アルゴリズムとデータ構造

コンピュータサイエンスコース
知能コンピューティングコース

第13回
グラフの深さ優先探索

塩浦昭義
情報科学研究科 准教授
shioura@dais.is.tohoku.ac.jp
http://www.dais.is.tohoku.ac.jp/~shioura/teaching

期末試験について

- 日時：8月5日（木）8:50～10:20
- 受験資格：
  - 中間試験に合格（合格49名，不合格9名）
  - 中間試験以降にレポートを一回以上提出
- 教科書，ノート等の持ち込みは一切不可
- 座席はこちらで指定
- 試験内容：第7回（動的計画法）～第13回（最終回）の講義で教えたところ
  - アルゴリズムやデータ構造の挙動
  - 時間計算量の解析，および関連する証明問題
  - 用語の定義，など
- 50点満点，24点以下は追試レポートもしくは単位不可
- 採点は8月7日（金）までに終える予定

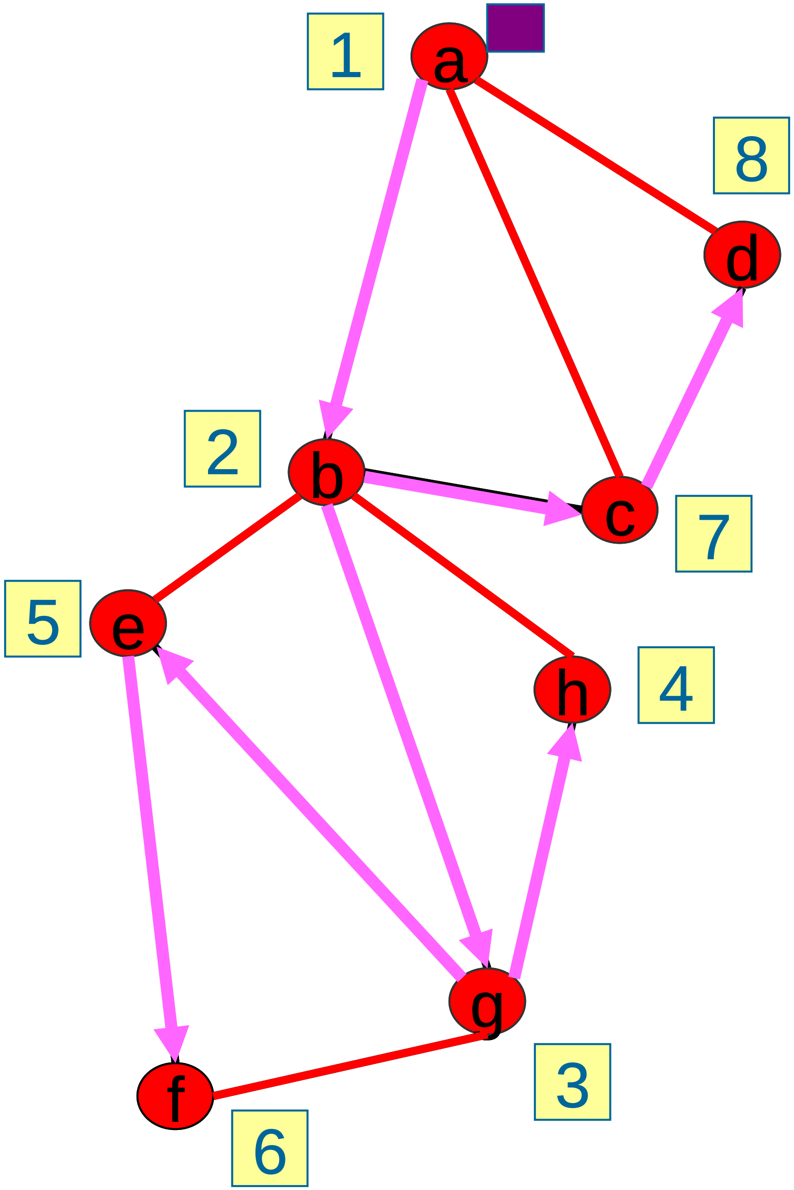
グラフの深さ優先探索

- 与えられたグラフを組織的に探索する方法のひとつ
- グラフの構造・性質を調べるときに有効な技法
  - 連結成分，2連結成分，強連結成分に分解
  - 閉路の検出
  - などなど

無向グラフの深さ優先探索

(1) 各頂点，各枝を白く塗る
(2) 各頂点 u∈V に対し，
　u が白色（未走査）ならば
　手続きDFS-VISIT(u)を実行

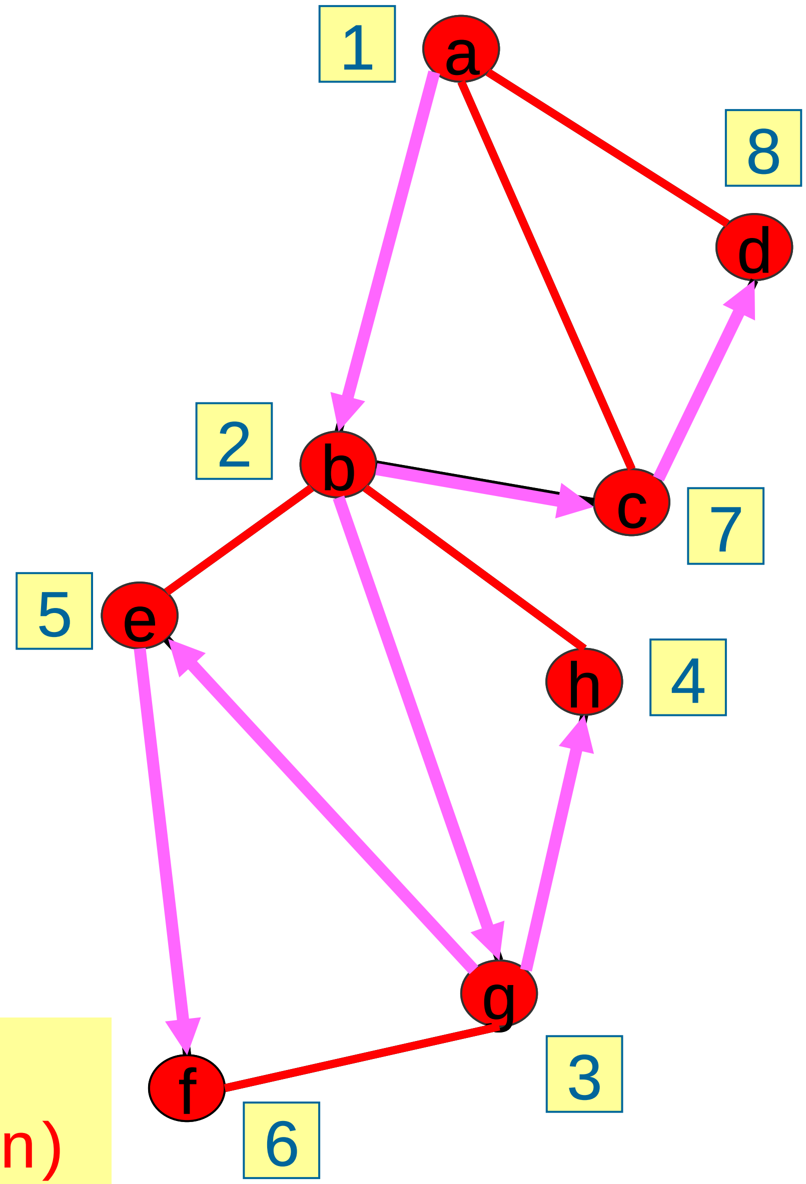
手続き DFS-VISIT(u)
(a) u を黒く塗る
(b) u に接続する各枝 (u, v) に対し，以下を実行：
　枝が白色（未走査）ならば，黒く塗る
　v が白色（未走査）ならば
　DFS-VISIT(v) を再帰呼び出し



無向グラフの深さ優先探索

(1) 各頂点，各枝を白く塗る
(2) 各頂点 u∈V に対し，
　u が白色（未走査）ならば
　手続きDFS-VISIT(u)を実行

手続き DFS-VISIT(u)
(a) u を黒く塗る
(b) u に接続する各枝 (u, v) に
　対し，以下を実行：
　　枝が白色（未走査）ならば，黒く塗る
　　v が白色（未走査）ならば
　　DFS-VISIT(v) を再帰呼び出し



深さ優先探索の実行時間：
グラフを隣接リストで表現するとO(m＋n)

無向グラフの2連結成分

- 無向グラフG＝(V, E)において,

  頂点 u, v は同じ2連結成分に含まれる

  ←→u, v 以外の頂点 w を削除しても,

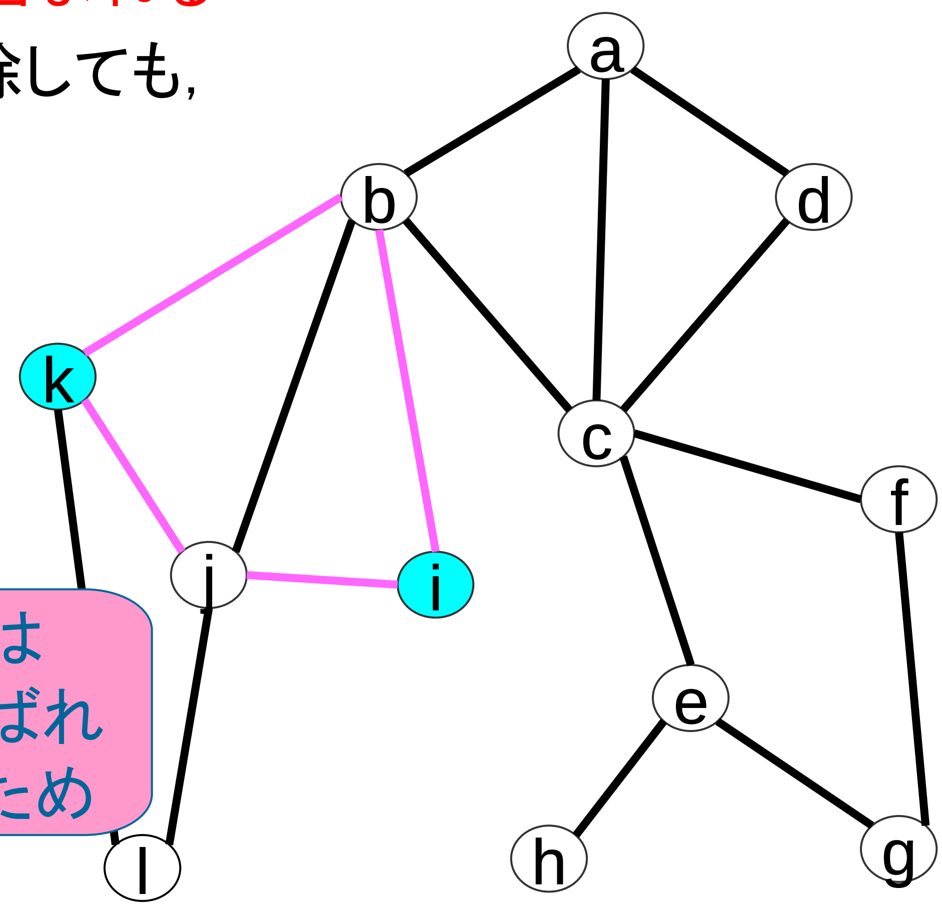
  uからvへの路が存在

k と i は同じ
2連結成分に含まれる

a と c は同じ
2連結成分に含まれる

e と h は同じ
2連結成分に含まれる

eとhは
枝で結ばれ
ているため



無向グラフの2連結成分

- 無向グラフG＝(V, E)において,

頂点 u, v は同じ2連結成分に含まれる

⇔ u, v 以外の頂点 w を削除しても,

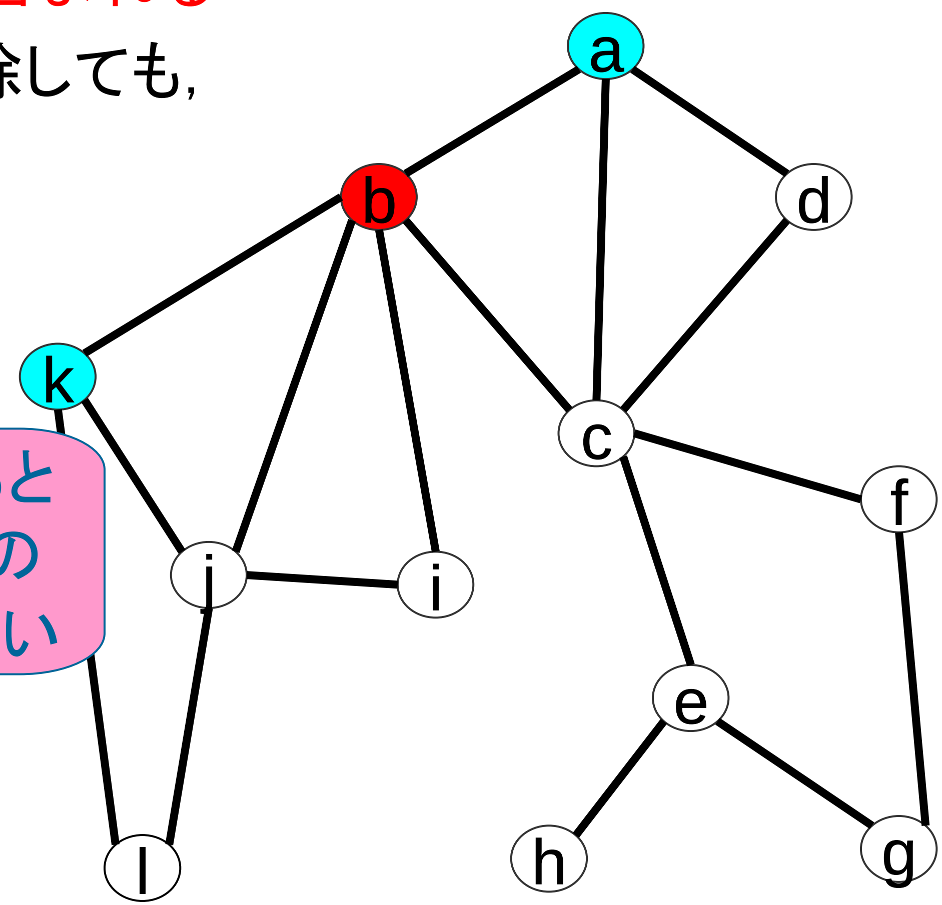
uからvへの路が存在

a と k は同じ
2連結成分に含まれない

c を削除すると
b から g への
路が存在しない

b を削除すると
a から k への
路が存在しない

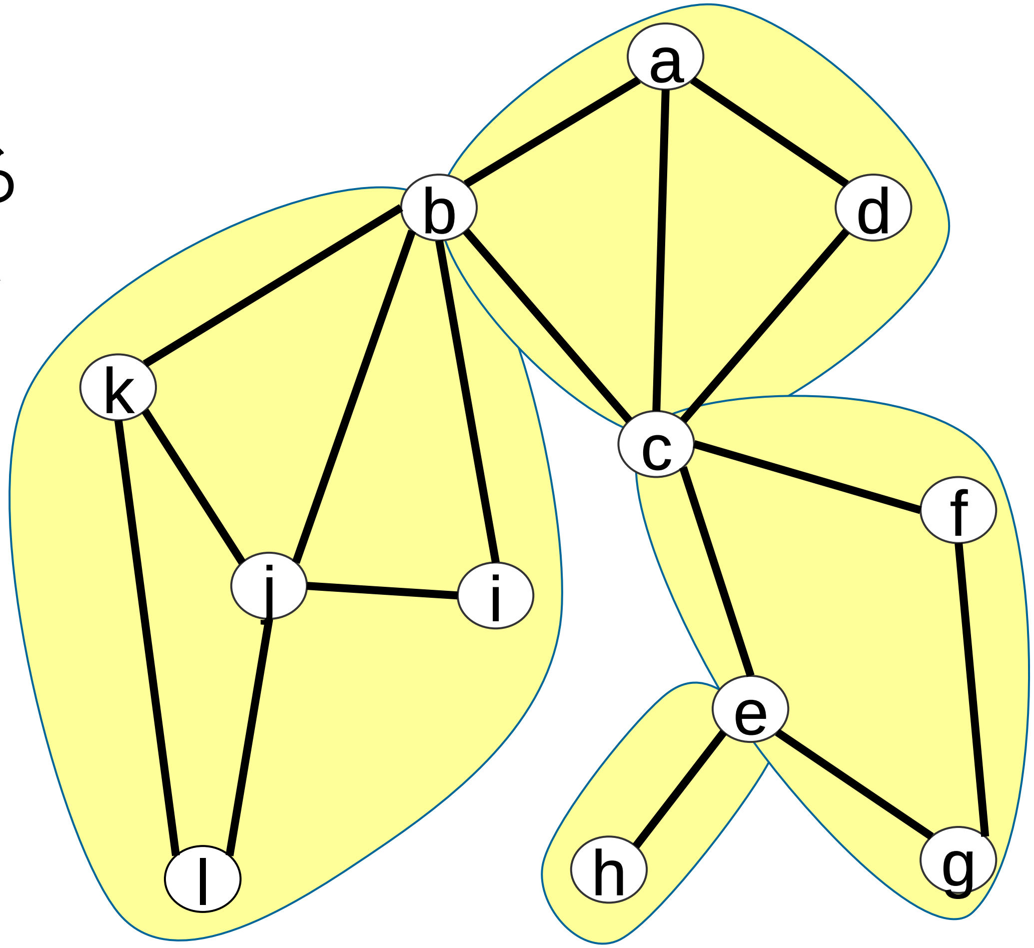
b と g は同じ
2連結成分に含まれない



2連結成分分解と関節点

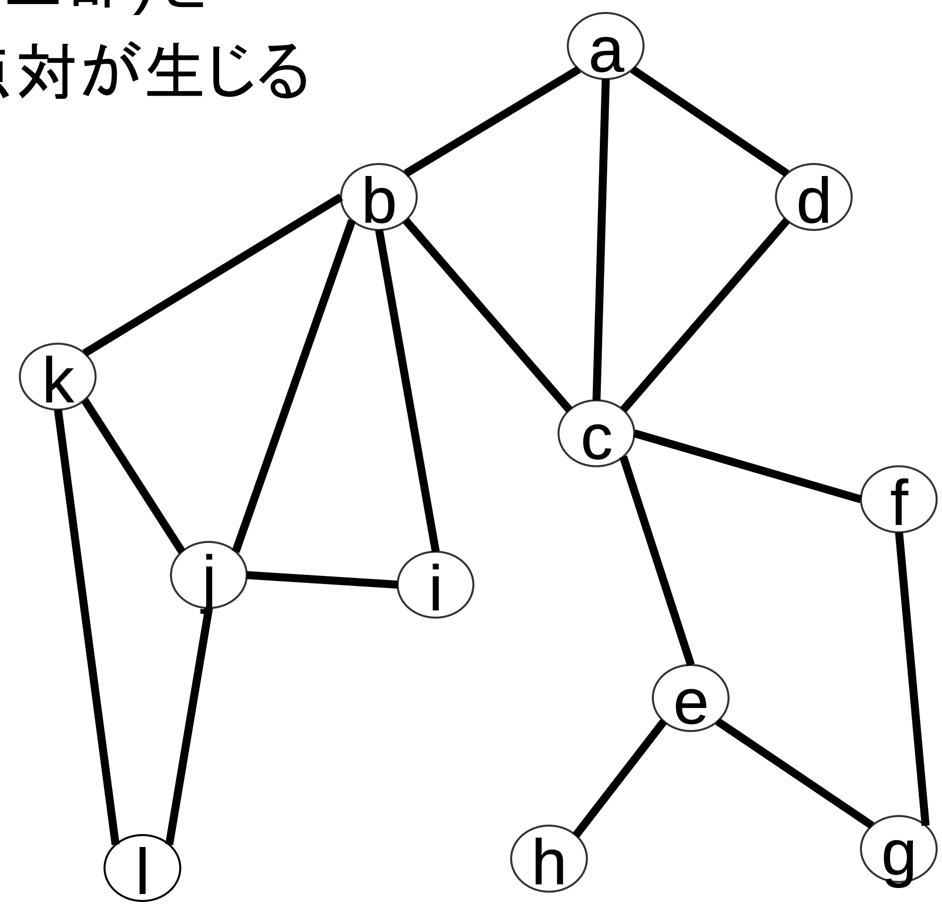
- 同じ連結成分に含まれる頂点をグループ分け
  ➔2連結成分分解
- 複数の2連結成分に含まれる
  頂点が存在➔関節点と呼ぶ

頂点 b, c, e は関節点



無向グラフの関節点

- **性質**：無向グラフG＝(V, E)において，頂点 u は関節点
  ←→u (および u に接続する枝全部)を
  削除すると，非連結になる頂点対が生じる



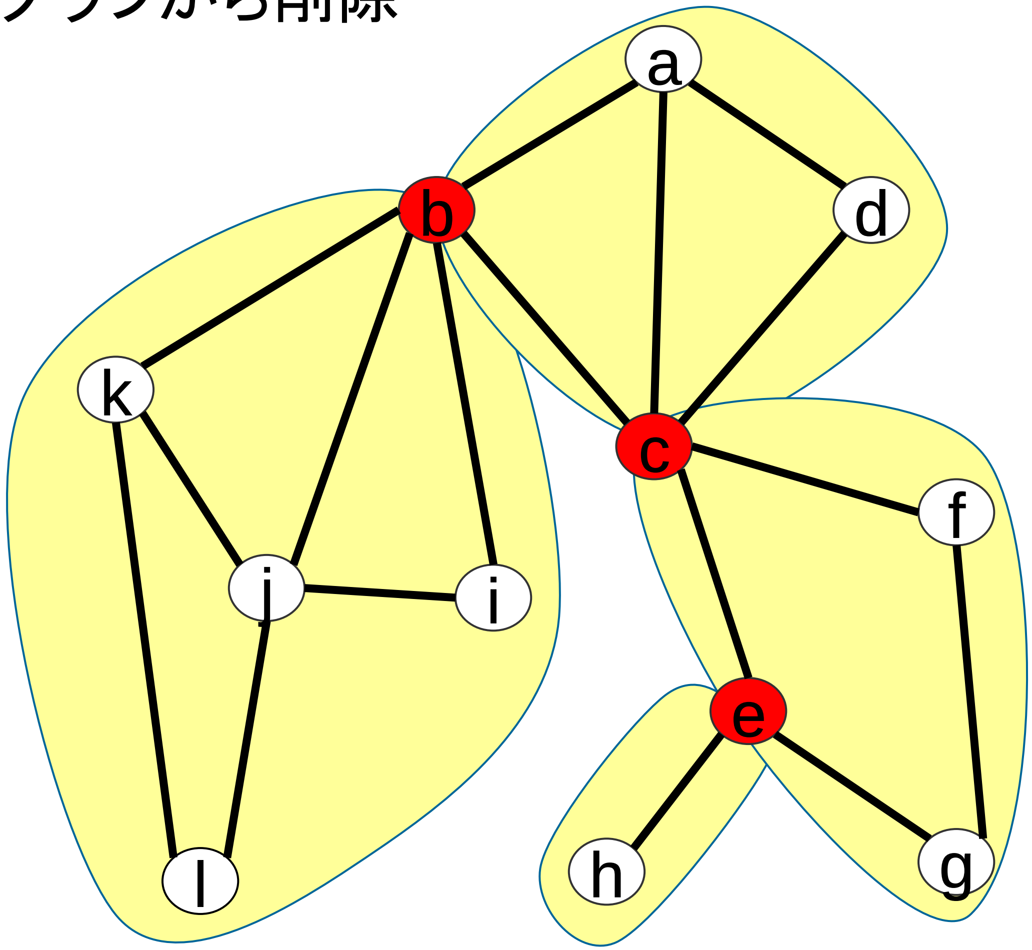
頂点 b, c, e は関節点
他の頂点は関節点ではない

関節点から2連結成分分解を求める

関節点が計算できれば，２連結成分分解も計算できる

（1）関節点および接続する枝をグラフから削除

（2）連結成分に分解

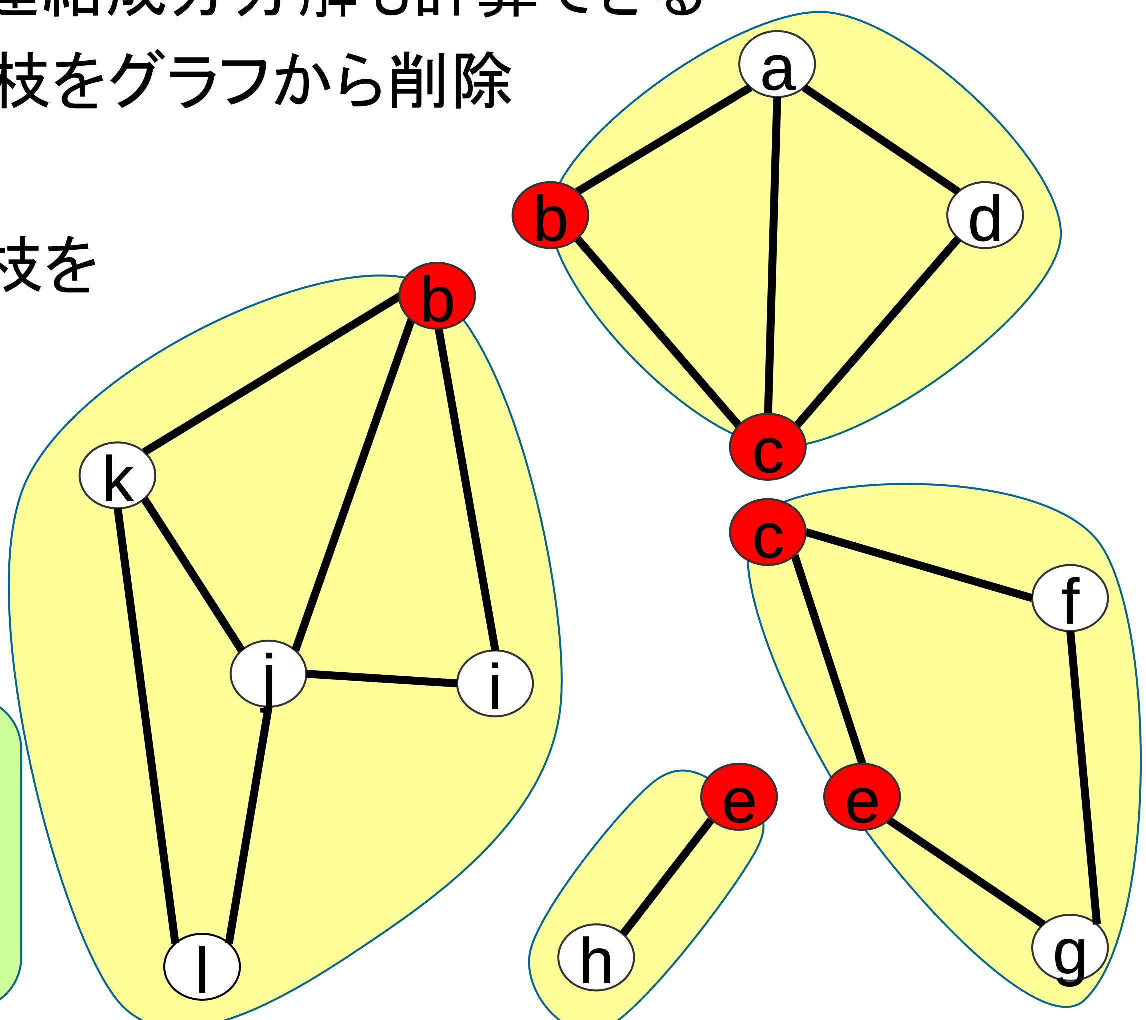


関節点から2連結成分分解を求める

関節点が計算できれば，２連結成分分解も計算できる
（1）関節点および接続する枝をグラフから削除
（2）連結成分に分解
（3）関節点に接続していた枝を
　各連結成分に戻す

関節点が与えられれば，
計算時間は O(m＋n)

深さ優先探索を使って
全ての関節点を
O(m＋n)時間で求める
方法を説明する



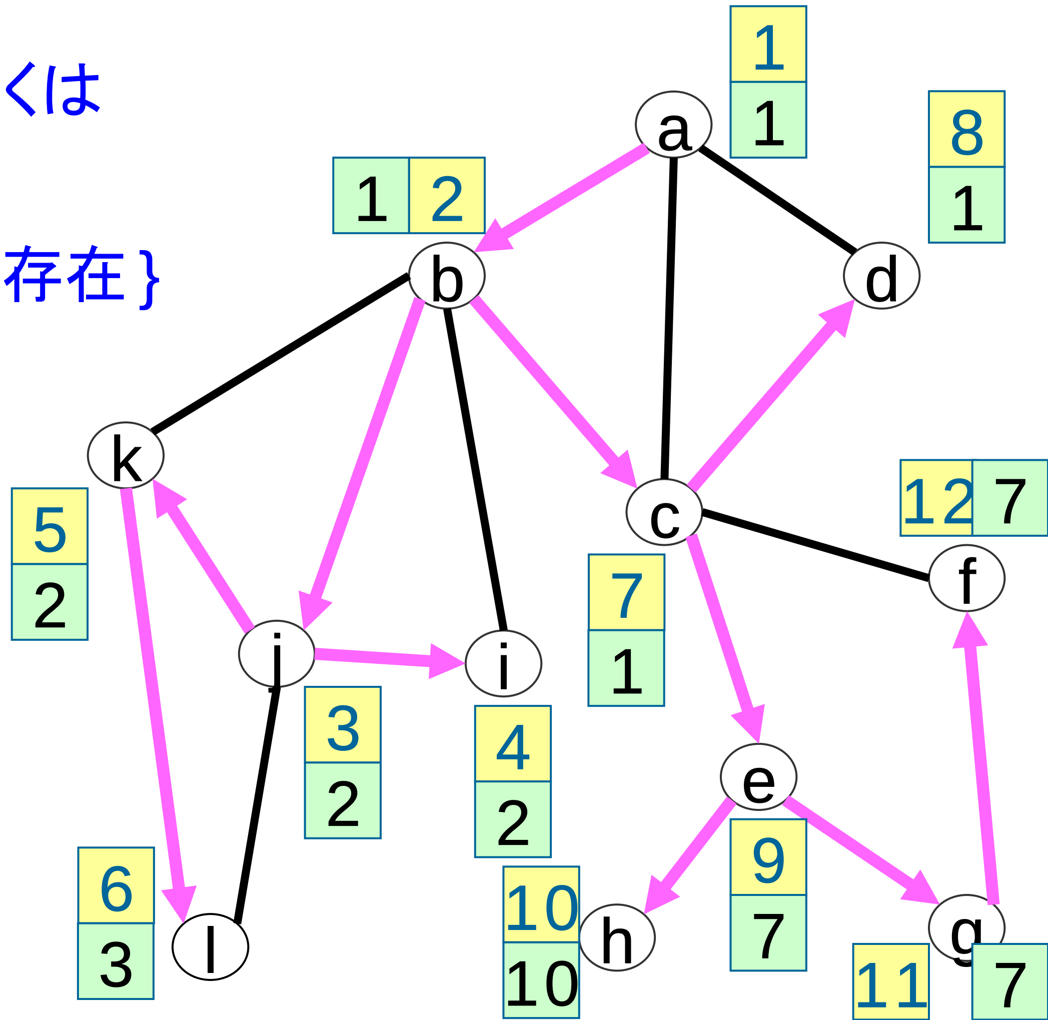
関節点と lowpt

num[u]：頂点 u が何番目に走査されたかを表す数字

lowpt[u]
＝ min{num[v] | v＝u, もしくは
頂点uの子孫wに対し,
Tに含まれない枝(v,w)が存在}

例1：頂点 j の
子孫 k に枝(b,k)が接続
子孫 i に枝(b,i)が接続
➔ lowpt[j]＝num[b]＝2

例2：頂点 e の
子孫 f に枝(c,f)が接続
➔ lowpt[e]＝num[c]＝7



関節点と lowpt に関する性質

定理: u は関節点

←→u の子供 v が存在して次の条件を満たす

(i) lowpt[v]≧num[u]

(ii) u が根のとき，子供の数が2以上

例1: 頂点 b と子供 j に対し

(i)lowpt[j]＝2＝num[b]

(ii) 頂点bは根ではない

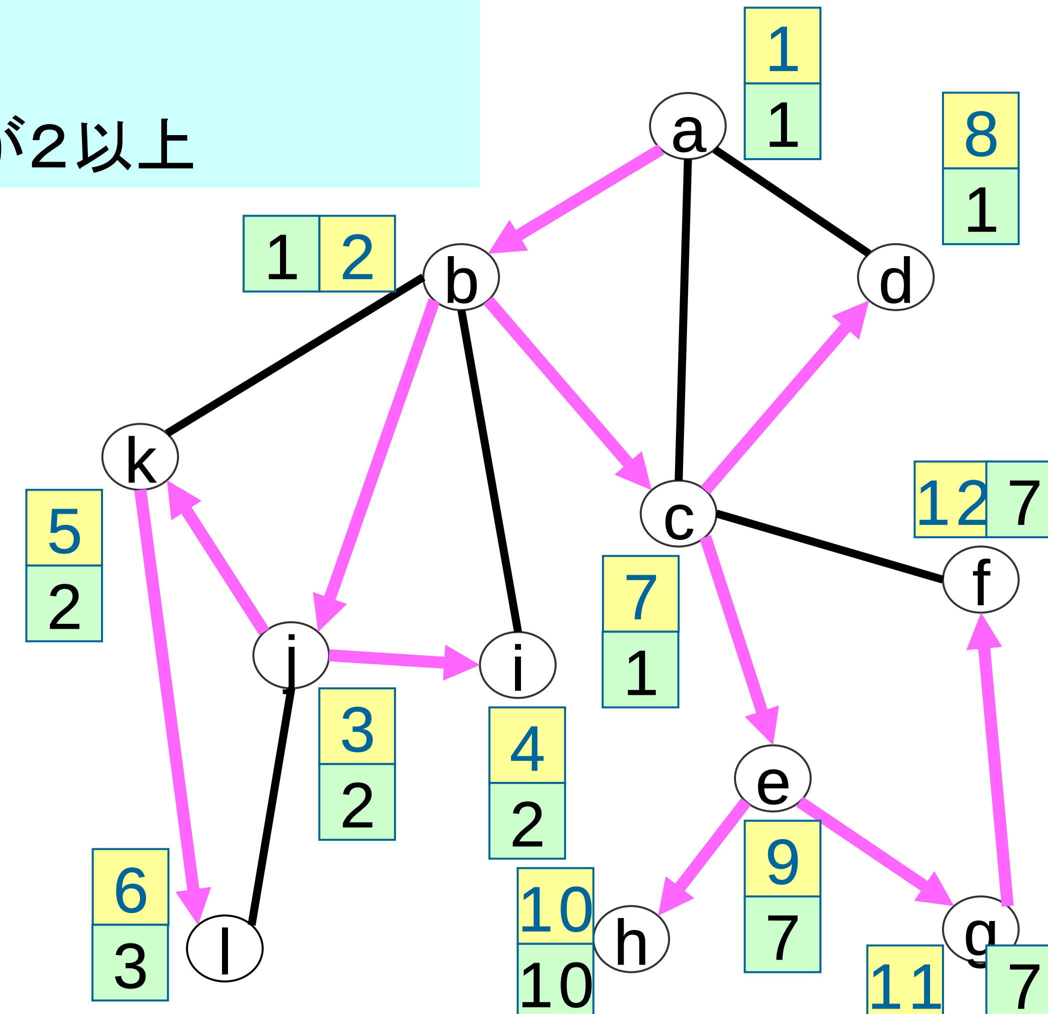
→ b は関節点

例2: 頂点 c と子供 eに対し

(i)lowpt[e]＝7＝num[c]

(ii) 頂点cは根ではない

→ c は関節点



関節点と lowpt に関する性質

定理: u は関節点

⇔ u の子供 v が存在して次の条件を満たす

(i) lowpt[v]≧num[u]

(ii) u が根のとき，子供の数が2以上

例3: 頂点 j の子供はk, i

lowpt[k]=2<3=num[j]

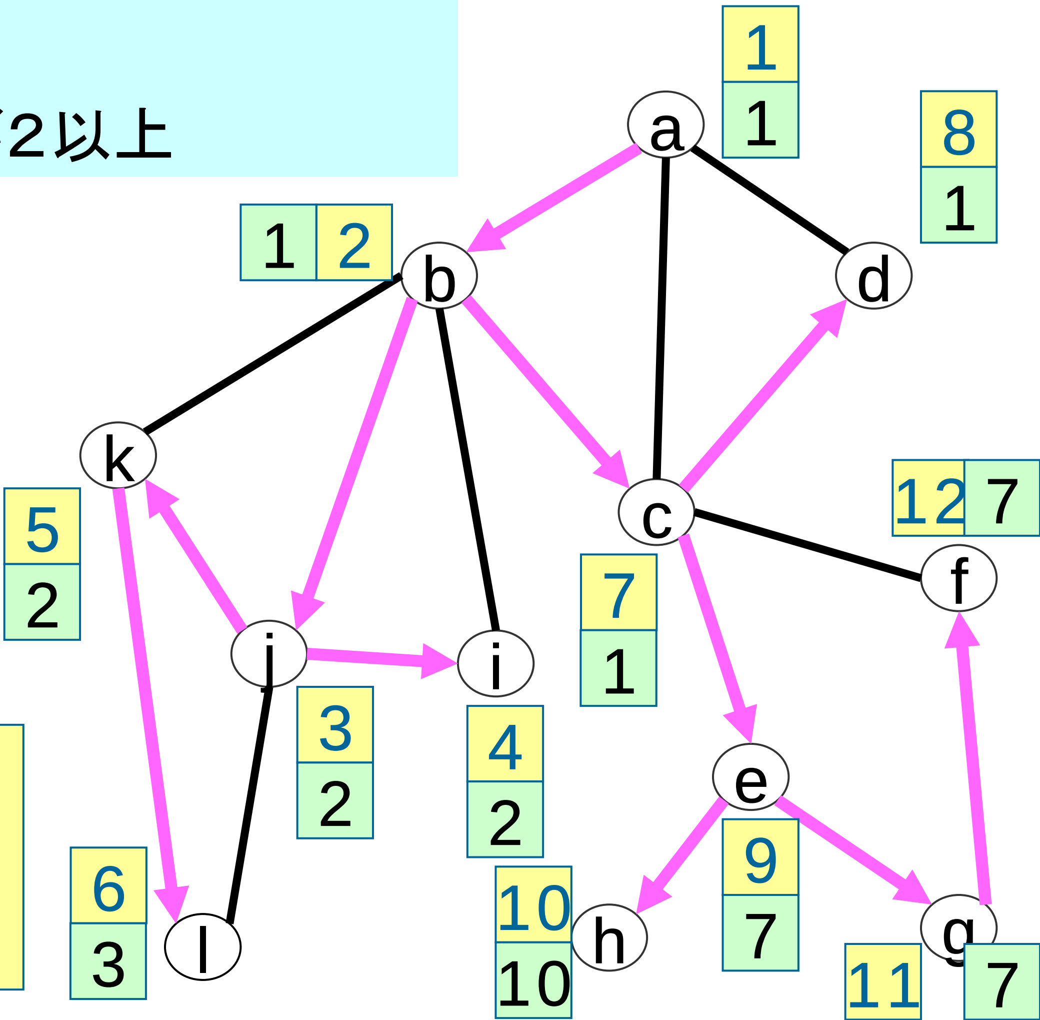
lowpt[i]=2<3=num[j]

➔ j は関節点ではない

例4: 頂点 a の子供は b

(ii) b以外の子供は存在しない

➔ a は関節点ではない



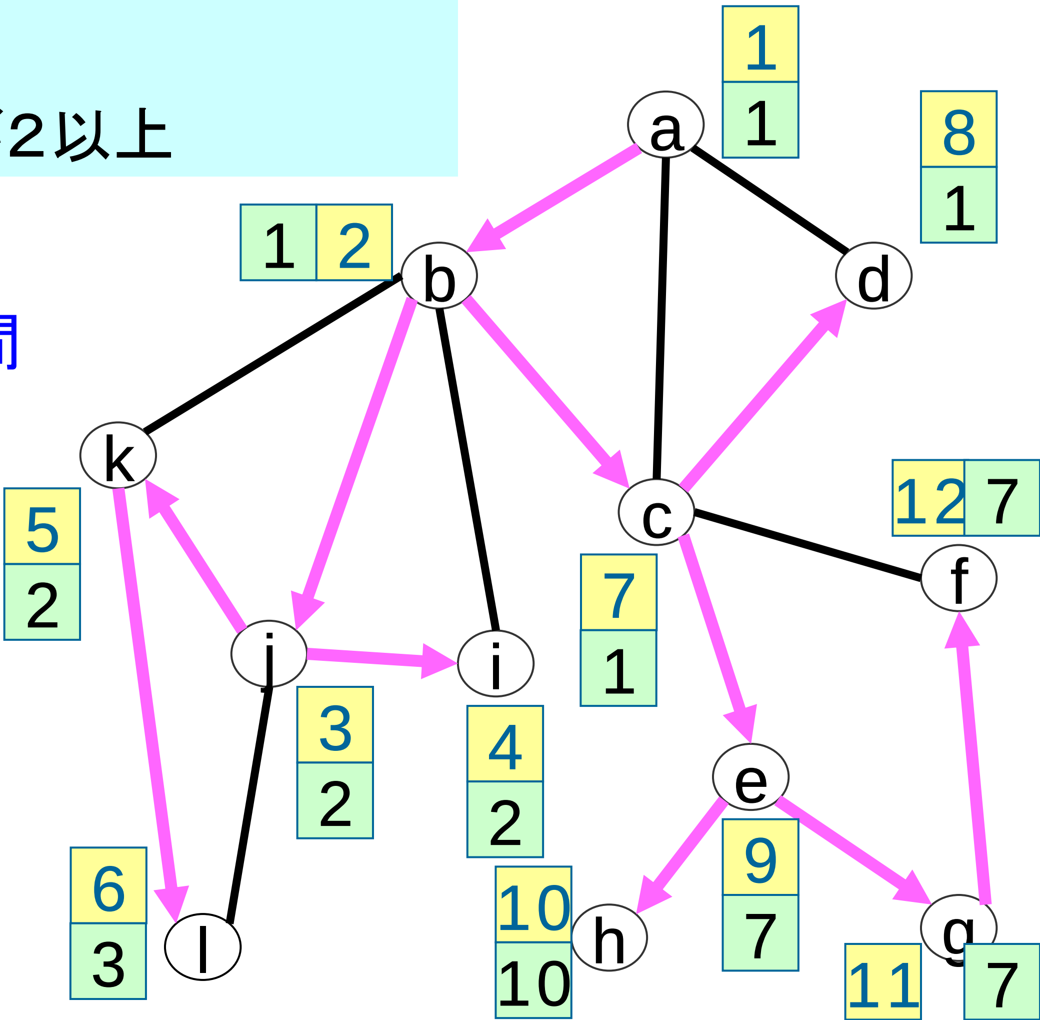
関節点の計算

定理: u は関節点
➔➔u の子供 v が存在して次の条件を満たす
(i) lowpt[v]≧num[u]
(ii) u が根のとき，子供の数が2以上

深さ優先探索を使うことによって

- lowpt[v]全てをO(m＋n)時間で計算できる
- 根である頂点の子供の数を O(m＋n)時間で計算できる

➔定理を使うことにより，
関節点を
O(m＋n)時間で計算可能



有向グラフの深さ優先探索

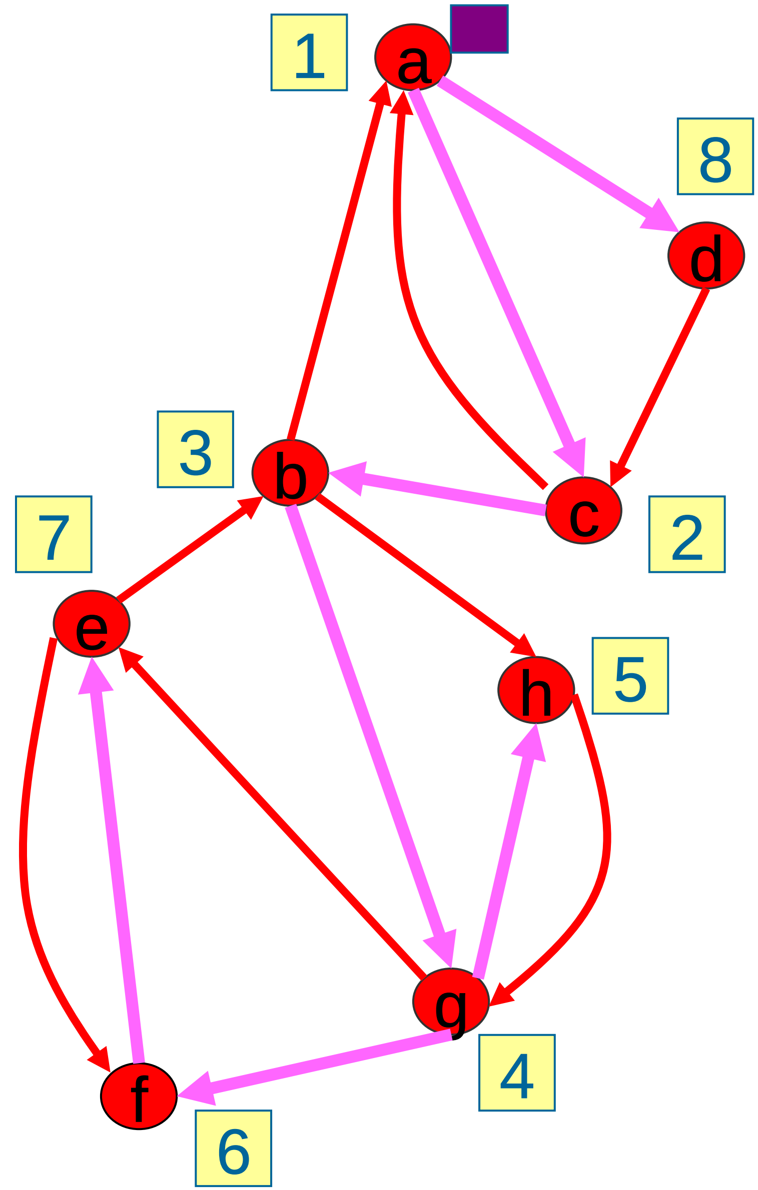
無向グラフの場合と基本的に同じ

- 各頂点，各枝を白く塗る
- 各頂点 u∈V に対し，
  u が白色（未走査）ならば
  手続きDFS-VISIT(u)を実行

手続き DFS-VISIT(u)

(a) u を黒く塗る

(b) u に接続する各枝 (u, v) に
　対し，以下を実行：
　　枝が白色（未走査）ならば，黒く塗る
　　v が白色（未走査）ならば
　　DFS-VISIT(v) を再帰呼び出し



有向グラフの深さ優先探索

無向グラフの場合と基本的に同じ

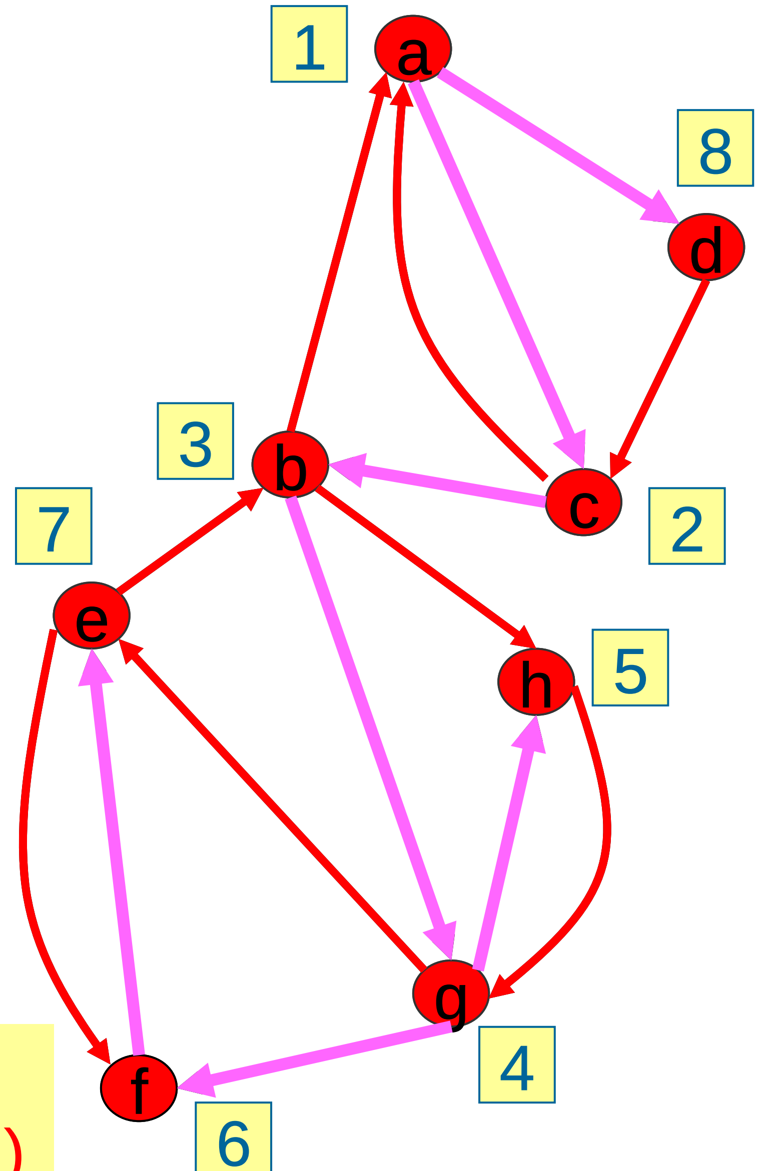
- 各頂点，各枝を白く塗る
- 各頂点 u∈V に対し，
  u が白色(未走査)ならば
  手続きDFS-VISIT(u)を実行

手続き DFS-VISIT(u)

(a) u を黒く塗る

(b) u に接続する各枝 (u, v) に
　対し，以下を実行：
　　枝が白色(未走査)ならば，黒く塗る
　　v が白色(未走査)ならば
　　DFS-VISIT(v) を再帰呼び出し

深さ優先探索の実行時間：
グラフを隣接リストで表現するとO(m＋n)

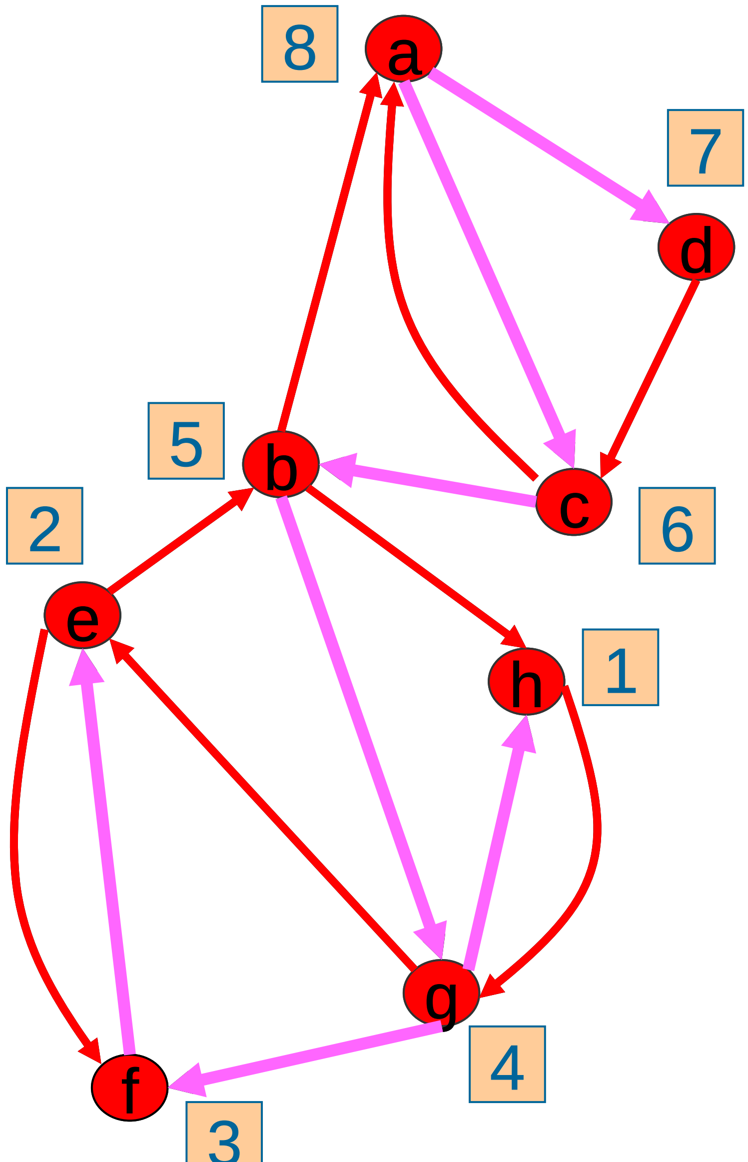


最後に訪問した時間による番号づけ

頂点を初めて訪問した時間の順に,
各頂点に番号を付ける
➔ いろいろと便利

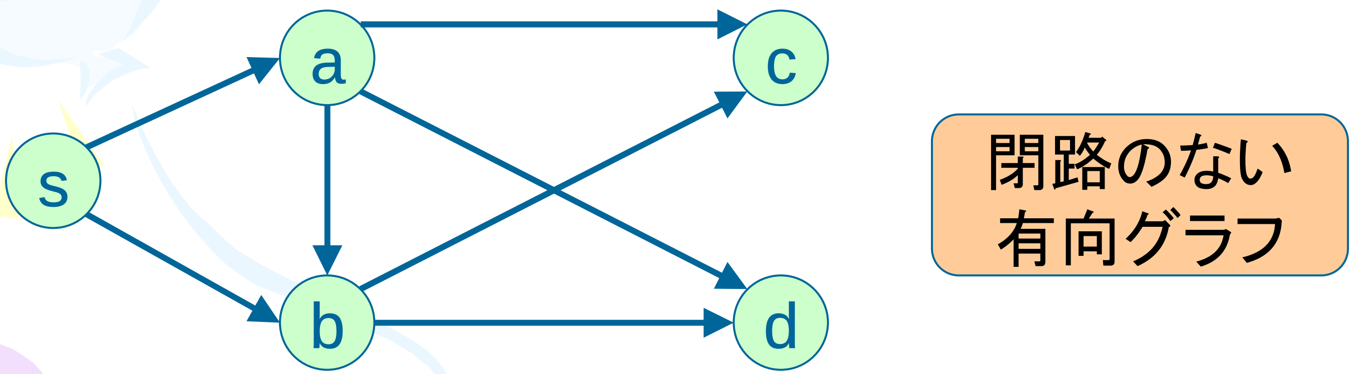
同様に,

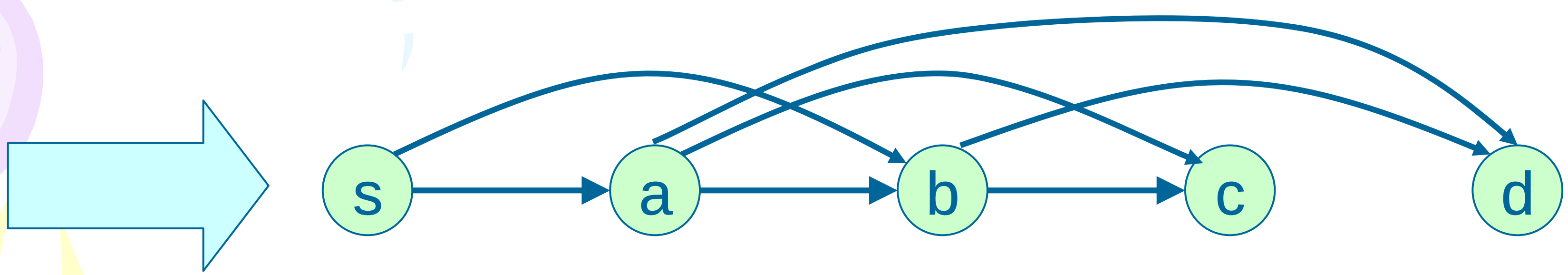
頂点を最後に訪問した時間の順に,
(頂点から出る枝を全て調べ終えた順に)
各頂点に番号を付ける
➔ いろいろと便利



閉路のない有向グラフのトポロジカルソート

- 閉路のない有向グラフに対し，以下の条件を満たすように頂点を並べることが可能
  - 各枝は，必ず左から右に向かう
- このように頂点を並べること➔トポロジカルソート
- 応用：複数の作業のスケジューリング



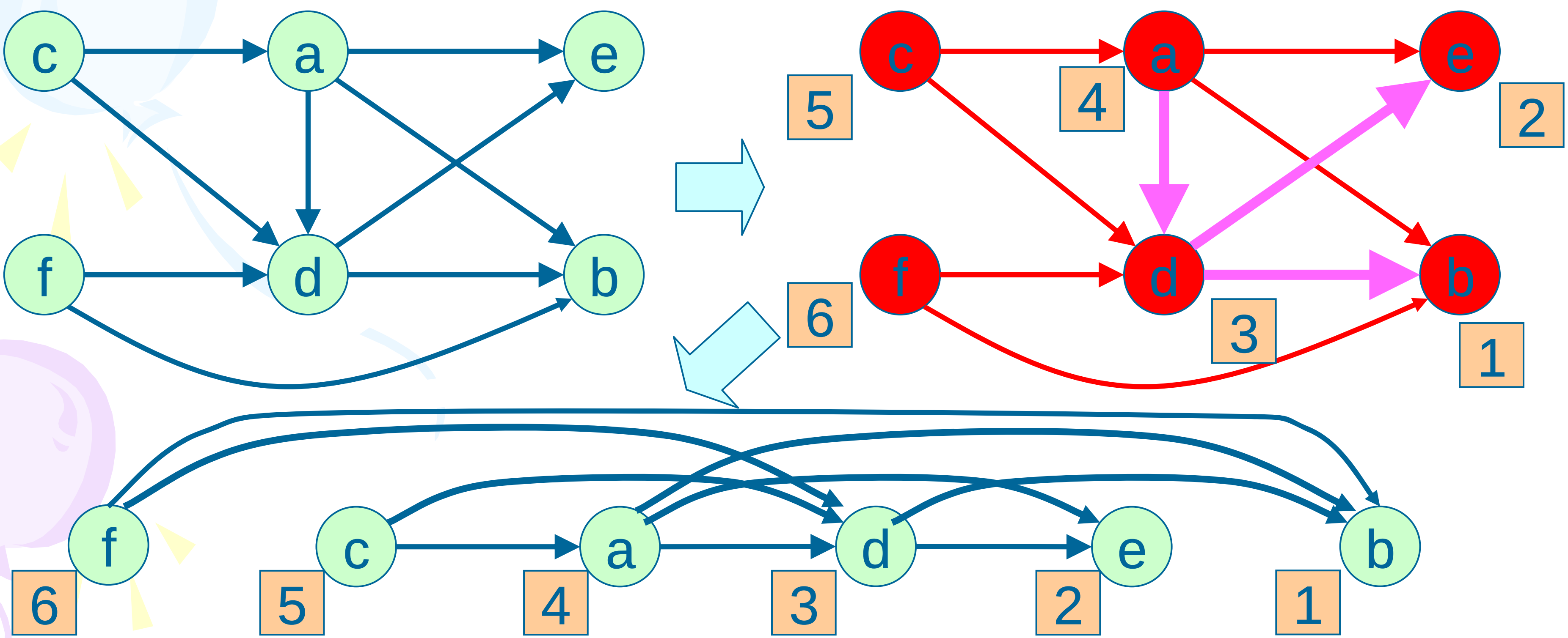


トポロジカルソート を求めるアルゴリズム

深さ優先探索を利用➔トポロジカルソートが計算できる

(1) グラフに深さ優先探索を適用し,
最後に訪問した時間により頂点を番号付けする

(2) 番号の大きい方から小さい方に並べる



トポロジカルソート を求めるアルゴリズムの正当性

グラフに深さ優先探索を適用し，最後に訪問した時間により

頂点を番号付けする　➔各頂点vの番号を f(v)と書く

全ての枝 (u,v) に対して f(u) ＞ f(v) ならばOK

∃ (u,v): f(u) ＜ f(v) と仮定，矛盾を導く

枝(u,v)を探索したとき，

(a) v は未訪問➔ vはuの子孫➔f(u)＞f(v) が成り立つ（矛盾）

(b) v は訪問終了後

　➔ uの訪問は終了していないので f(u)＞f(v) が成り立つ（矛盾）

(c) v は訪問中➔ v は u の先祖➔u, v を含む閉路が存在（矛盾）