

数理手法

(数理最適化) 第10回

ネットワーク最適化

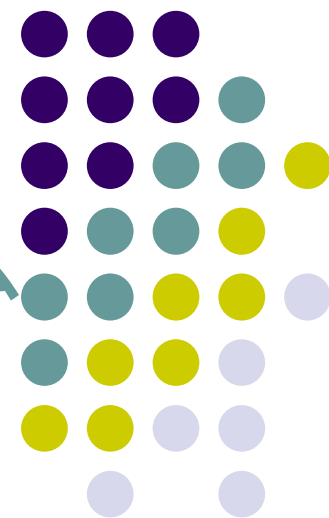
最小費用流問題と負閉路消去アルゴリズム

塩浦昭義

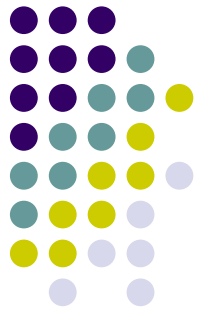
東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

<http://www.me.titech.ac.jp/~shioura/shioura/teaching/TUmp17/index.html>



最小費用流問題 (Minimum Cost Flow Problem)



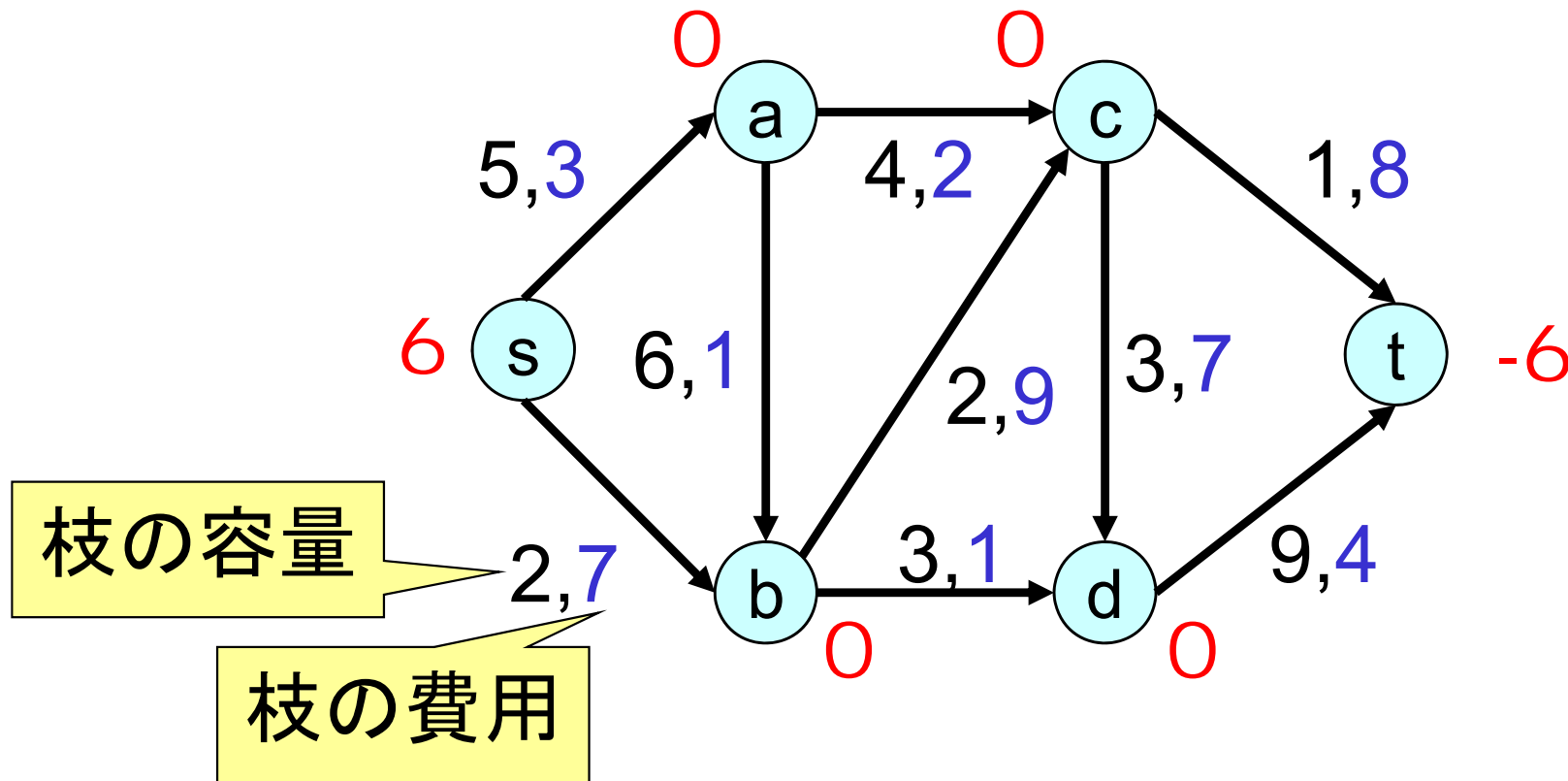
入力: 有向グラフ $G = (V, E)$

各頂点 $i \in V$ の供給・需要量 b_i (ただし b_i の和は0)

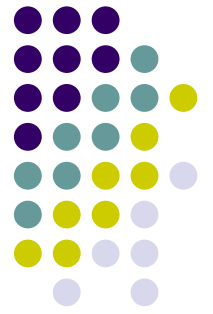
($b_i > 0 \rightarrow i$ は供給点, $< 0 \rightarrow i$ は需要点, $= 0 \rightarrow i$ は通過点)

各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geq 0$, 費用 c_{ij}

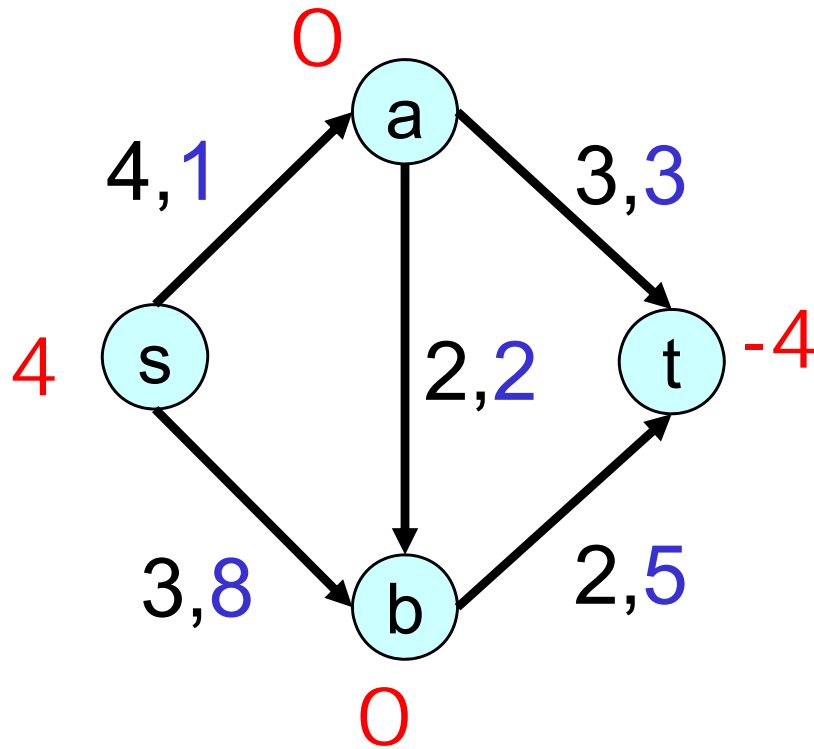
出力: 需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



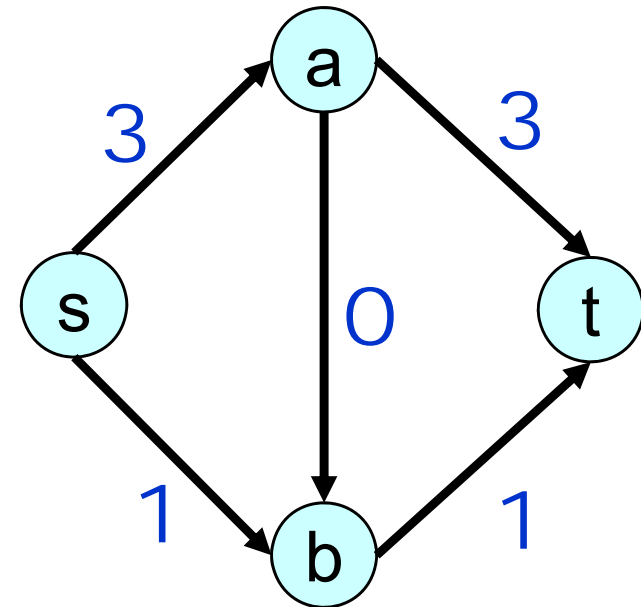
フローの最適性判定 (Optimality Check)



フローの例



問題例

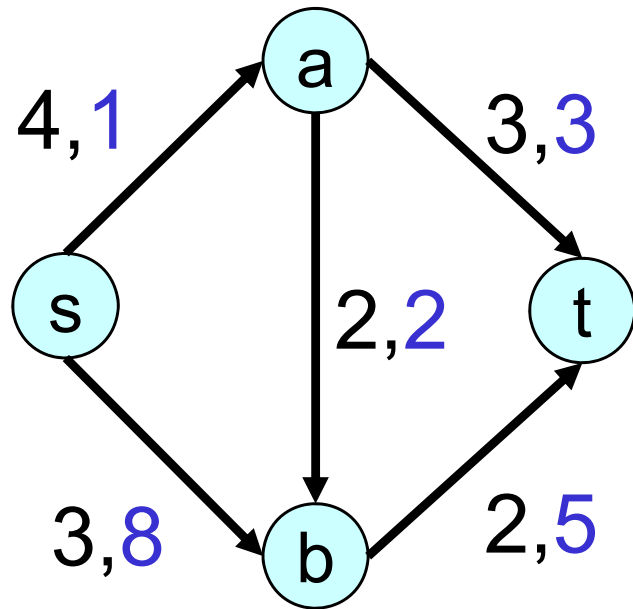
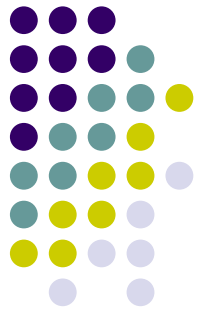


フローの費用 = 25
最小か？

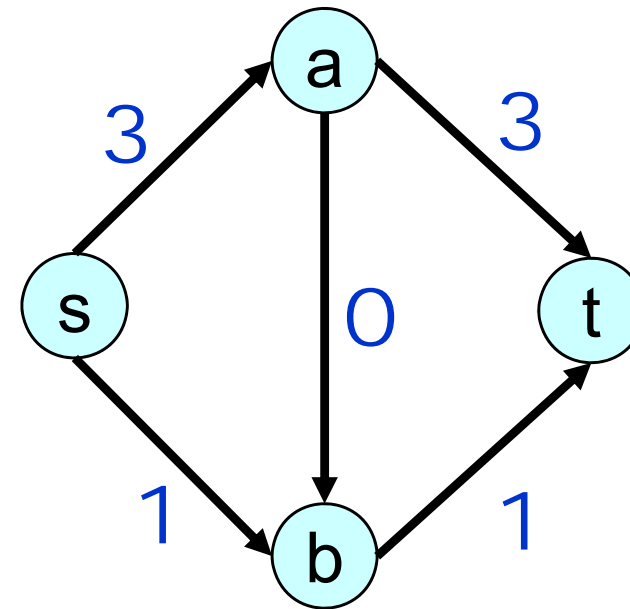
どうやって最小費用フローであることを判定するか？

——— 残余ネットワークの利用

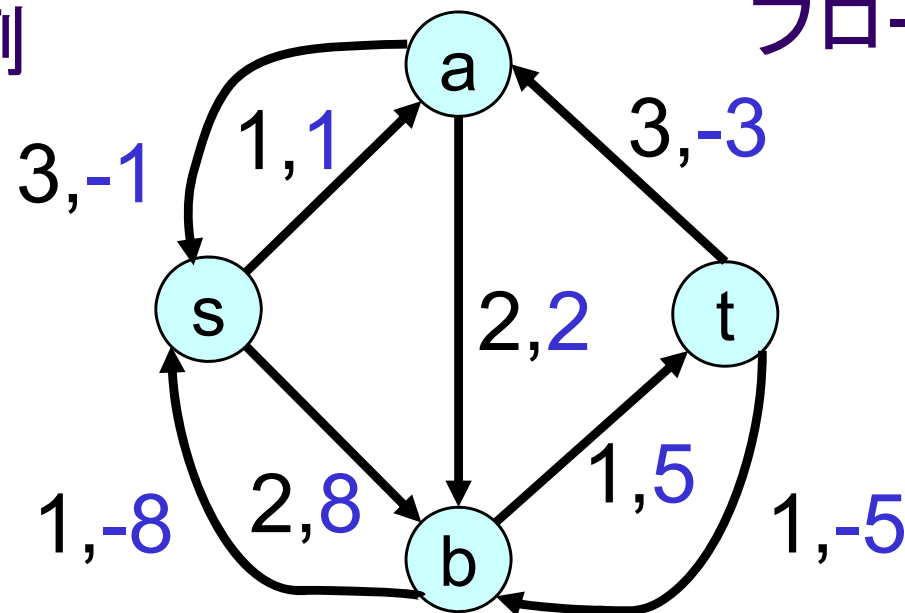
残余ネットワークの作り方(その2)



問題例

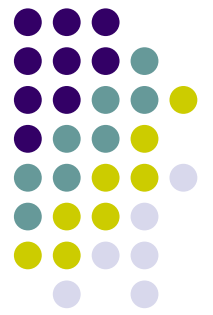


フローの例

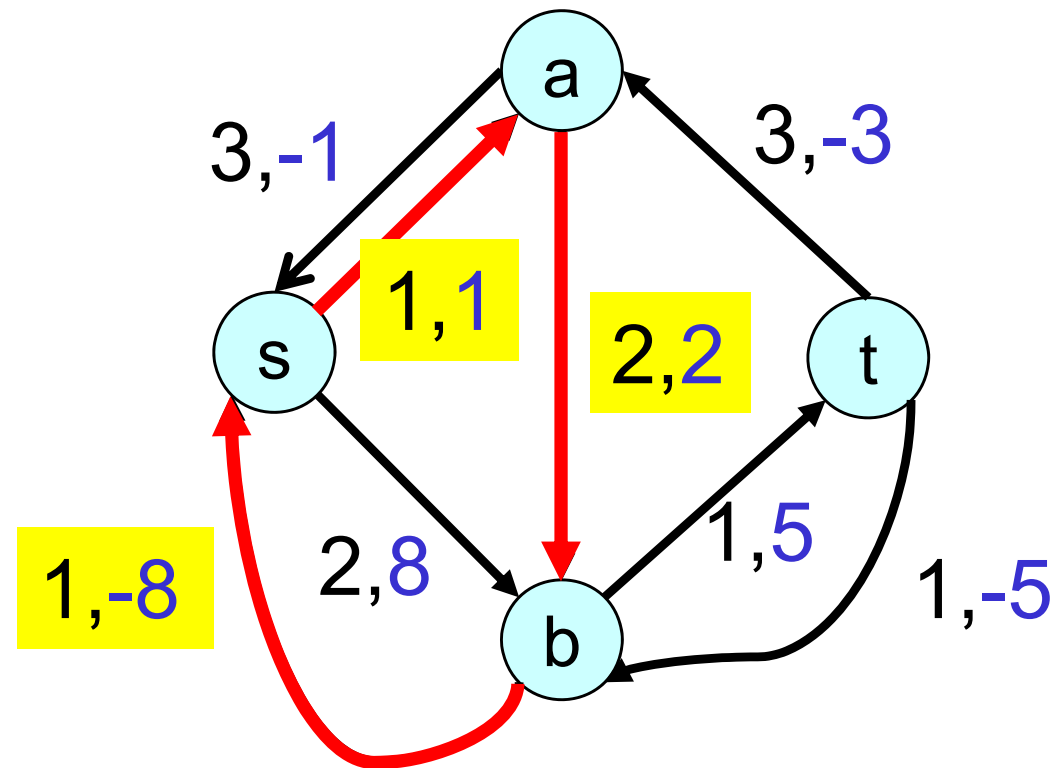


残余ネットワーク

残余ネットワークの性質(その1)



残余ネットワークの閉路に注目



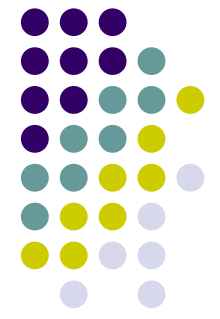
閉路の容量 α

= 閉路に含まれる枝の容量の最小値 = 1

閉路の費用 γ

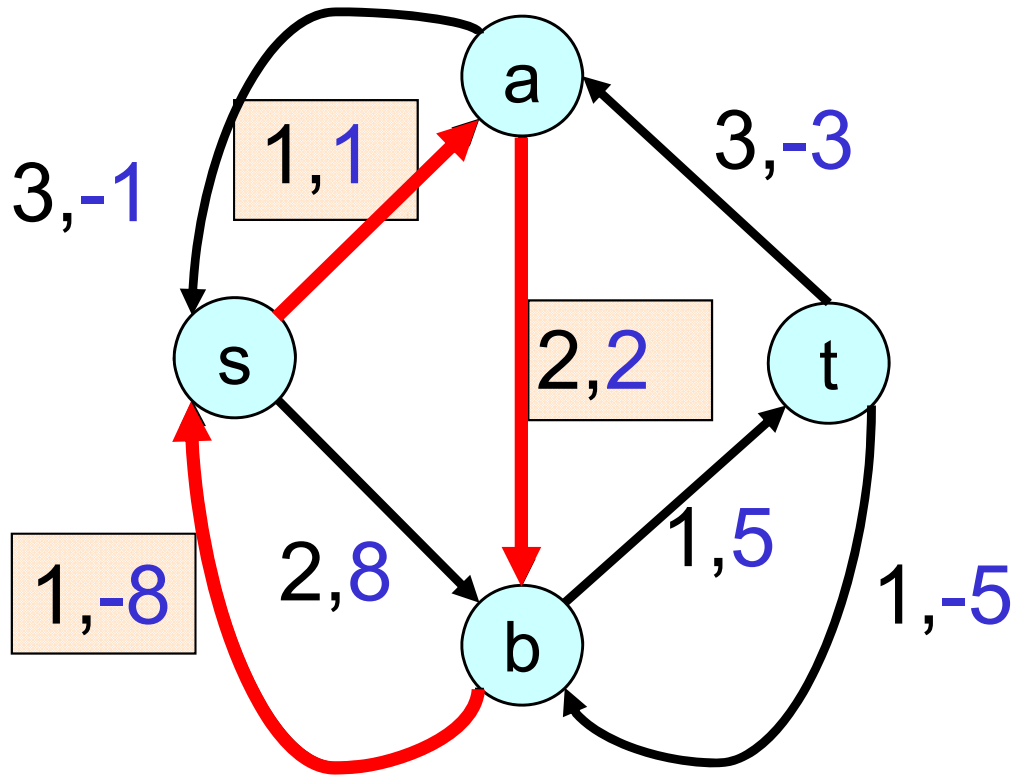
= 閉路に含まれる枝の費用の和 = -5

残余ネットワークの性質(その2)



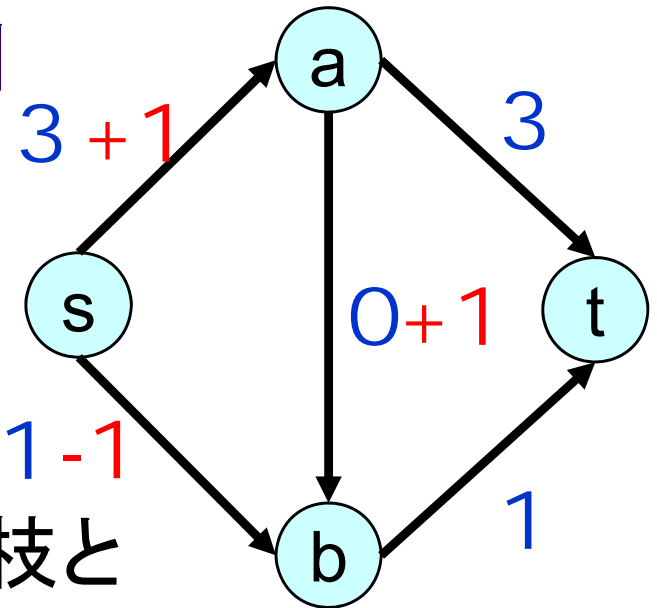
残余ネットワークの閉路を用いてフローを更新

残余ネットワーク



閉路の容量 $\alpha = 1$
閉路の費用 $\gamma = -5$

フローの例

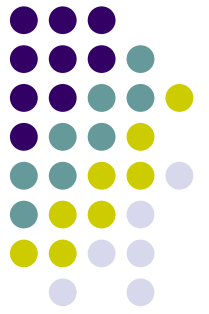


閉路の枝と

同じ向き \Rightarrow フロー値に $+\alpha$
逆の向き \Rightarrow フロー値に $-\alpha$
無関係 \Rightarrow フロー値は不変

この更新により、フローの費用は $\alpha \gamma (= -5)$ 増加

残余ネットワークの性質(その3)



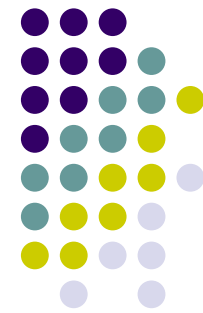
以上の議論より、以下が成り立つ

定理 1 : 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒ フローの費用を減少させることが可能
⇒ 現在のフローは費用最小でない

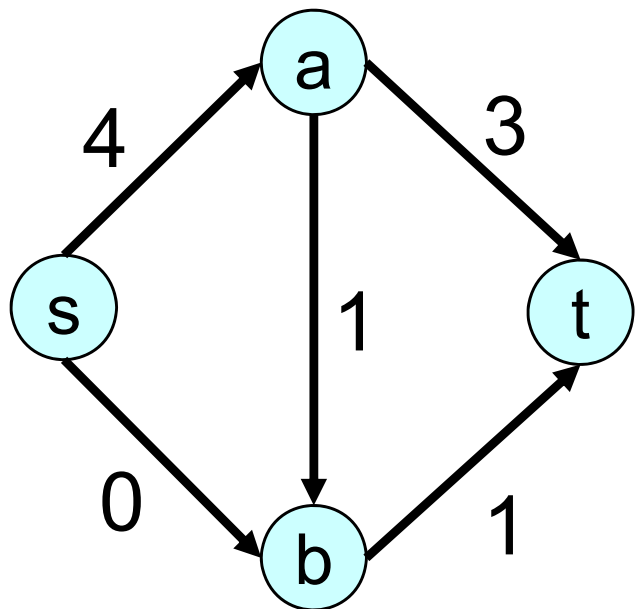
実は、逆も成り立つ(証明はあとで)

定理 2 : 現在のフローは費用最小でない
⇒ 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

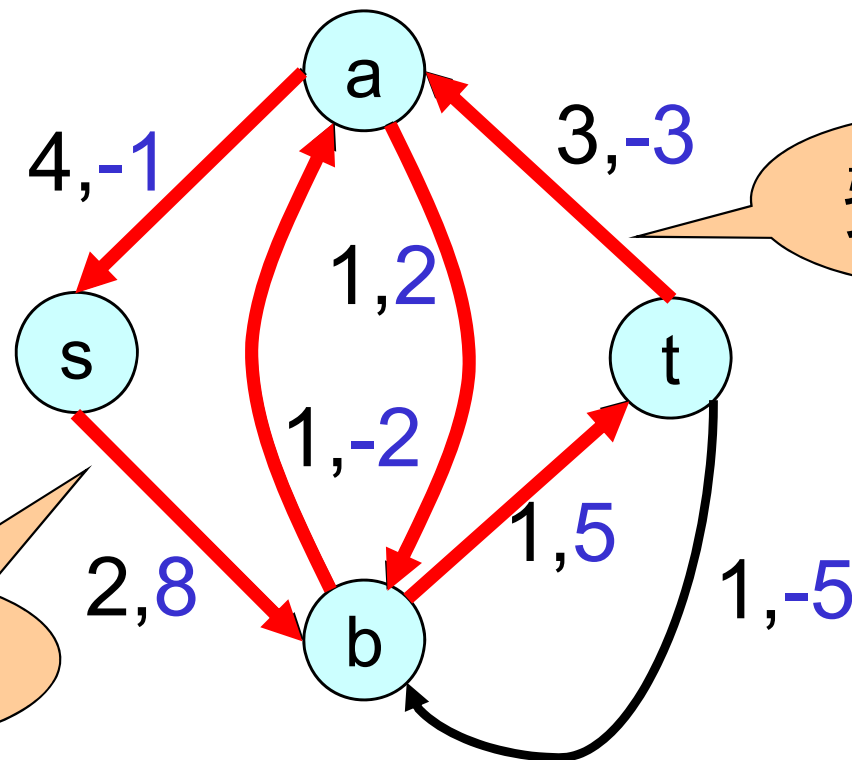
残余ネットワークの性質(その4)



修正後のフロー



残余ネットワーク

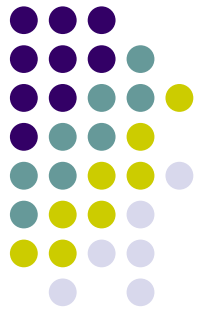


費用5

費用4

費用が負の閉路がない
⇒ 現在のフローは費用最小

負閉路消去アルゴリズム



最小費用フローを求めるためのアルゴリズム

ステップ0: 人工問題を解いて, 需要供給量を満たすフローを求める

ステップ1: 現在のフローに関する残余ネットワークを作る

ステップ2: 残余ネットワークに費用が負の閉路が存在しない

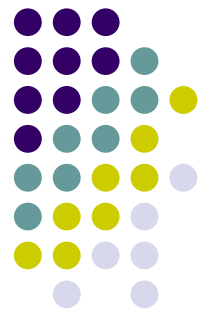
⇒ 現在のフローは費用最小(終了)

ステップ3: 残余ネットワークの費用が負の閉路を求め、

それを用いて現在のフローを更新する

ステップ4: ステップ1へ戻る

負閉路消去アルゴリズムの計算時間



※各枝の容量, 費用は整数と仮定

U = 枝容量の最大値,

C = 枝費用の絶対値の最大値

m = 枝の数, n = 頂点の数

● 各反復においてフローの費用が1以上減る

● $-mCU \leq$ フローの費用 $\leq mCU$

→ 反復回数 $\leq 2mCU$

● 各反復での計算時間

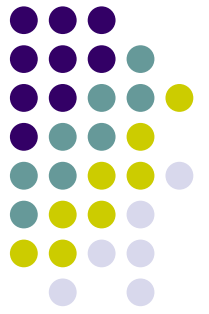
= 残余ネットワークの負閉路を求める時間

→ 最短路問題のアルゴリズムを使うと $O(mn)$ 時間

∴ 計算時間は $O(m^2 n C U)$

(入力サイズは $m + n + \log U + \log C$ なので, **指数時間**)

負閉路消去アルゴリズムの改良



負閉路消去アルゴリズムの反復回数を少なくしたい
→ 各反復での負閉路の選び方を工夫する

(改良法1) 費用減少量最大の負閉路を選ぶ

反復回数 $O(m \log(nU))$

ただし、費用減少量最大の負閉路を求めるのはNP困難

→ 費用減少量が最大に近い負閉路で代用可能

(改良法2)

“(閉路の費用) / (閉路の枝数)”が最小の負閉路を選ぶ

反復回数 $O(nm^2 \log n)$, 一回の反復 $O(nm)$

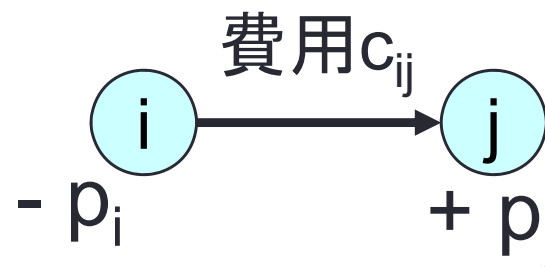
※この他にも、負閉路消去アルゴリズムの計算時間を短縮するための様々なテクニックが存在する

ネットワークのポテンシャル

定義: **ポテンシャル** $p = (p_i \mid i \in V)$

--- 各頂点に付随する実数変数(からなるベクトル)

- イメージ: 輸送に伴う補助金・手数料
 - 枝 (i, j) にフローを1単位 流すとき,
始点 i では p_i 円もらえる, 終点 j では p_j 円支払う
- 枝 (i, j) でのフローの実質的なコストは $c_{ij} - p_i + p_j$
- 実質的なコスト > 0 → 枝 (i, j) のフローを減らしたい
- 実質的なコスト < 0 → 枝 (i, j) のフローを増やしたい



ポテンシャルを用いた最適性条件

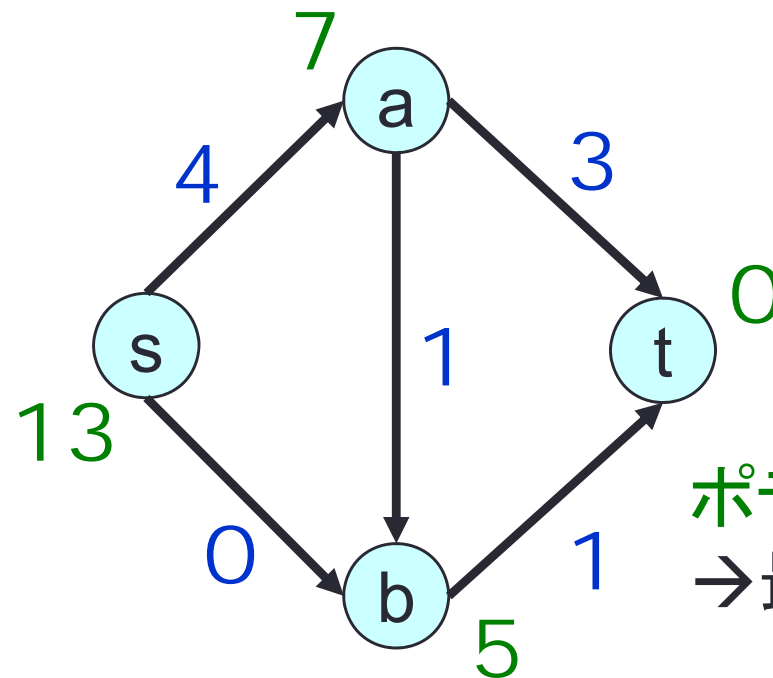
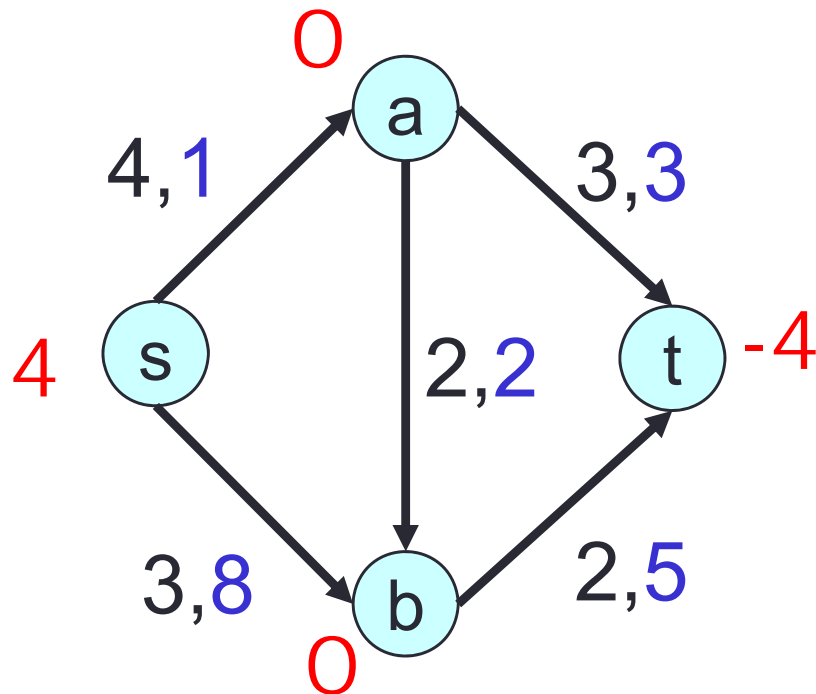
定理 3 : 現在のフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ は**費用最小**

\iff 以下の条件を満たすポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在:

- (i) $c_{ij} - p_i + p_j > 0$ なる枝 (i, j) に対し, $x_{ij} = 0$
- (ii) $c_{ij} - p_i + p_j < 0$ なる枝 (i, j) に対し, $x_{ij} = u_{ij}$
- (iii) $0 < x_{ij} < u_{ij}$ なる枝 (i, j) に対し, $c_{ij} - p_i + p_j = 0$

証明は
後で

※注意: 条件(iii) は (i), (ii) から導かれるので, なくても良い



ポテンシャル存在
→ 最小費用フロー

ポテンシャルを用いた最適性条件

定理 3 : フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ は **費用最小**

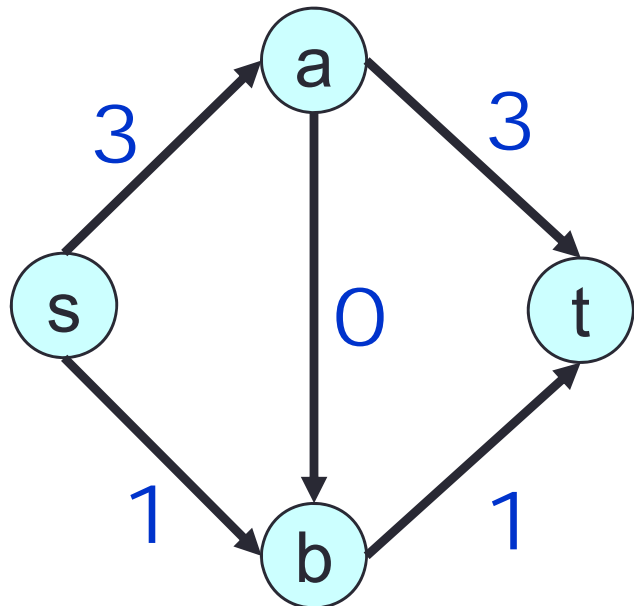
\iff 以下の条件を満たすポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在:

(i) $c_{ij} - p_i + p_j > 0$ なる枝 (i, j) に対し, $x_{ij} = 0$

(ii) $c_{ij} - p_i + p_j < 0$ なる枝 (i, j) に対し, $x_{ij} = u_{ij}$

(iii) $0 < x_{ij} < u_{ij}$ なる枝 (i, j) に対し, $c_{ij} - p_i + p_j = 0$

証明は
後で



条件(i) (の対偶)より

$$8 - p_s + p_b \leq 0 \Rightarrow -8 + p_s - p_b \geq 0$$

条件(ii) (の対偶)より

$$1 - p_s + p_a \geq 0, 2 - p_a + p_b \geq 0$$

\square を辺々加えると $-5 \geq 0$ (矛盾)

ポテンシャル存在しない
 \rightarrow 最小費用フローではない

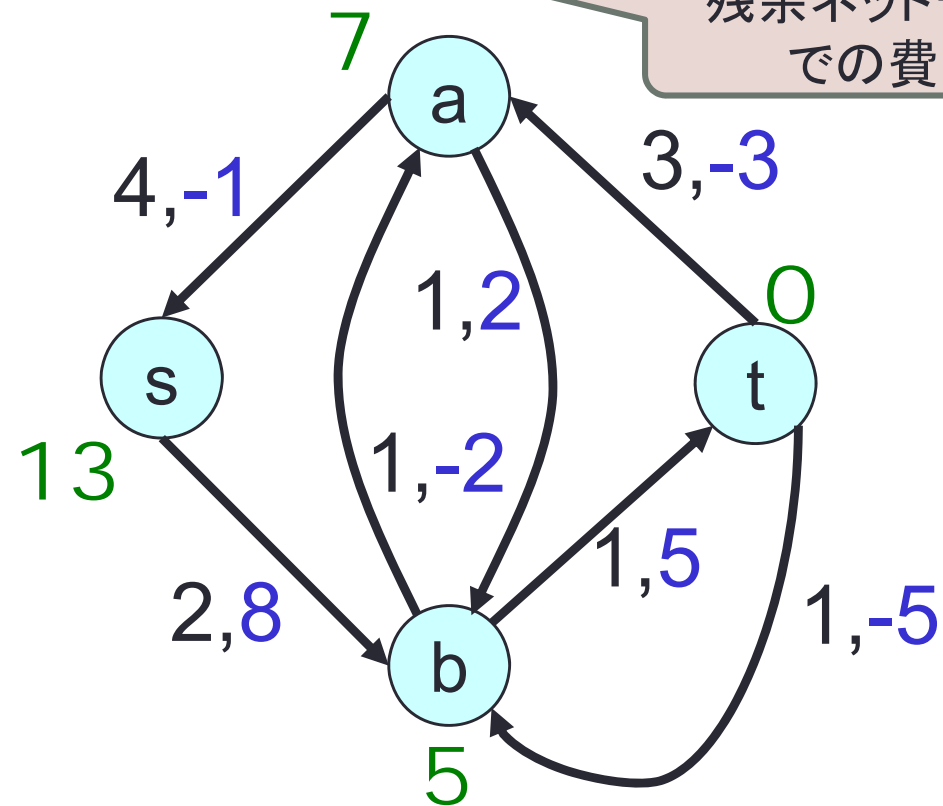
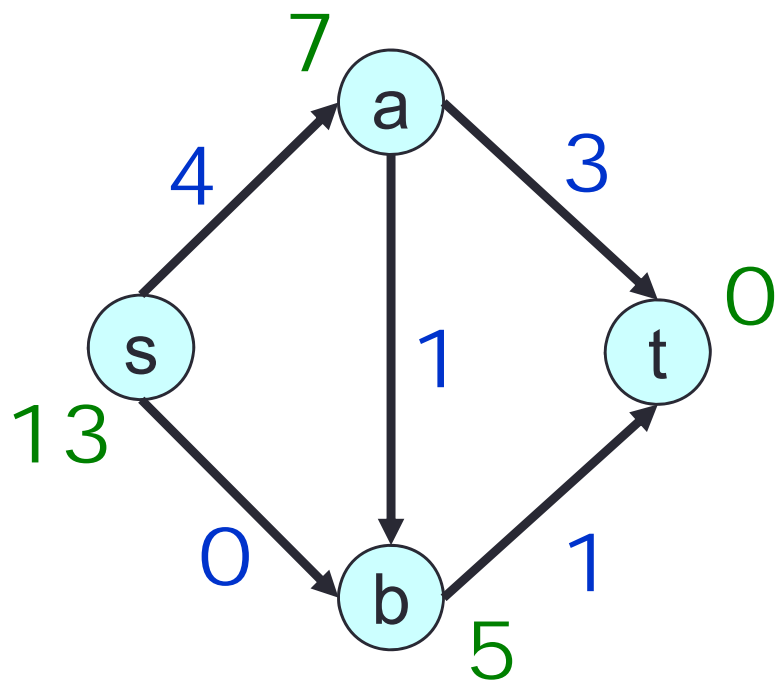
ポテンシャルを用いた最適性条件の書き換え

定理3の条件(i), (ii) は, 残余ネットワークを使うと簡潔になる

定理4 : 現在のフロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ は**費用最小**

↔ 以下の条件を満たすポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在:

残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し, $c_{ij} - p_i + p_j \geq 0$



定理4の証明

定理3を用いて, 定理4を証明する.

定理3の条件(i), (ii) と条件(*)が等価であることを示せばよい.

(i) $c_{ij} - p_i + p_j > 0$ なる枝 (i, j) に対し, $x_{ij} = 0$

(ii) $c_{ij} - p_i + p_j < 0$ なる枝 (i, j) に対し, $x_{ij} = u_{ij}$

(*) 残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し, $c_{ij} - p_i + p_j \geq 0$

(*)において,

残余ネットワークの順向きの枝 (i, j) に対し, $c_{ij} - p_i + p_j \geq 0$

$\leftrightarrow x_{ij} < u_{ij}$ ならば $c_{ij} - p_i + p_j \geq 0 \leftrightarrow$ (ii) の対偶

残余ネットワークの逆向きの枝 (i, j) に対し, $c_{ij} - p_i + p_j \geq 0$

$\leftrightarrow x_{ji} > 0$ ならば $-c_{ji} - p_i + p_j \geq 0$

$\leftrightarrow x_{ji} > 0$ ならば $c_{ji} - p_j + p_i \leq 0 \leftrightarrow$ (i) の対偶

定理3の「←」の証明(その1)

$d_{ij} = c_{ij} - p_i + p_j$ と定義, これを枝(i, j)の新しい費用と見なす.
示すこと

(1) 条件(i), (ii), (iii) を満たすフロー x は d_{ij} に関する総費用が最小

(2) (フロー x の d_{ij} に関する総費用)

= (x の c_{ij} に関する総費用) + (x に依存しない) 定数

(1) の証明:

条件(i), (ii), (iii) を満たすフロー x は, 枝ごとに見ても

d_{ij} に関する費用が最小

$d_{ij} > 0 \rightarrow x_{ij} = 0, \quad d_{ij} < 0 \rightarrow x_{ij} = u_{ij}, \quad d_{ij} = 0 \rightarrow x_{ij}$ は何でも良い

よって, 総費用も最小

定理3の「←」の証明(その2)

(2) (フロー x の d_{ij} に関する総費用)

= (x の c_{ij} に関する総費用) + (x に依存しない) 定数

(2) の証明:

$$\sum_{(i,j) \in E} d_{ij} x_{ij} = \sum_{(i,j) \in E} (c_{ij} - p_i + p_j) x_{ij}$$

$$= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in E} (-p_i + p_j) x_{ij}$$

$$= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij}$$

$$- \sum_{k \in V} p_k \left(\sum \{x_{kj} \mid (k,j) \text{ は } k \text{ から出る枝}\} - \sum \{x_{ik} \mid (i,k) \text{ は } k \text{ に入る枝}\} \right)$$

$$= \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} - \sum_{k \in V} p_k b_k$$

各頂点ごとに
和をとる

流量保存条件より

最適性条件のまとめ

フロー x は費用最小

定理1
(証明済み)

定理2
(証明まだ)

定理3
の「 \leftarrow 」
(証明済み)

定理3
の「 \rightarrow 」
(証明まだ)

フロー x に関する
残余ネットワークに
負閉路が存在しない

フロー x に対し, ある条件を満たす
ポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在

この部分を証明すれば,
定理2および
定理3の「 \rightarrow 」
の証明が完了

「負閉路なし→ポテンシャル存在」の証明

命題: フロー x に関する残余ネットワークに負閉路が存在しない

→ その残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し, $c_{ij} - p_i + p_j \geq 0$
を満たすポテンシャル $p = (p_i \mid i \in V)$ が存在

(証明)

ネットワーク上の最短路問題に関する既知の結果を利用

- 残余ネットワークにおいて,
費用を枝の長さとしみなした最短路問題を考える.
- 任意に選んだ頂点 u から, 各頂点 v への最短路を求める.
 - u から v へのパスが存在しない場合:
長さが十分に大きい枝 (u, v) を追加
(これにより, 負閉路は発生しない)
- 負閉路が存在しない → 最短路問題の既知の結果より,
 u から各頂点 v への最短路は必ず存在. その長さを q_v とおく

「負閉路なし→ポテンシャル存在」の証明

(証明のつづき)

- 負閉路が存在しない→最短路問題の既知の結果より,
u から各頂点 v への最短路は必ず存在. その長さを q_v とおく

(注: 負閉路が存在する

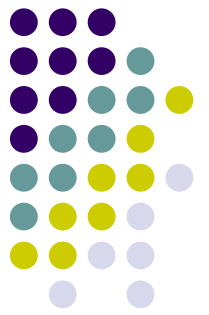
→任意に短いパスが存在し, 最短路が定まらない)

- 最短路の長さの性質:

残余ネットワークの各枝 (i, j) に対し, $q_i + c_{ij} \geq q_j$

(∵ i への最短路経由で j に行くパスの長さ $\geq j$ への最短路の長さ)

- $p_i = -q_i$ ($i \in V$) とおくと, 上記の不等式より $c_{ij} - p_i + p_j \geq 0$



最小費用流問題の応用例： 研究室配属問題

- 各研究室に学生数人を割り当てる

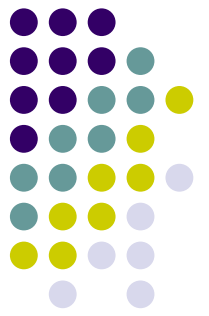
学生A,B,C,Dの4人を研究室X,Yへ

- 各研究室に配属できる人数には上限がある

	X研究室	Y研究室
定員	3	3

- 学生の満足度の合計を最大にしたい

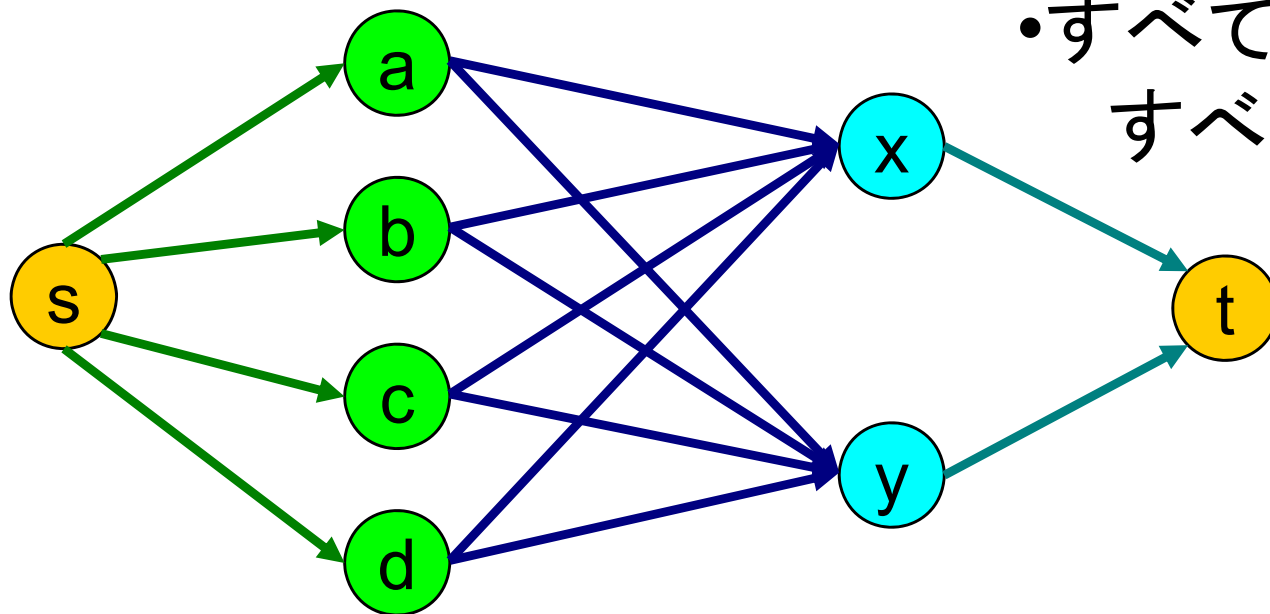
満足度	A	B	C	D
X	6	8	5	9
Y	9	1	5	3



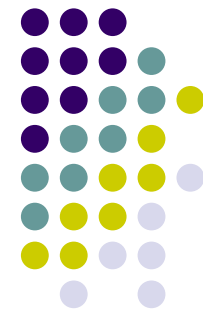
応用例：研究室配属問題

最小費用流問題に変形

- 各学生に対応する頂点 a, b, c, d (通過点)
- 各研究室に対応する頂点 x, y (通過点)
- 供給点 s , 需要点 t
- 供給点から学生頂点への枝 $(s, a), (s, b), \dots$
- 研究室頂点から需要点への枝 $(x, t), (y, t)$

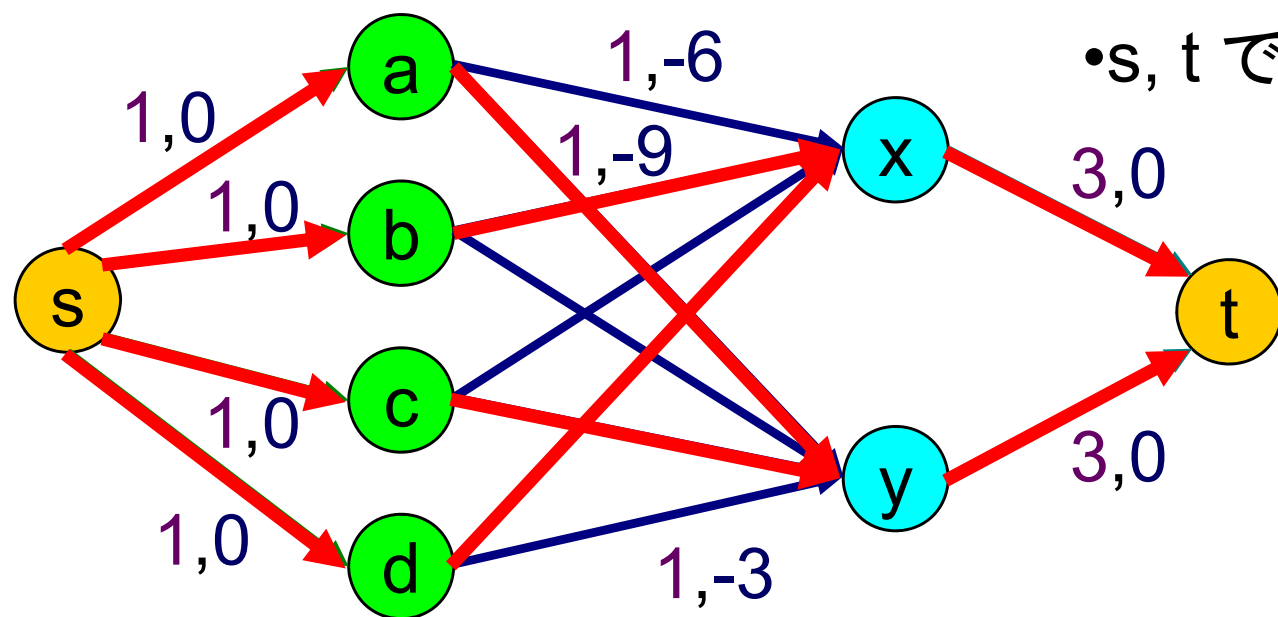


- すべての学生頂点からすべての研究室頂点への枝 $(a, x), (a, y), (b, x), \dots$



応用例：研究室配属問題

- 供給点から学生頂点への枝：容量1、費用0
- 研究室頂点から需要点への枝：容量＝研究室内の定員、費用0
- 学生頂点から研究室頂点への枝：容量1、費用＝ $(-1) \times$ 満足度



学生B, D → X研究室
学生A, C → Y研究室

この問題の(整数値)フロー ⇔ 定員を満たす配属方法

フローの費用 ⇔ $(-1) \times$ 学生の満足度の合計

∴ 最小費用流問題に変形できた

演習問題

次の最小費用フロー問題 (a), (b) に対して, 以下の問いに答えよ.

(1) 定式化を書け

(2) 初期フローに対する, 定理3のポテンシャルの条件を具体的に書け.

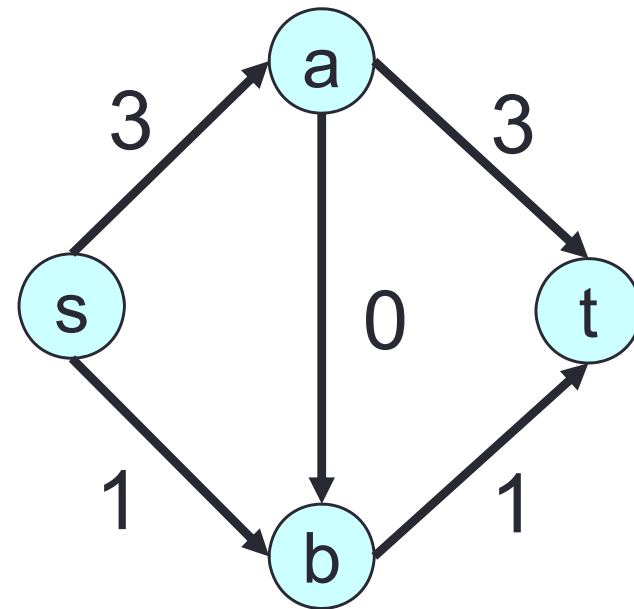
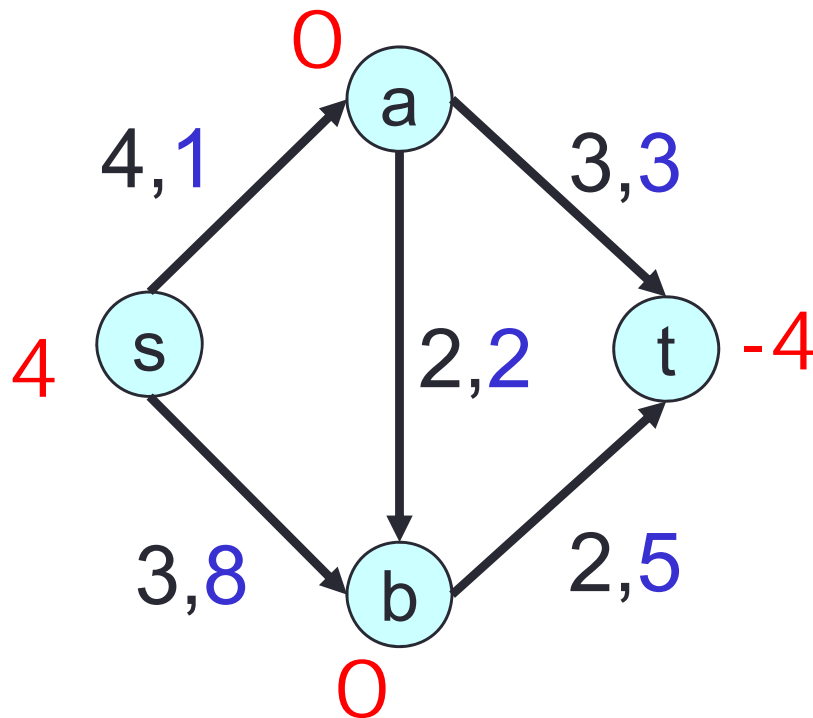
また, そのようなポテンシャルが存在しない理由を, 条件を使って説明せよ.

(3) 初期フローに対して負閉路消去アルゴリズムを適用し,

最小費用フローを求めよ(途中の計算過程も省略せず書くこと)

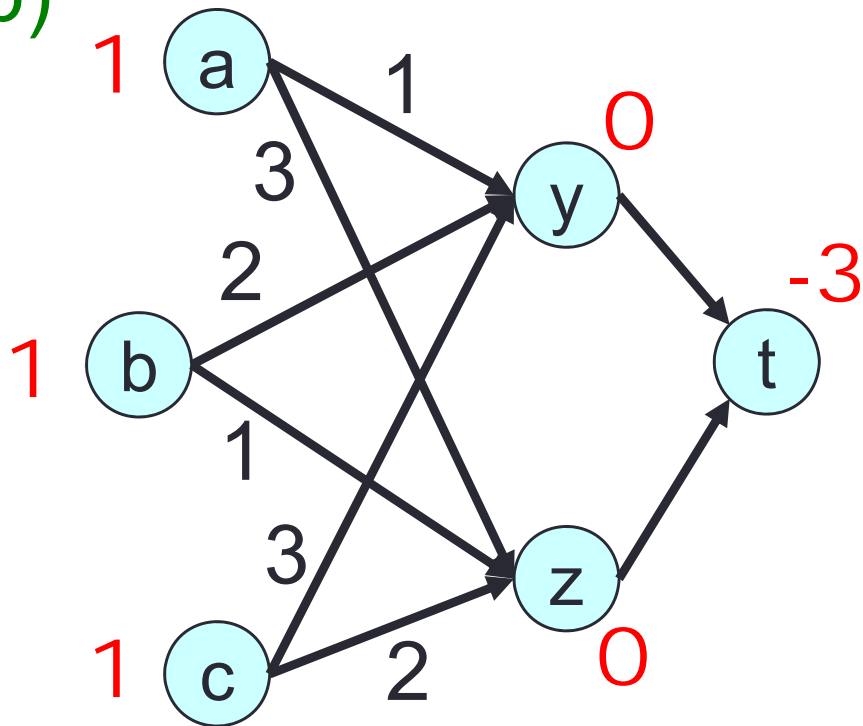
(4) 得られた最小費用フローに対し, 定理3の条件を満たすポテンシャルを求めよ.

(a)

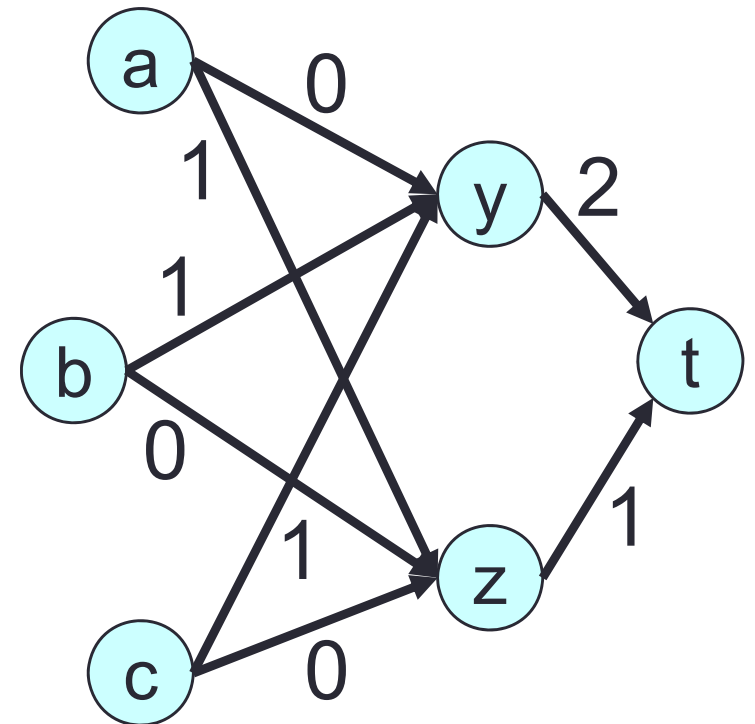


初期フロー

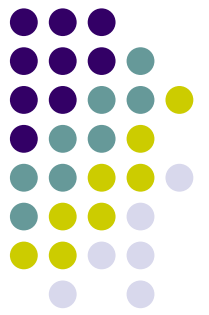
(b)



初期フロー







枝(y, t), (z, t) の容量は3, それ以外の枝の容量は1
tに入る枝の費用は0, それ以外は各枝の数値を参照



応用:プロ野球リーグの優勝可能性 判定と最大流問題

アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち 数	負け 数	残り試合数			
			ブレー ブス	フィ リーズ	メッツ	エク スポス
ブレー ブス 	83	71		1	6	1
フィ リーズ 	80	79	1		0	2
メッツ 	78	78	6	0		0
エク スポス 	77	82	1	2	0	

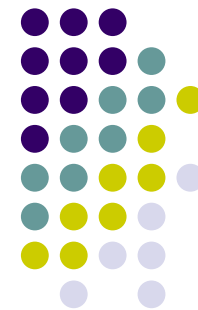
(2000年頃のデータ)

エクスポスの
優勝可能性





✗ 残り全勝して
も80勝止まり

各チームの優勝可能性を判定したい

優勝可能性判定: やや難しいケース



アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス 	83	71		0勝 1	0勝 6	0勝 1
フィリーズ 	80	79	1勝 1		0	2勝 2
メッツ 	78	78	6勝 6	0		0
エクスポス 	77	82	1	2	0	

ブレーブスが全敗で
同じ勝ち数に

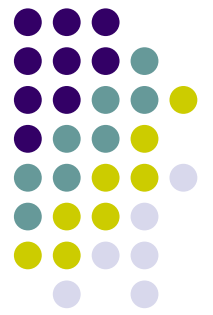
残り試合全勝で**83勝**

メッツが**84勝**





フィリーズの
優勝可能性



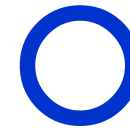
優勝可能性判定: やや難しいケース



アメリカ ナショナルリーグ東地区の順位表

	勝ち数	負け数	残り試合数			
			ブレーブス	フィリーズ	メッツ	エクスポス
ブレーブス 	83 83	71		1	6	1
フィリーズ 	80 81	79	1		0	2
メッツ 	78 84	78	6	0		0
ナショナルズ 	77 80	82	1	2	0	

全ての試合で
下位チームが
上位チームに
勝った場合



優勝の可能性は
ゼロではない

各チームの優勝可能性を判定したい

優勝可能性判定: 複雑なケース



他の地区所属のチームとの試合

では、次の場合は？(アメリカンリーグ東地区)

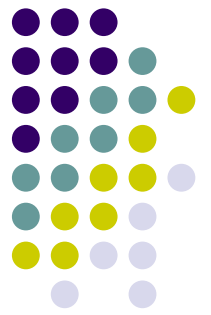
	勝	敗	残り試合数					レイズ	その他
			ヤンキース	オリオールズ	レッドソックス	ブルージェイズ			
ヤンキース	75	59		3	8	7	3	7	
オリオールズ	71	63	3		2	7	4	15	
レッドソックス	69	66	8	2		0	0	17	
ブルージェイズ	63	72	7	7	0		0	13	
レイズ	49	86	3	4	0	0		20	

レイズは残り試合全勝すると76勝

ヤンキースの勝ち数以上 → 優勝の可能性？

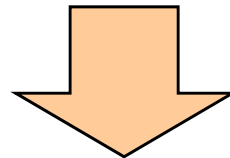
最大流問題を使って判定ができる

優勝可能性判定の基本的な考え方



レイズにとって都合の良いケースのみ考える

- レイズは残り全勝
- 東地区の他チームは他地区との試合において全敗



東地区の他チーム同士の試合結果のみ考えれば良い

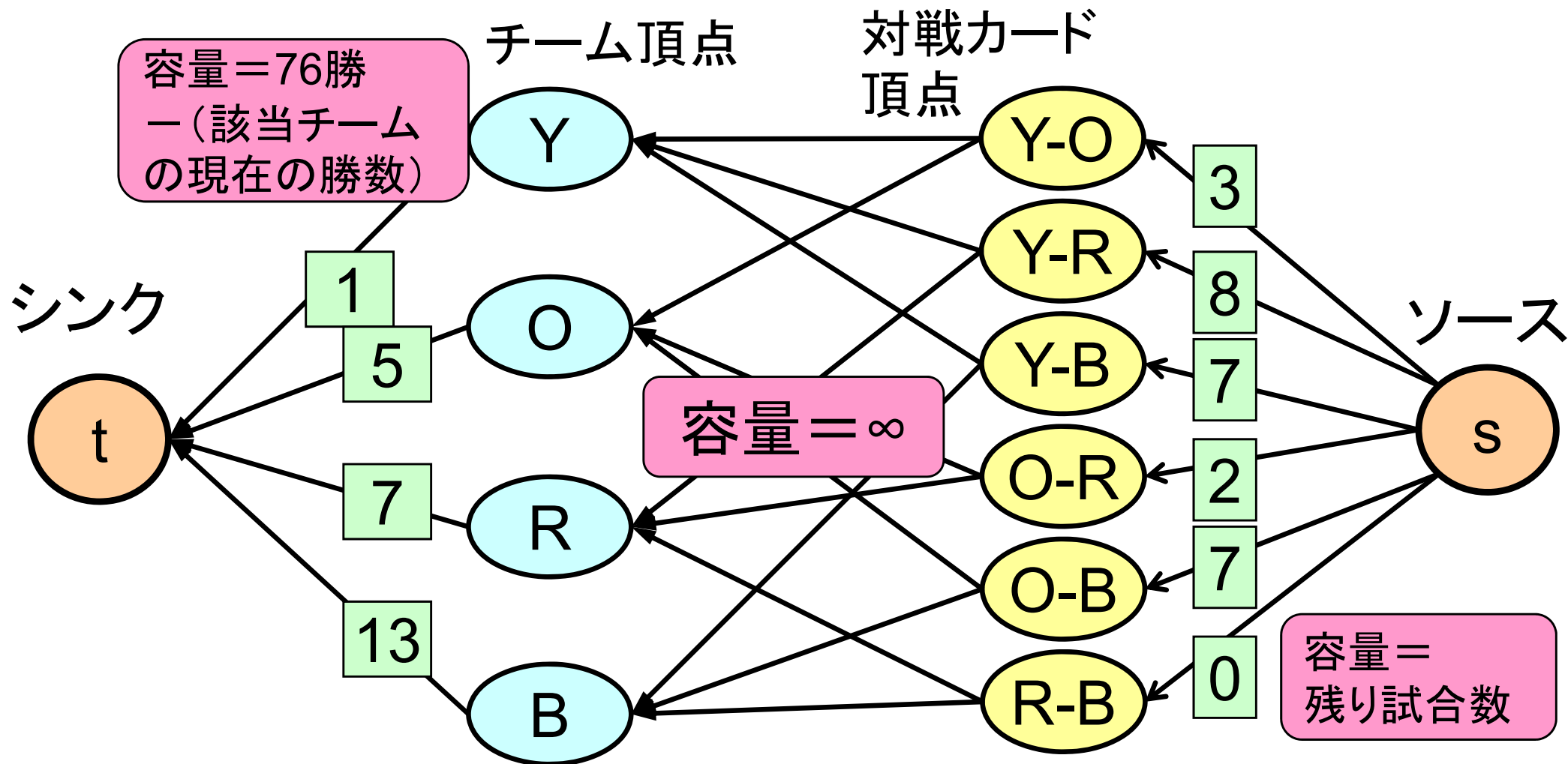
- どのようなケースにおいても77勝以上のチームが現れる
→優勝の可能性なし
- あるケースにおいては、他チームは全て76勝以下
→優勝の可能性あり

最大流問題(供給需要を満たすフローの問題)に帰着

最大流問題への帰着： グラフの作り方



最大フローの総流量 = 残り試合数の合計27 ⇔ 優勝可能性が存在





最大流問題への帰着： 枝容量の決め方

Yの勝数はレイズの最大勝ち数76を超えてはいけない

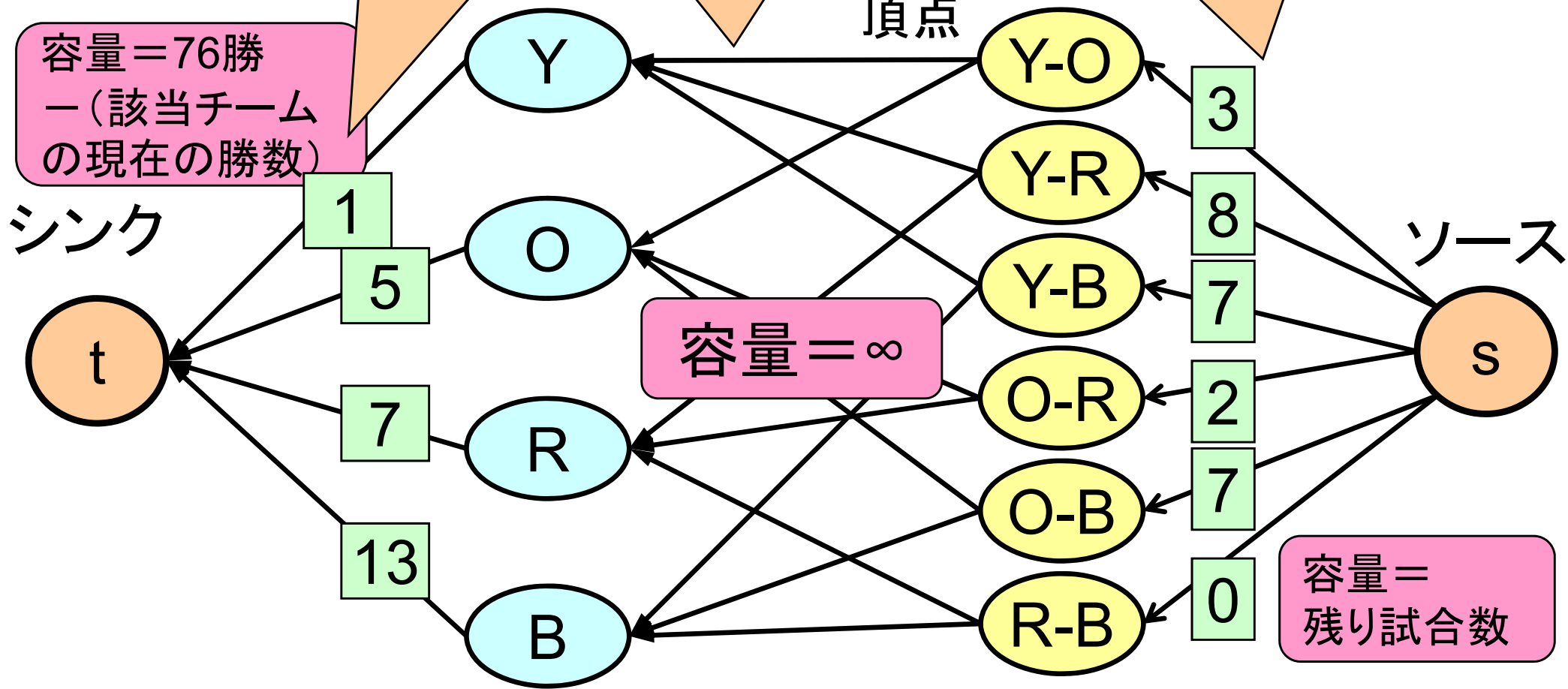
Yは各対戦カードから勝数を受け取る

YとOの対戦カードから合計3の勝数をYとOに供給

容量 = 76勝
- (該当チームの現在の勝数)

容量 = ∞

容量 = 残り試合数





最大流問題への帰着： 需要供給量の決め方

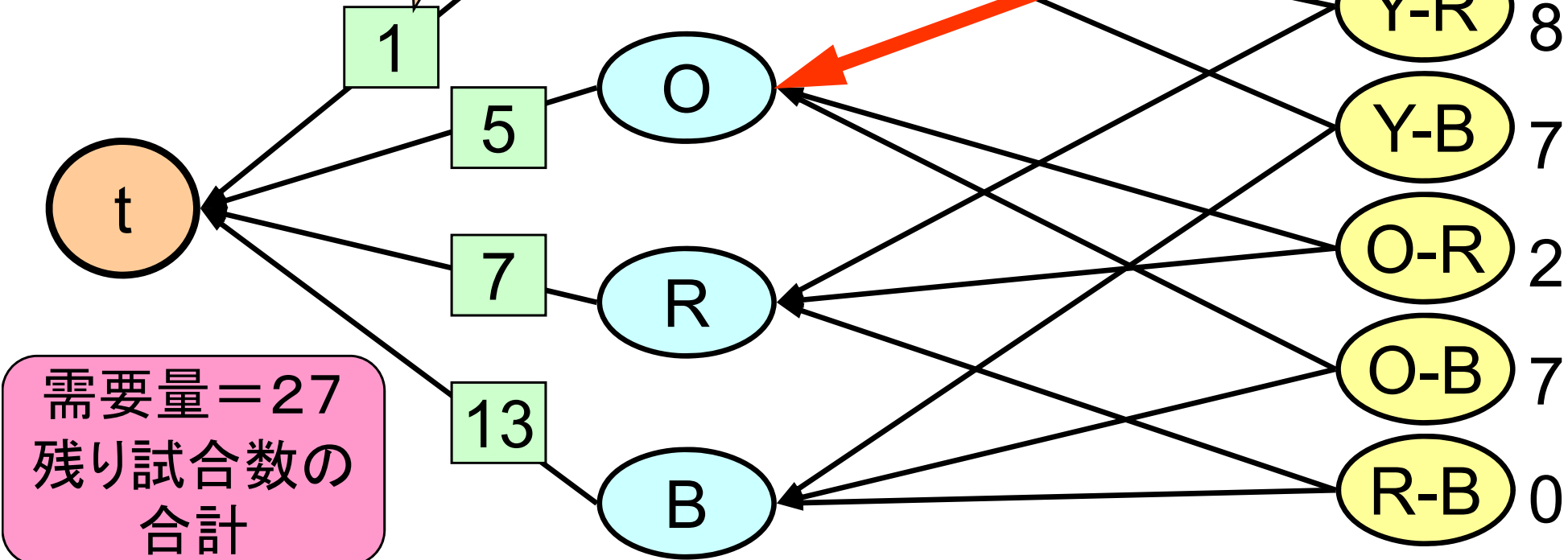
Yの勝数はレイズの最大勝ち数76を超えてはいけない

Yは各対戦カードから勝数を受け取る

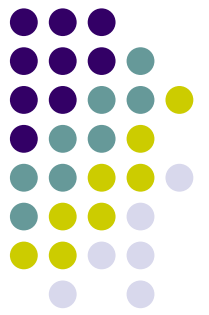
YとOの対戦カードから合計3の勝数をYとOに供給

容量 = 76勝
- (該当チームの現在の勝数)

供給量 || 残り試合数



需要量 = 27
残り試合数の合計



その他の優勝可能性判定問題

- アメリカのプロ野球の優勝可能性判定問題は比較的容易
- 日本のプロ野球
 - リーグ優勝判定は難しい(引き分けあり, 勝率1位が優勝)
 - プレーオフ進出判定はもっと難しい(勝率3位まで考慮するため)
 - 分枝限定法のような技法で正確かつ効率的に計算
 - NTTデータ数理システム社と時事通信社
- サッカーのリーグ戦
 - 勝ち2点, 引き分け1点, 負け0点 → 最大流問題に帰着できる
 - 勝ち3点, 引き分け1点, 負け0点 → 難しい
(対戦チーム間での勝ち点の合計が一定でないため)



CS 進出ナンバー導出プログラム

1. 身近に潜む数理計画問題
2. CS 進出ナンバーを求める
3. 運用方法

時事通信社ご担当者様へのインタビュー記事は[こちらからご覧ください](#)

1. 身近に潜む数理計画問題

日本プロ野球でクライマックスシリーズにどの球団が、あと何勝で進出できるのかを示すクライマックスシリーズ進出ナンバー(以下、CS 進出ナンバー)が 2012 年 8 月 17 日より配信されました。計算エンジンには Numerical Optimizer を使用し、時事通信社様との共同で開発を行いました。

日本プロ野球では両リーグそれぞれ上位 3 球団が、日本選手権シリーズ進出をかけたクライマックスシリーズに出場できます。どの球団が、あと最低何勝すれば必ずクライマックスシリーズに進出できるか(CS 進出ナンバー)は試合が進むにつれて、重要な指標です。しかし、3 位以内という条件のうえ、日本のプロ野球には引き分けが存在することで試合の結果パターンは膨大な数に上ります。さらには最終勝率が同じだった場合など、特定の条件下ではより複雑な判断基準が存在するため、算出は非常に困難となります。

我々は、考えられる状況を制約式として定式化し、数理計画問題としてモデル化することで、膨大なパターンの中から条件を満たすパターンが存在するかを素早く判定し、CS 進出ナンバーを算出しました。

2. CS 進出ナンバーを求める

では、CS 進出ナンバーはどのようにして求めるのでしょうか。

ある球団(以下、対象球団)の CS 進出ナンバーを求めたいとします。この場合、まず対象球団の CS 進出ナンバーを n と仮定します。

日本プロ野球ではまず、交流戦を含めた最終勝率(以下、勝率)で順位が判断されるので、残る全試合パターンで対象球団の勝率が単独 3 位以内となれば、クライマックスシリーズ進出は確実です。

そこでまず、「対象球団が勝率で単独 4 位以下である」というモデルを数理計画問題として記述し、少なくとも 1 つのパターンでこのモデルに解が存在すれば、 n は CS 進出ナンバーではない、ということが言えます。

▶ 製品概要

▶ 最適化とは

▶ 導入事例

▶ ソリューション

- ▶ ユーザー様の声
- ▶ マーケティングソリューション
- ▶ GIS ソリューション
- ▶ スケジュールングソリューション
- ▶ エネルギーソリューション
- ▶ スポーツソリューション
- ▶ 金融工学ソリューション

▶ セミナー情報

▶ ユーザーサポート

- ▶ 数理計画用語集
- ▶ メールマガジン
- ▶ ダウンロード

資料請求・お問合せは
TEL:03-3358-6681

▶ 資料請求・お問合せ

NTTデータ数理システム社の
Webページより