経営経済数学
第２回

ユークリッド空間の位相（２）

塩浦昭義
東京工業大学 経営工学系
shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

7.　ユークリッド空間の位相

7.4　開集合と閉集合

7.5　開集合系と閉集合系

やりたいこと

- 開集合，閉集合の概念

　　点列の収束性，関数の連続性の議論で使う

開集合

定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ は開集合(open set)

$\Leftrightarrow$ Mに含まれる任意の点はMの内点（つまり $M^i = M$）

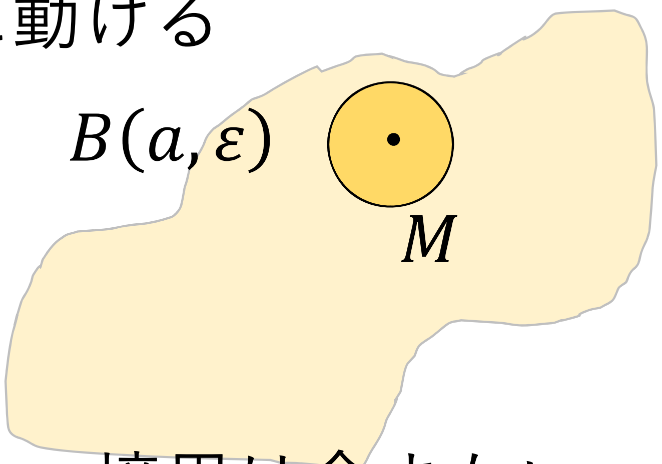
$\Leftrightarrow$ $\forall a \in M, \exists \varepsilon > 0:\ B(a,\varepsilon) \subseteq M$

定義の意味

Mの外に出ることなく，点 a の周りの全ての方向に

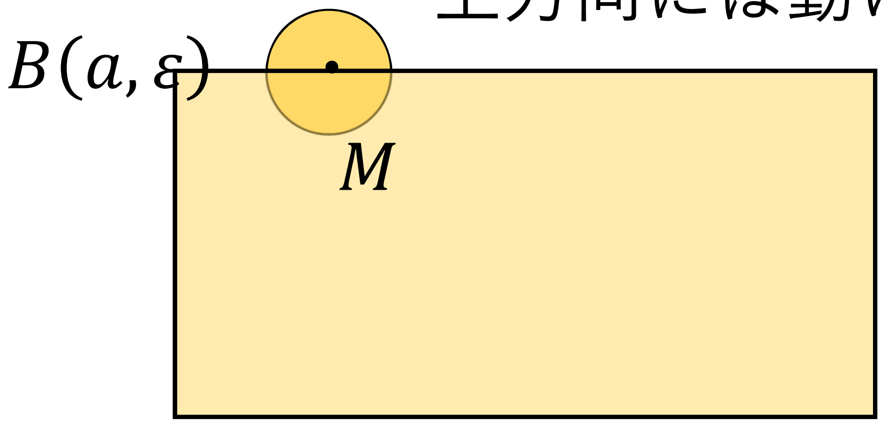
（短い距離ならば）自由に動ける → ゆえに “open” set

360度すべての方向
に動ける



境界は含まない

上方向には動けない



境界を含む

開集合の例

定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ は開集合(open set)

⟺ Mに含まれる任意の点はMの内点（つまり $M^i = M$）

⟺ $\forall a \in M, \exists \varepsilon > 0$: $B(a, \varepsilon) \subseteq M$

例１：空集合$M = \emptyset$ は開集合

∵ M に含まれる点が存在しない → 定義の条件が自明に成立

例２：空間全体$\mathbb{R}^n$は開集合

∵ 任意の開球 $B(a, \varepsilon)$ は $\mathbb{R}^n$ に含まれる

開集合の例

定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ は開集合(open set)

⟺ Mに含まれる任意の点はMの内点（つまり $M^i = M$）

⟺ $\forall a \in M, \exists \varepsilon > 0\colon\ B(a, \varepsilon) \subseteq M$

例３：実数の区間$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

$\because \forall x \in (a, b),\ \varepsilon = \min(x - a, b - a)$ とおくと$B(a, \varepsilon) \subseteq (a, b)$ 成立

例４： $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\},\ (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$

$(a, b), (-\infty, b), (a, +\infty)$ は開区間(open interval) とよばれる

閉集合

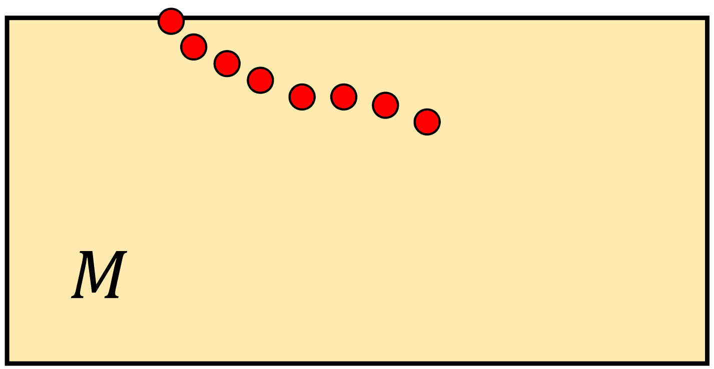
定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ は閉集合(closed set)

$$\Leftrightarrow M = \overline{M}$$

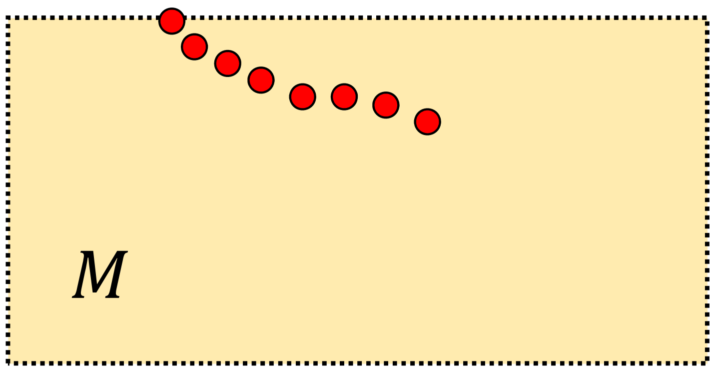
閉集合の重要な性質（詳細は後日説明）

Mは閉集合 ⇔ M の収束点列が a に収束するとき，a∈M

Mの収束点列の行き先はMの中　Mの収束点列の行き先はMの外



境界を含む



境界を含まない

閉集合の必要十分条件

定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ は閉集合(closed set)　$\Leftrightarrow$ $M = \overline{M}$

閉集合の必要十分条件

① $M^b \subseteq M$

(証明) M 閉集合

$\Leftrightarrow$ $M = \overline{M} = M^i \cup M^b$ （閉集合と閉包の定義より）

$\Leftrightarrow$ $M^b \subseteq M$ （$M^i \subseteq M$ より）

閉集合の必要十分条件

定義： 集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ は閉集合(closed set)　 ⟵⟶ $M = \overline{M}$

閉集合の必要十分条件

② M の補集合M^c = M の外部M^e(M に含まれない点はMの外点)

(証明) M 閉集合 ⟵⟶ $M = \overline{M} = M^i \cup M^b$

⟵⟶ M の補集合 = $M^i \cup M^b$ の補集合＝Mの外部 M^e

（∵$\mathbb{R}^n$ は M の内部・外部・境界に３分割される ）

Mの内部
Mの境界
Mの外部

閉集合の例

集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ は閉集合(closed set) $\Leftrightarrow M = \overline{M}$

$\Leftrightarrow M^b \subseteq M \Leftrightarrow M^c = M^e$

例１：空集合$M = \emptyset$ は閉集合

$\because$空集合の閉包は空集合.　　空集合の境界は空集合.

例２：空間全体$\mathbb{R}^n$は閉集合

$\because$ $\mathbb{R}^n$の閉包は$\mathbb{R}^n$.　$\mathbb{R}^n$の境界は空集合.

閉集合の例

集合 $M \subseteq \mathbb{R}^n$ は閉集合(closed set) $\Leftrightarrow M = \overline{M}$

$\Leftrightarrow M^b \subseteq M \Leftrightarrow M^c = M^e$

例３：実数の区間$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

∵境界は {a,b}

例４： $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$, $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$

$[a, b], (-\infty, b], [a, +\infty)$ は閉区間(closed interval) とよばれる

開集合，閉集合の性質

定理7.2：

(i)　M は開集合 ⇔ M の補集合M^cは閉集合

(ii) M の内部 M^iは，Mに含まれる開集合の中で最大

つまり，(ii-1) M^iは開集合

(ii-2) Mに含まれる任意の開集合N はM^i に含まれる

(iii) M の閉包$\overline{M}$は，Mを含む閉集合の中で最小

つまり，(iii-1)$\overline{M}$は閉集合

(iii-2) Mを含む任意の閉集合Nは$\overline{M}$を含む

定理7.2 (i) の証明

示すこと：Mは開集合 ←→ M の補集合は閉集合

まず,　$\mathbb{R}^n$ は M の内部・外部・境界に３分割される ☆

Mの内部 **=Mの補集合の外部**
Mの境界 **=Mの補集合の境界**
Mの外部 **=Mの補集合の内部**

また,

Mの補集合の閉包

＝Mの補集合の境界∪Mの補集合の内部

＝Mの境界 ∪ Mの外部 ★

よって,

Mは開集合

←→ M ＝ Mの内部 （定義より）

←→ Mの補集合 ＝ Mの境界と外部　（性質☆）

＝ Mの補集合の閉包（性質★）

←→ Mの補集合は閉集合　■

定理7.2 (ii)の証明の準備

命題: $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ ならば Aの内部 $\subseteq B$の内部

（証明）任意の $x \in A^i$ に対し， $x \in B^i$ を示す.

$x \in A^i$ なので， $\exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A \subseteq B$

ゆえに x は B の内点である. ■

定理7.2 (ii-1) の証明

示すこと： M の内部 M^i は開集合

開集合の定義より，

$$\forall a \in M^i, \exists \varepsilon > 0: \ B(a,\varepsilon) \subseteq M^i$$

を示せばよい

$a \in M^i$ はMの内点なので， $\exists \varepsilon > 0: \ B(a,\varepsilon) \subseteq M$

$B(a,\varepsilon) \subseteq M$ より， $B(a,\varepsilon)^i \subseteq M^i$ が成立（下記の命題より）

$B(a,\varepsilon)$ は開集合なので， $B(a,\varepsilon)^i = B(a,\varepsilon)$

$\therefore \ B(a,\varepsilon) \subseteq M^i$ ■

命題 : $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ ならば Aの内部 $\subseteq$ Bの内部

定理7.2 (ii-2) の証明

示すこと：N⊆M, N は開集合 ➔ $N \subseteq M^i$

N は開集合なので，定義より$N = N^i$
$N \subseteq M$ と下記の命題より $N^i \subseteq M^i$ が成立
$\therefore\ N = N^i \subseteq M^i$ ■

命題 : $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ ならば Aの内部 $\subseteq$ Bの内部

定理7.2 (iii) の証明

(iii-1) 閉包 $\overline{M}$は閉集合
(iii-2) Mを含む任意の閉集合Nは$\overline{M}$を含む
--- (i), (ii) を使って証明できる

Mの内部 =Mの補集合の外部
Mの境界 =Mの補集合の境界
Mの外部 =Mの補集合の内部

(iii-1) の証明：

閉包 $\overline{M}$ ＝ Mの内部∪Mの境界

∴閉包の補集合 ＝Mの外部
＝Mの補集合の内部

(ii-1)より，内部は常に開集合

∴ 閉包は開集合の補集合

∴ (i) より閉包は閉集合 ■

定理7.2 (iii) の証明

命題: $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$ ならば
Aの内部 $\subseteq B$の内部

(iii-1)$\overline{M}$は閉集合

(iii-2) Mを含む任意の閉集合Nは$\overline{M}$を含む

--- (i), (ii) を使って証明できる

(iii-2) の証明： (ii-2)を使って証明する.

N⊇M なの，Nの補集合⊆Mの補集合.

Nは閉集合なので，(i) より， Nの補集合は開集合.

(ii-2) より，Nの補集合⊆Mの補集合の内部＝Mの外部

∴ N⊇Mの外部の補集合＝Mの内部∪Mの境界＝Mの閉包 ■

開集合の共通部分，和集合

定理7.3

(i) $\mathbb{R}^n$ と空集合は開集合 $(\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathcal{D})$

(ii) $O_1, O_2, \dots, O_n$ は開集合 ➔ 共通部分は開集合

$(O_1, O_2, \dots, O_n \in \mathcal{D} \Rightarrow O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n \in \mathcal{D})$

(iii) 開集合の集合 $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ （Λ は添字集合）に対し，

それらの和集合は開集合　$((O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq \mathcal{D} \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{D})$

※ (ii) の共通部分では有限個の開集合を扱うが，

(iii) の和集合では 非可算無限個の開集合でもよいことに注意.

閉集合の共通部分，和集合

定理7.4

(i) $\mathbb{R}^n$ と空集合は閉集合 $(\mathbb{R}^n, \emptyset \in \mathcal{U})$

(ii) $O_1, O_2, \ldots, O_n$ は閉集合 ➔和集合は閉集合

$(O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{U} \Rightarrow O_1 \cup O_2 \cup \cdots \cup O_n \in \mathcal{U})$

(iii)閉集合の集合 $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ （Λ は添字集合）に対し，

それらの共通部分は閉集合　$((O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \bigcap_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathcal{U})$

※ (ii) の和集合では有限個の閉集合を扱うが，

(iii) の共通部分では 非可算無限個の閉集合でもよいことに注意.

定理7.3 および「Mは閉集合⇔補集合は閉集合」より

証明可能

開集合・開集合の共通部分，和集合：例

$$A_n = \left[1 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right],\ \ B_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right)$$

n=1,2,3の共通部分，和集合

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [2,4] \cap \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right] \cap \left[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right] = \left[2, \frac{10}{3}\right]$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \left[\frac{4}{3}, 4\right]$$

$$B_1 \cap B_2 \cap B_3 = (2,4) \cap \left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right) \cap \left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right) = \left(2, \frac{10}{3}\right)$$

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \left(\frac{4}{3}, 4\right)$$

閉集合の共通部分，和集合は閉集合

開集合の共通部分，和集合は開集合

開集合・開集合の共通部分，和集合：例

$$A_n = \left[1 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right],\ \ B_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 3 + \frac{1}{n}\right)$$

n=1,2,⋯の共通部分，和集合

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots = [2,3]$ 閉集合だが開集合ではない

$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = (1,4]$ 閉集合でも開集合でもない

$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 \cap B_2 \cap \cdots = (2,3]$ 閉集合でも開集合でもない

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B_1 \cup B_2 \cup \cdots = (1,4)$ 開集合だが閉集合ではない

閉集合の共通部分は閉集合，和集合は閉集合とは限らない

開集合の共通部分は開集合とは限らない，和集合は開集合

定理7.3 (ii) の証明

「開集合 $O_1, O_2, \ldots, O_n$ に対し,
$O = O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n$ が開集合になる」ことを示す
$\leftarrow \forall a \in O, \exists \varepsilon > 0\colon\ B(a, \varepsilon) \subseteq O$ を示せばよい

$a \in O$ とすると， $a \in O \subseteq O_i \ (i = 1,2, \ldots, n)$
各 O_i は開集合なので，定義より $\exists \varepsilon_i > 0\colon\ B(a, \varepsilon_i) \subseteq O_i$
$\varepsilon = \min\limits_{1 \le i \le n} \varepsilon_i$ とおくと， $\varepsilon > 0$ であり，かつ
$B(a, \varepsilon) \subseteq B(a, \varepsilon_i) \subseteq O_i$ が任意の i に対して成立.
よって， $B(a, \varepsilon) \subseteq O$ が成り立つ． ■

定理7.3 (ii) の証明

「開集合 $O_1, O_2, \ldots, O_n$ に対し,

$O = O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_n$ が開集合になる」ことを示す

$\leftarrow \forall a \in O, \exists \varepsilon > 0$: $B(a, \varepsilon) \subseteq O$ を示せばよい

$a \in O$ とすると, $a \in O \subseteq O_i$ $(i = 1,2, \ldots, n)$

各 O_i は開集合なので, 定義より $\exists \varepsilon_i > 0$: $B(a, \varepsilon_i) \subseteq O_i$

$\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq n} \varepsilon_i$ とおくと, $\varepsilon > 0$ であり, かつ

$B(a, \varepsilon) \subseteq B(a, \varepsilon_i) \subseteq O_i$ が任意の i に対して成立.

よって, $B(a, \varepsilon) \subseteq O$ が成り立つ. ■

※開集合の数が無限個のとき,

この証明はどうして使えないか？

定理7.3 (iii) の証明

「開集合 O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ に対し， $O = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ が開集合になる」ことを示す

$\leftarrow \forall a \in O, \exists \varepsilon > 0\colon\ B(a,\varepsilon) \subseteq O$ を示せばよい

$a \in O$ とすると，Oの定義より，

ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して $a \in O_\lambda$ が成り立つ.

O_λ は開集合なので，定義より $\exists \varepsilon > 0\colon\ B(a,\varepsilon) \subseteq O_\lambda \subseteq O$ ■

演習問題
（提出は次回授業日の11:59まで）

問1：(昨年中間試験の問題)

集合M ⊆ R^2 を M = {(x, y) | x > 0, y > 0, y ≤ 1/x}

と定義する．Mが開集合か否かを答えよ．また，その理由を

定義に基づき説明せよ．

問2：(昨年中間試験の問題)

問1のMが閉集合か否かを答えよ．また，その理由を

定義に基づき説明せよ．

問3：$\mathcal{F}$ は$\mathbb{R}^n$の集合を有限個集めた集合とする． $\mathcal{F}$ が以下の条件を満たすとき，（包含関係に関して）最大の集合が$\mathcal{F}$に存在し，それが唯一に定まる．これを証明せよ．

条件： $S, T \in \mathcal{F}$ ならば $S \cup T \in \mathcal{F}$