演習問題

問題1: 以下の関数 $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$, $f_3(x_1, x_2)$ に対して，$(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$ における一次のテイラー近似を求めなさい．

$$\nabla f_1(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \nabla f_2(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f_3(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \log x_2 - \frac{x_2}{x_1} \\ \frac{x_1}{x_2} - \log x_1 \end{bmatrix}$$

演習問題

問題1: 以下の関数 $f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$, $f_3(x_1, x_2)$ に対して，$(x_1, x_2) = (a_1, a_2)$ における一次のテイラー近似を求めなさい．

$$\widetilde{f_1}(x_1,x_2) = (a_1 + 2a_2) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{bmatrix} = x_1 + 2x_2 = f(x_1,x_2)$$

$$\widetilde{f_2}(x_1,x_2) = (a_1^2 + a_2^2 - 1) + \begin{bmatrix} 2a_1 \\ 2a_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2a_1x_1 + 2a_2x_2 - a_1^2 - a_2^2 - 1$$

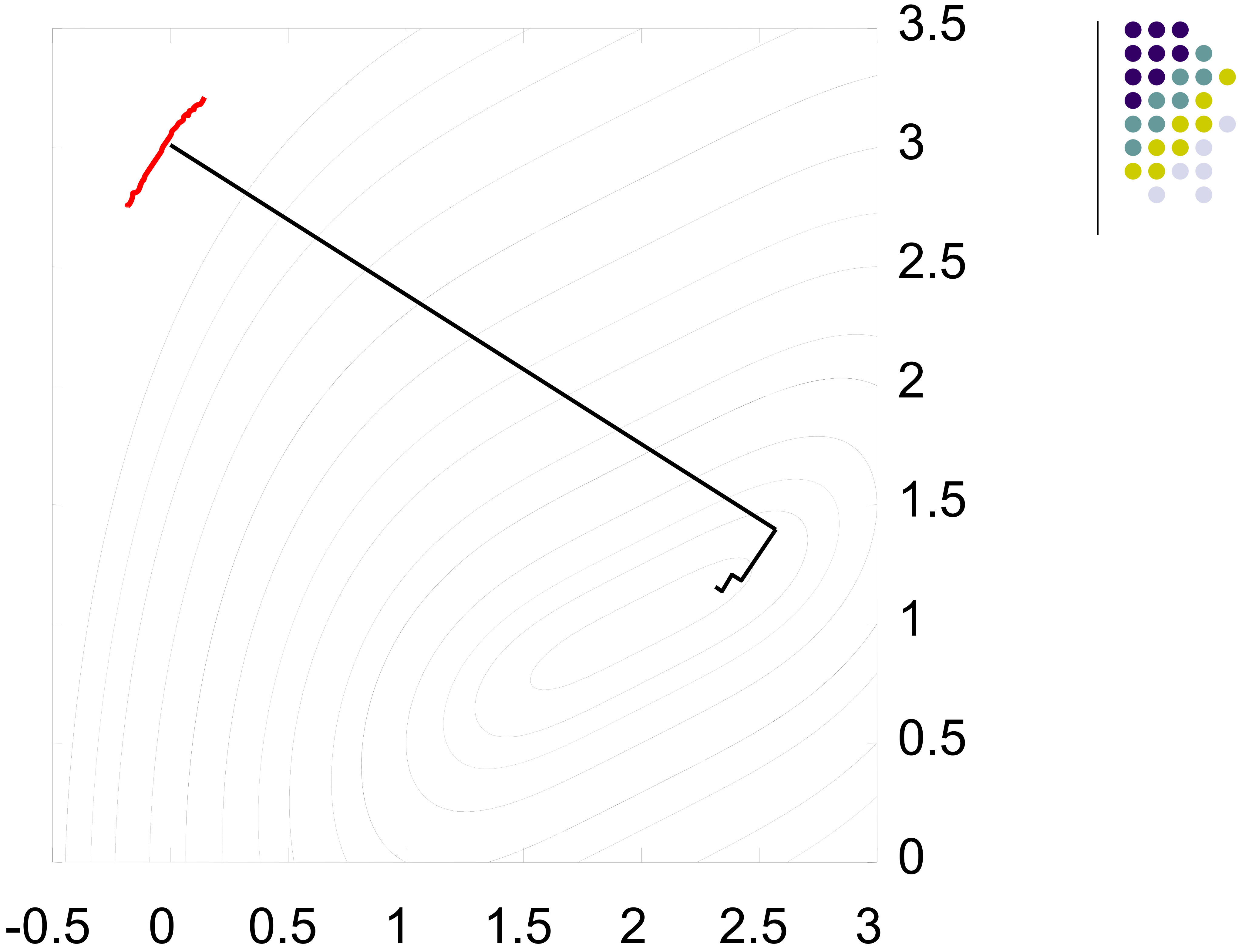
$$\widetilde{f_3}(x_1,x_2) = a_1 \log a_2 - a_2 \log a_1 + \begin{bmatrix} \log a_2 - \frac{a_2}{a_1} \\ \frac{a_1}{a_2} - \log a_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 - a_1 \\ x_2 - a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\log a_2 - \frac{a_2}{a_1}\right) x_1 + \left(\frac{a_1}{a_2} - \log a_1\right) x_2 - a_1 + a_2$$

演習問題

問題2:関数 $f(x,y) = (x-2)^4 + (x-2y)^2$ に対して、初期点を(0, 3) として最急降下法を適用せよ。資料に添付してある等高線の図を使って実行すること.（具体的な数値は計算しなくてもよい）

ポイント: 点の動きを表す折れ線の角度は必ず90度


3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

問題3: (i)1次関数 $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + c \ (x \in \mathbb{R}^n)$ および
(ii)1変数の絶対値関数 $f(x) = |x| \ (x \in \mathbb{R})$
　が凸関数であることを証明せよ.

(ii) の証明: $z = (1-t)x + ty$ とおく.
以下, 不等式 $(1-t)|x| + t|y| \geq |z|$ を示す.
(a) x, y≧0 の場合: z≧0 であり, |x|=x, |y|=y, |z|=z が成り立つので,
$$(1-t)|x| + t|y| = (1-t)x + ty = z$$
(b) x, y≦0 の場合: (a)と同様なので省略
(c) それ以外の場合: x>0, y<0 と仮定して良い
　（x<0, y>0 の場合はx と y を入れ替えて考えれば良い）
$$|z| = \max\big((1-t)x + ty, -(1-t)x - ty\big)$$
$$\leq (1-t)x - ty = (1-t)|x| + t|y|$$
（不等号はx, y の正負より得られる）