ 上記の “➔” が成立

上記の “🡐”も同様に証明できる．

開集合の共通部分，和集合：ユークリッド空間の場合

定理7.3

(i) $\mathbb{R}^n$ と空集合は開集合 $(\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathcal{D})$

(ii) $O_1, O_2, \ldots, O_n$ は開集合 ➔ 共通部分は開集合

$(O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{D} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{D})$

(iii) 開集合の集合 $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ （Λ は添字集合）に対し，

それらの和集合は開集合　$((O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{D})$

開集合の共通部分，和集合：距離空間の場合

定理　距離空間(X,d) の開集合すべての集合 $\mathcal{D}$ に対して，
以下が成立：

(i) X と空集合は開集合 $(X, \emptyset \in \mathcal{D})$

(ii) $O_1, O_2, \dots, O_n$ は開集合 ➔ 共通部分は開集合
$(O_1, O_2, \dots, O_n \in \mathcal{D} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{D})$

(iii) 開集合の集合 $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$（$\Lambda$ は添字集合）に対し，
それらの和集合は開集合　$((O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{D})$

証明もユークリッド空間の場合と同じ

演習問題
（提出は次回授業日の11:59まで）

問1：ハミング距離に対して三角不等式

$d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$

ただし $A = a_1 a_2 \cdots a_n, B = b_1 b_2 \cdots b_n,\ C = c_1 c_2 \cdots c_n$

が成り立つことを証明せよ.

問2：X を東急電鉄の駅の集合とし，任意の x, y∈X に対し，d(x,y) を駅 x から駅 y まで東急電鉄を使って移動した場合の所要時間とする．このとき，d が三角不等式を満たすことを証明せよ.

（ただし，各駅での電車の停車時間，および乗換時間は無視する）

演習問題
（提出は次回授業日の11:59まで）

問3：実数の無限数列$x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots)$に対して

$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$とおく.

このとき，dが三角不等式を満たすことを証明せよ.

以下の不等式を使ってもよい：

実数a, bに対して$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$

演習問題

問4：任意の実数 x, y に対し，その距離を以下のように定義する.

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & (x = y) \\ 1 & (x \neq y) \end{cases}$$

この距離に関する距離空間$(\mathbb{R}, d)$ を考える.

(1) この距離空間において，実数 a を中心とする半径 r の開球体はどのような集合になるか？具体的に書きなさい.

(2) この距離空間における開集合をすべて求めなさい.
また，そのようになる理由を述べよ.