数理手法（数理最適化）第9回
ネットワーク最適化

増加路アルゴリズムの正当性と最大フロー最小カット定理
最小費用流問題

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shioura.a.aa@m.titech.ac.jp

http://www.me.titech.ac.jp/~shioura/shioura/teaching/TUmp17/index.html

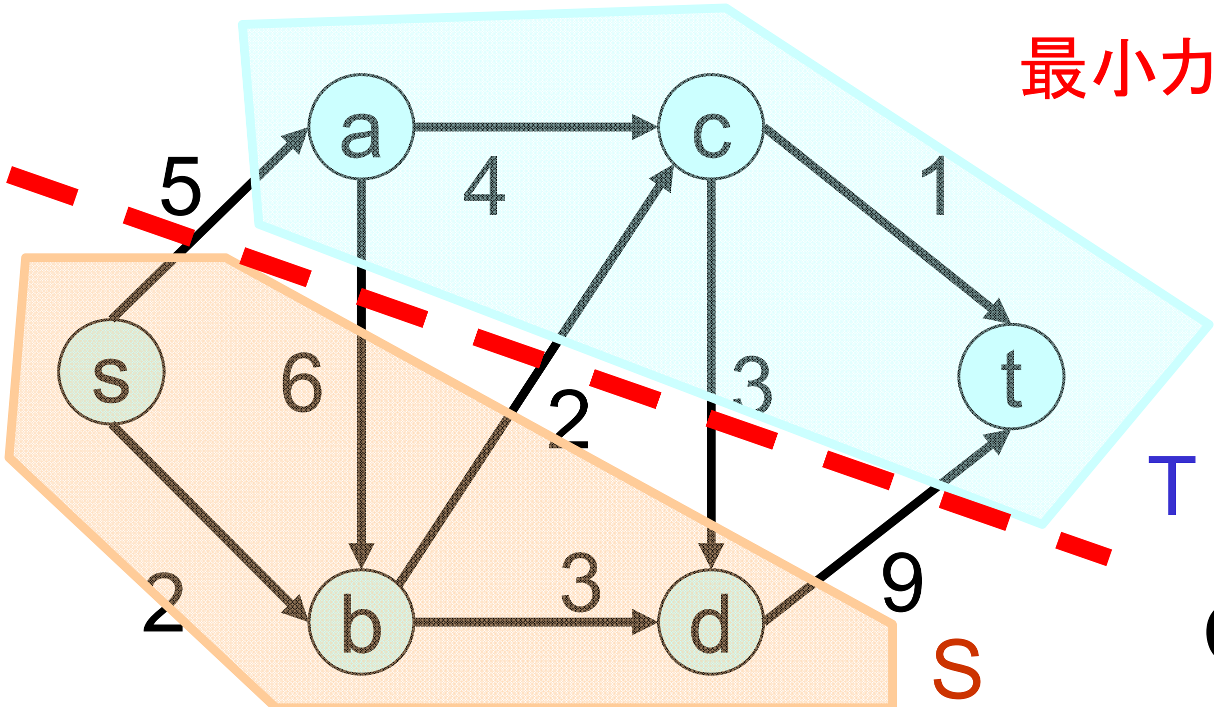
カット

フローを流すとき，ネットワークのボトルネックはどこ？

カット (S, T): S, T は頂点集合Vの分割（$S \cap T = \emptyset, S \cup T = V$）
S はソース s を含む，Tはシンク t を含む

カット (S, T) の容量C(S,T) ＝ SからTへ向かう枝の容量の和

最小カット：容量が最小のカット



C(S,T)=5+2+9=16

カットの性質（その1）

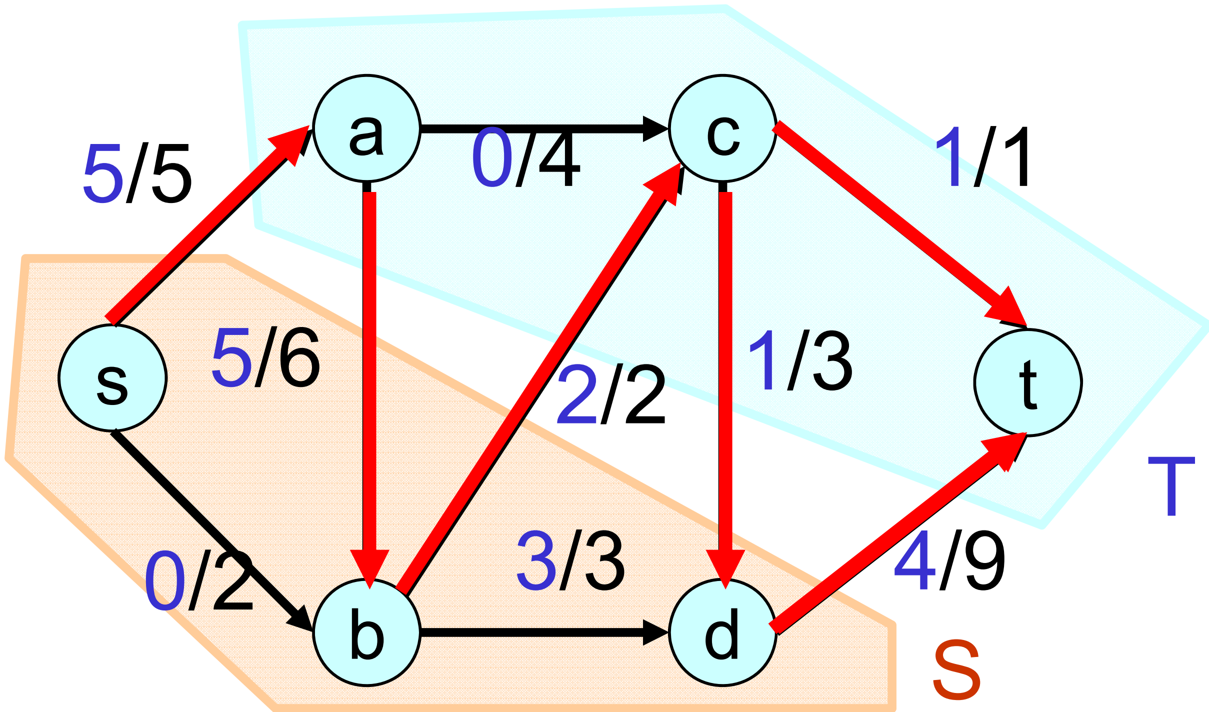
性質1：

任意のカット(S, T)と任意の実行可能フロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し

SからTへの枝のフローの和 x(S,T)

－ TからSへの枝のフローの和 x(T,S)

＝ フローの総流量 f



f = 1 + 4 = 5

x(S, T) = 5 + 2 + 4 = 11

x(T, S) = 5 + 1 = 6

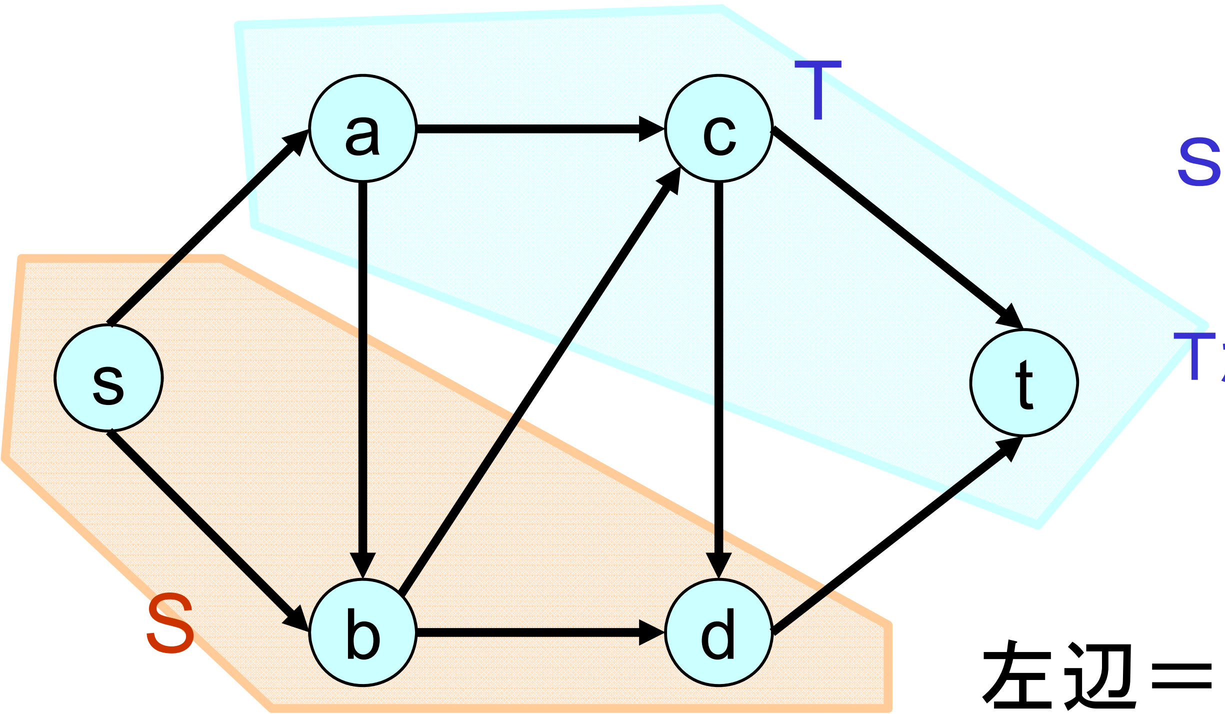
f = 11 – 6 = 5

カットの性質(その1)

下記のネットワークの場合の証明:

頂点 s, b, d ∈Sに関する流量保存条件を足し合わせる

$$(x_{bc} + x_{bd}) - (x_{sb} + x_{ab}) = 0$$
$$x_{dt} - (x_{cd} + x_{bd}) = 0$$
$$x_{sa} + x_{sb} = f$$



左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は
係数が+1

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は
係数が−1

SからSへの枝 の変数 x_{ij} は
打ち消される

TからTへの枝 の変数 x_{ij} は
登場しない

$$左辺 = (x_{sa}+x_{bc}+x_{dt}) - (x_{ab}+x_{cd})$$

カットの性質(その1)

一般の場合の証明: 下記の制約式を足し合わせる

$\sum\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る$\}$

$- \sum\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る$\} = 0 \qquad (k \in S - \{s\})$

$\sum\{x_{sj} \mid (s,j)$ は s から出る$\} - \sum\{x_{is} \mid (i,s)$ は s に入る$\} = f$

左辺の和をとる

SからTへの枝 の変数 x_{ij} は係数が$+1$

TからSへの枝 の変数 x_{ij} は係数が-1

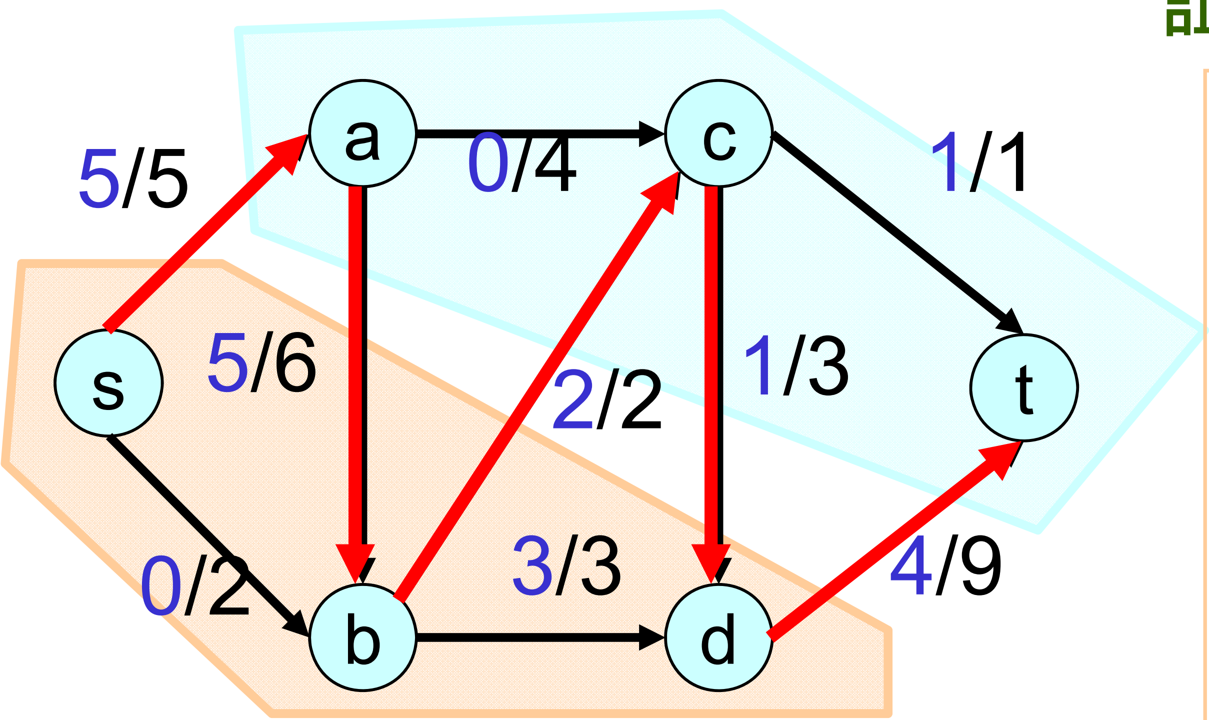
SからSへの枝 の変数 x_{ij} は打ち消される

TからTへの枝 の変数 x_{ij} は登場しない

$\Rightarrow$ 左辺$= x(S, T) - x(T, S)$

カットの性質(その2)

性質2：任意のカット(S, T) と実行可能フロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し
フローの総流量 f ≦ カットの容量 C(S,T)



f = 5 ≦ 16 = C(S, T)

証明：

f = x(S, T) – x(T,S)
（性質1）
x(S, T) ≦ C(S, T)
（容量条件）
x(T, S) ≧ 0
（フローは非負）
∴ f ≦ C(S, T) – 0
= C(S, T)

最小カット問題

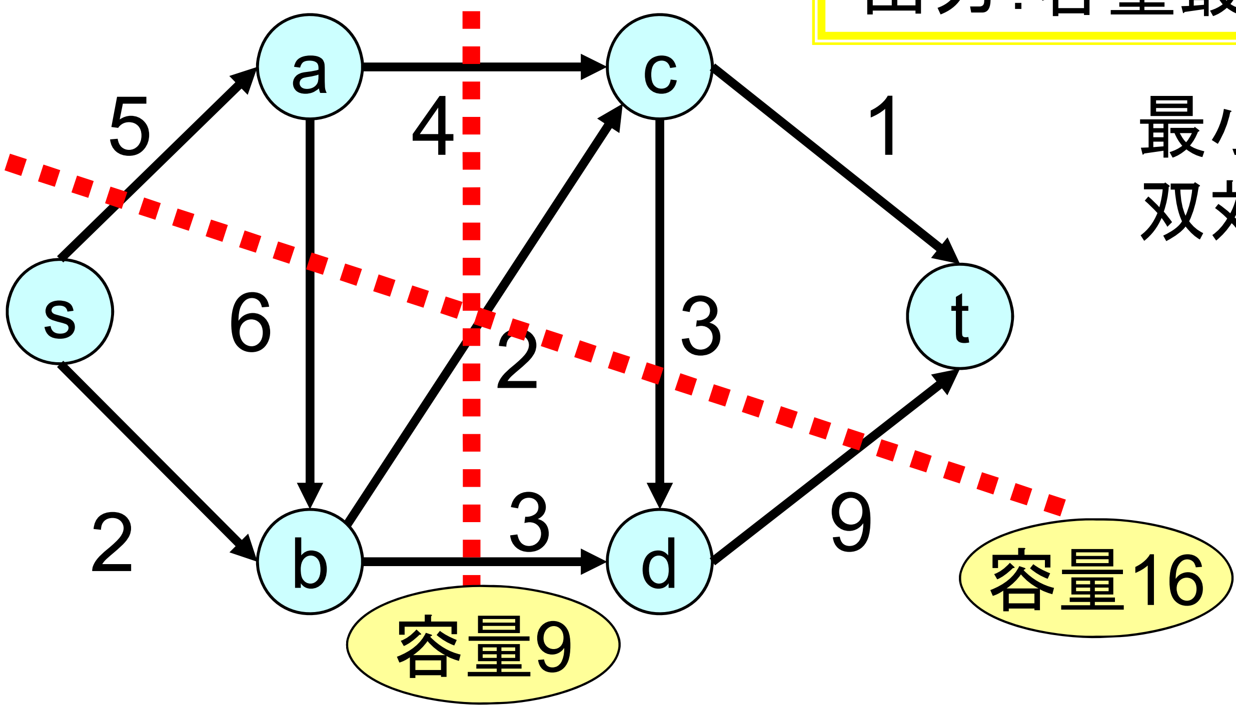
性質2：任意のカットと実行可能フローに対し
フローの総流量 ≦ カットの容量

LPの弱双対定理に対応

⇒ カットの容量は，最大フローの総流量に対する上界

より良い上界を求めたい⇒

最小カット問題
入力：グラフ G = (V, E), 頂点 s, t ∈V
出力：容量最小の s-t カット（最小カット）



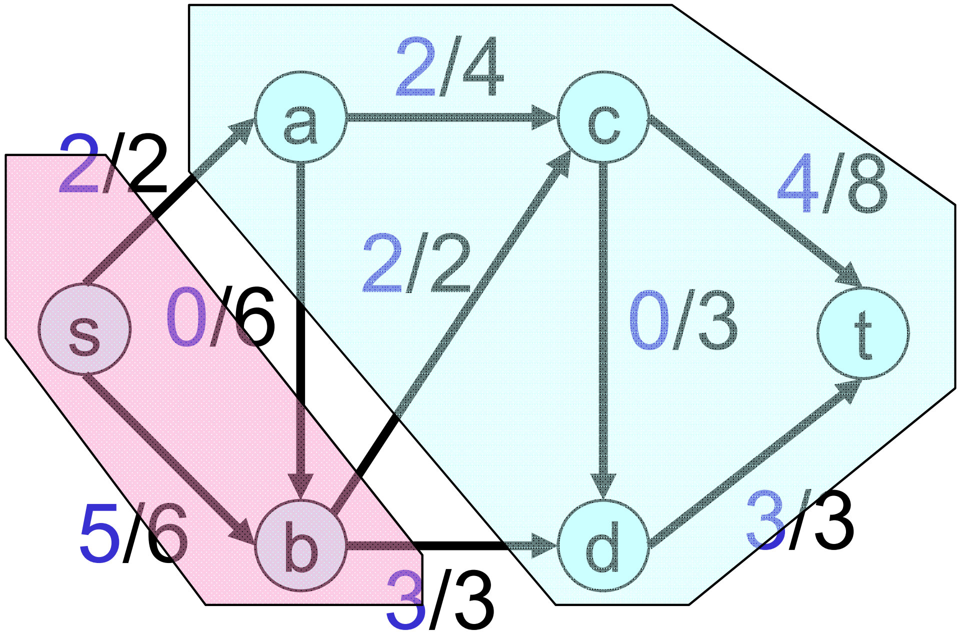
最小カット問題は最大流問題の双対問題

カットの性質(その3)

性質2より次が導かれる

性質3：任意のカット(S, T) と実行可能フロー (x_{ij} | (i,j) ∈ E) に対し
フローの総流量 f = カットの容量 C(S,T) が成り立つ
➔ 現在のフローは最大フロー，カットは最小カット

[証明] 性質2を使えば，LPに対する弱双対定理の系と同様に示せる.



※増加路アルゴリズムの正当性の
証明に使用

f = 7, C(S, T) = 7
➔ 現在のフローは最大フロー，
カットは最小カット

最大フロー最小カット定理

増加路アルゴリズムの正当性の証明

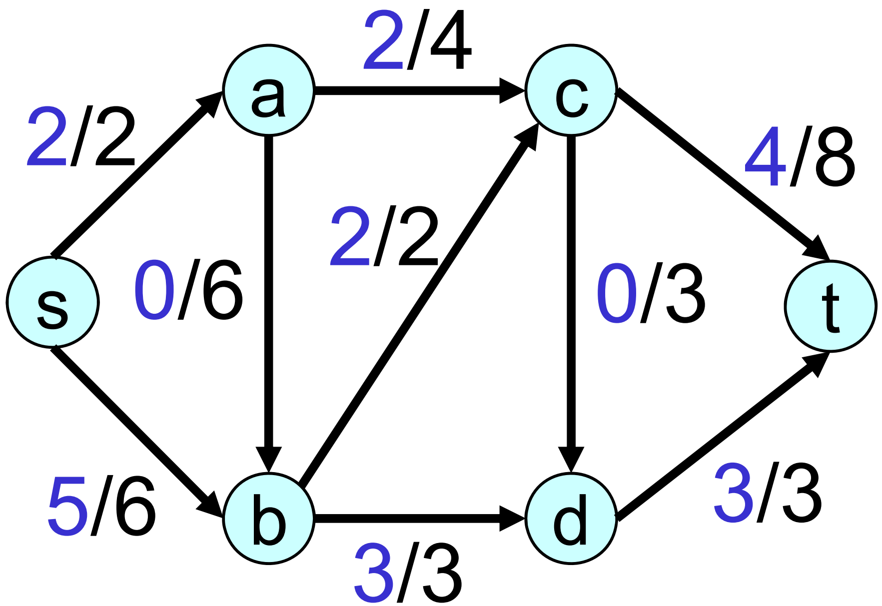
定理： 増加路アルゴリズムは最大フローを求める.
また,
　　S = 残余ネットワークで s より到達可能な頂点集合
　　T = V – S
とすると、(S, T) は 最小カット .
さらに,　$f = C(S,T)$　が成立

この性質と性質3より「最大フローの総流量＝最小カットの容量」

最大フロー最小カット定理：
最大フロー $(x_{ij} \mid (i,j) \in E)$ と最小カット(S,T)に対し

$$f = C(S,T)$$

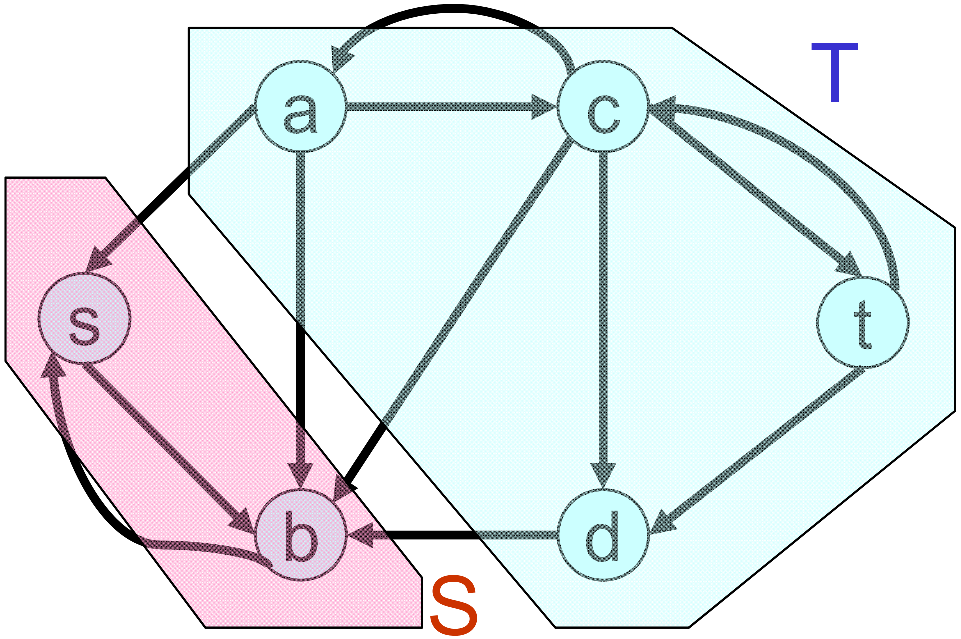
増加路アルゴリズムの正当性(その1)



目標:アルゴリズム終了時のフローに対し, f = C(S,T)を満たすカット(S,T)を見つける➔性質3より最大フロー

アルゴリズム終了時のフローに対して残余ネットワークを作る

残余ネットワークには増加路がない

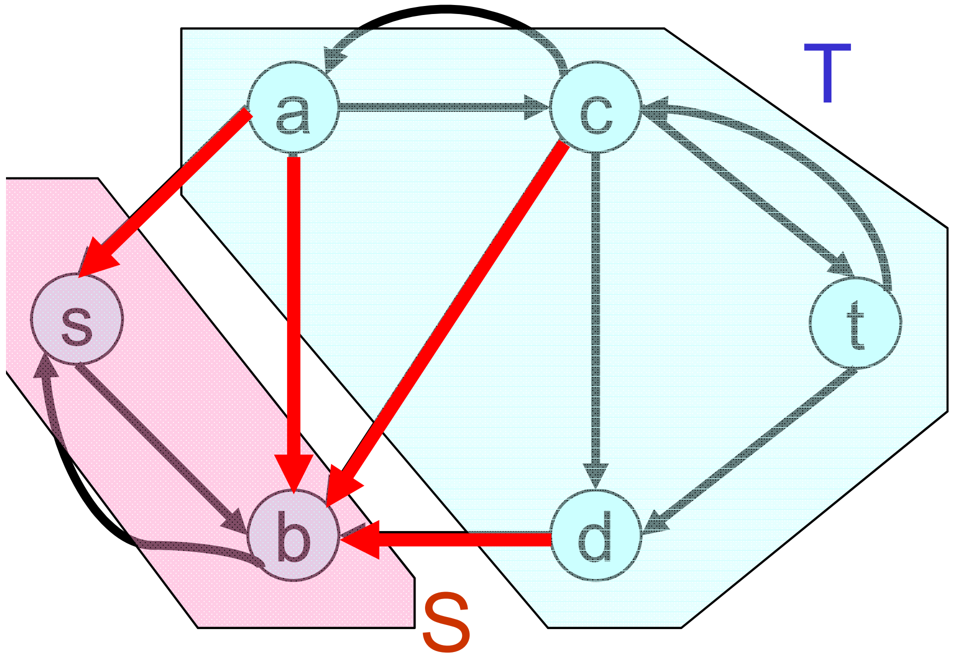


S = 残余ネットワークにおいて
s から到達可能な頂点集合

T = V – S

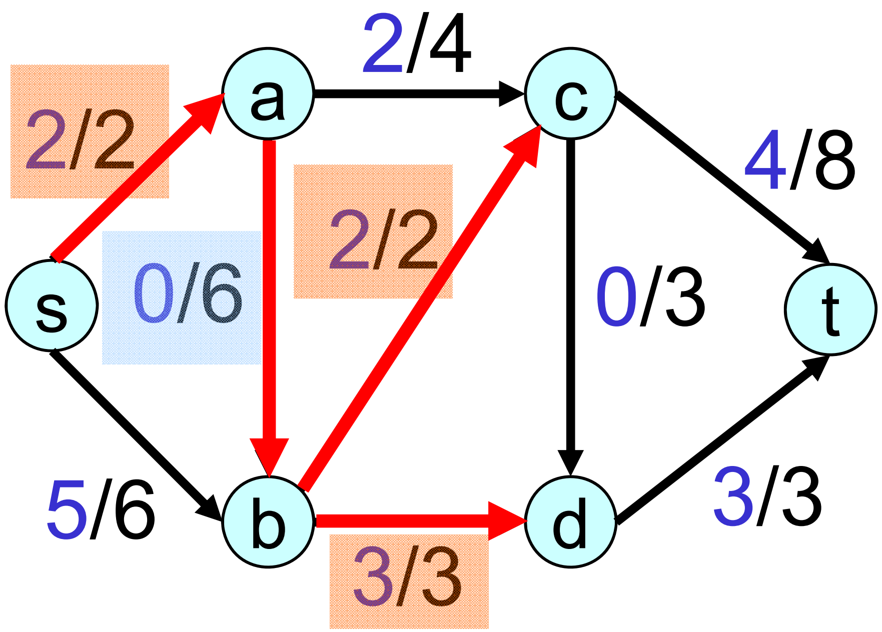
に対し、(S, T) はカット

増加路アルゴリズムの正当性(その2)



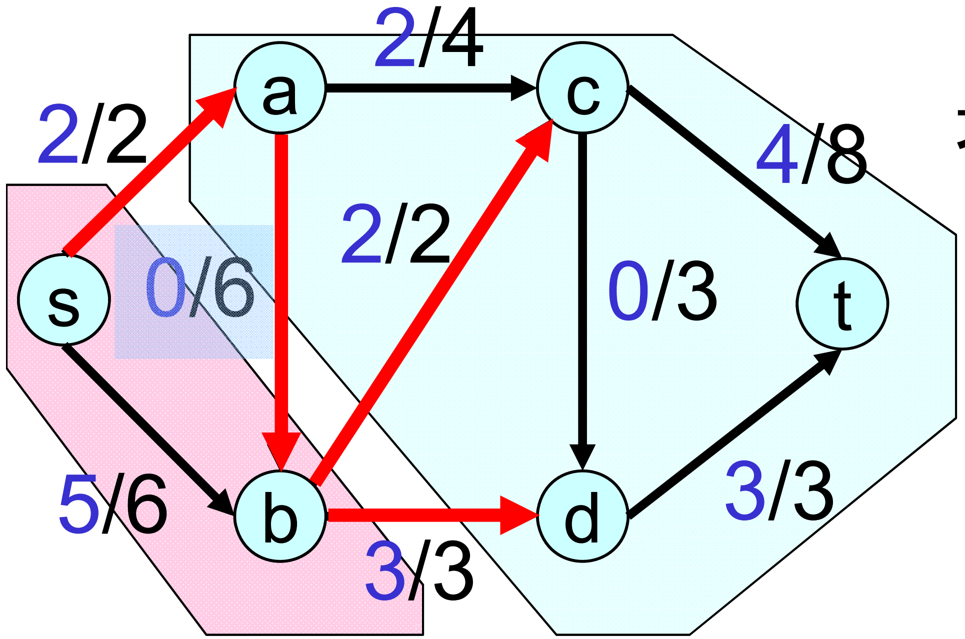
S = s から到達可能な頂点集合
T = V – S

残余ネットワークにおいて
SからTに向かう枝は存在しない



元のネットワークにおいて
SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$
TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

増加路アルゴリズムの正当性(その3)



元のネットワークにおいて

SからTに向かう枝では $x_{ij} = u_{ij}$

TからSに向かう枝では $x_{ij} = 0$

x(S, T) = ∑{x_{ij} | (i,j) はSからTへ向かう枝}

= ∑{u_{ij} | (i,j) はSからTへ向かう枝} = C(S, T)

x(T, S) = ∑{x_{ij} | (i,j) はTからSへ向かう枝} = 0

∴ x(S, T) − x(T, S) = C(S, T)

性質1より f = x(S,T) – x(T, S)

∴ f = C(S, T) (証明終わり)

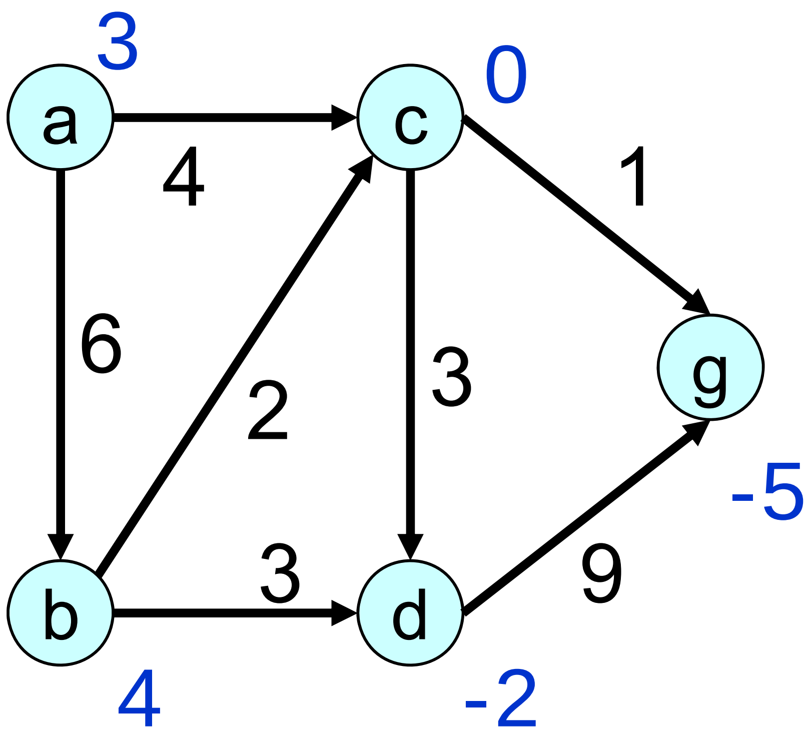
応用：供給・需要を満たすフローを求める

入力：有向グラフ $G = (V, E)$
各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$
各頂点 $i \in V$ の供給・需要量 b_i（ただし b_i の和は0）
($b_i > 0$ ➔ i は供給点，< 0 ➔ i は需要点，$= 0$ ➔ i は通過点)

出力：次の条件を満たすフロー
- 各頂点 $i \in V$ での供給・需要条件

（i から流出するフロー量）
　　　－（i に流入するフロー量）＝b_i
- 各枝 (i, j) の容量条件

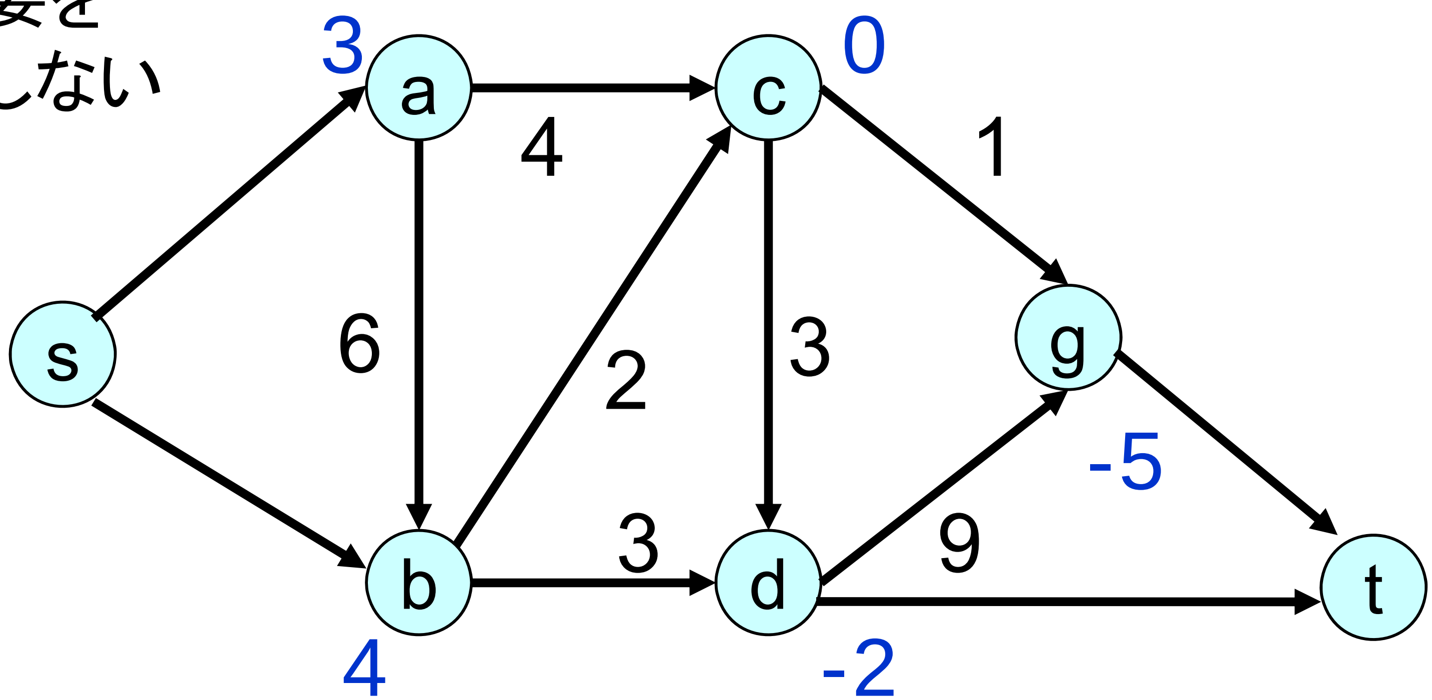
$$0 \leqq x_{ij} \leqq u_{ij}$$



応用：供給・需要を満たすフローを求める

最大流問題に帰着

(1)新たな頂点 s（ソース）, t（シンク） を追加
(2)$b_i > 0$ ならば枝(s, i)を追加，容量はb_i
(3)$b_i < 0$ ならば枝(i, t)を追加，容量は $-b_i$
(4)最大フローを求める.
(5)各枝(s, i)に対し $x_{si} = b_i$ ➔供給・需要を満たすフローが得られる
それ以外➔供給・需要を満たすフローは存在しない



最小費用流問題

最小費用流問題

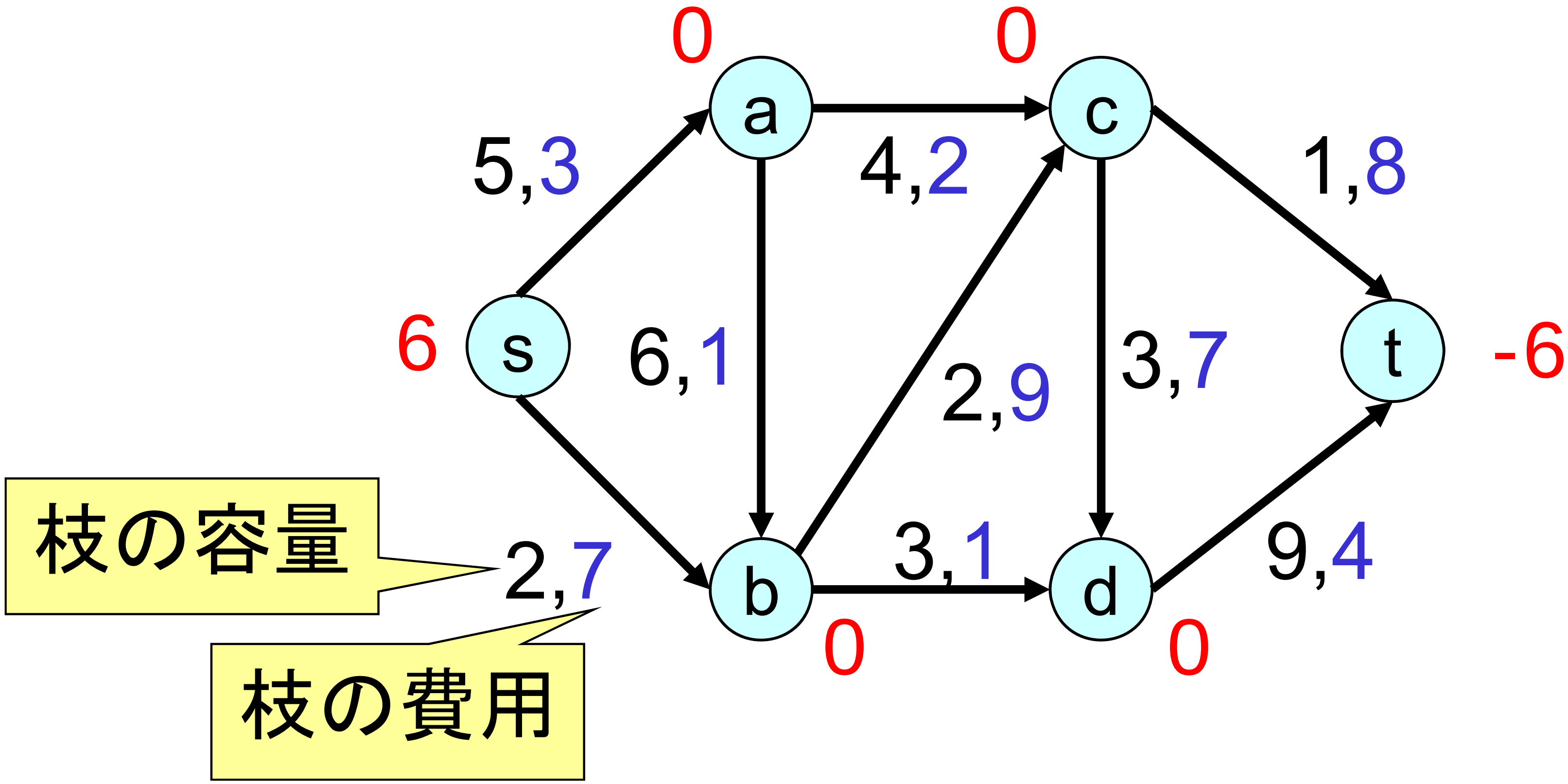
入力：有向グラフ G = (V, E)

各項点 i ∈Vの供給・需要量 b_i（ただし b_i の和は0）

(b_i >0➔ i は供給点, <0➔ i は需要点, =0➔ i は通過点)

各枝 (i, j) ∈ E の容量 $u_{ij} \geqq 0$, 費用 c_{ij}

出力：需要供給を満たすフローで総費用が最小のもの



最小費用フロー問題: 定式化

目的: 最小化 $\sum_{(i,j)\in E} c_{ij} x_{ij}$

（各枝の費用×フロー量）の和

条件 $0 \le x_{ij} \le u_{ij} \quad ((i,j) \in E)$

各枝の容量条件

$\sum\{x_{kj} \mid (k,j)$ は k から出る枝$\}$
$\quad - \sum\{x_{ik} \mid (i,k)$ は k に入る枝$\} = b_k \qquad (k \in V)$

各頂点での流量保存条件（需要供給量に関する条件）

これも線形計画問題

他のネットワーク最適化問題との関係

- 最短路問題
- 最大流問題

これらの問題は最小費用流問題に変換可能
（最小費用流問題の特殊ケース）

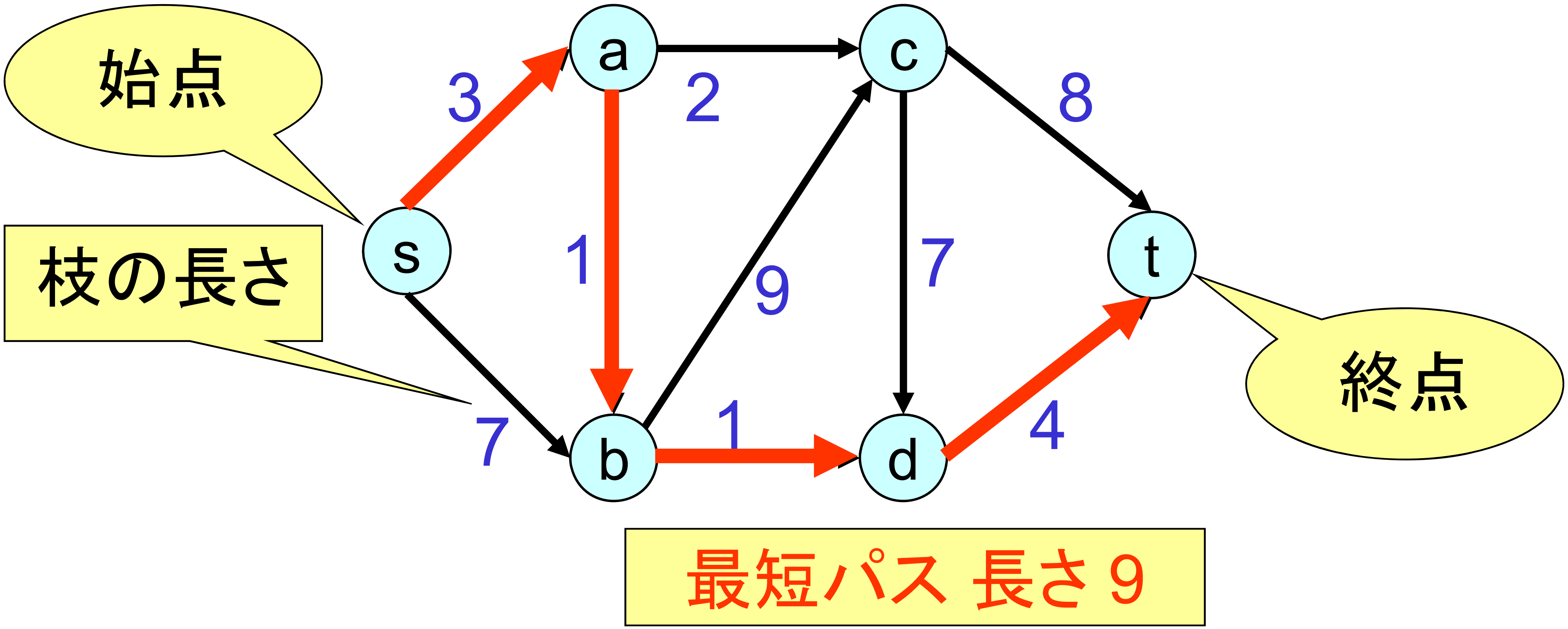
最短路問題との関係

最短路問題の定義

入力 : 有向グラフ G = (V, E)

始点 s ∈ V, 終点 t ∈ V, 各枝 (i, j) ∈ E の長さ c_{ij}

出力 : s から t までの長さ最短のパス

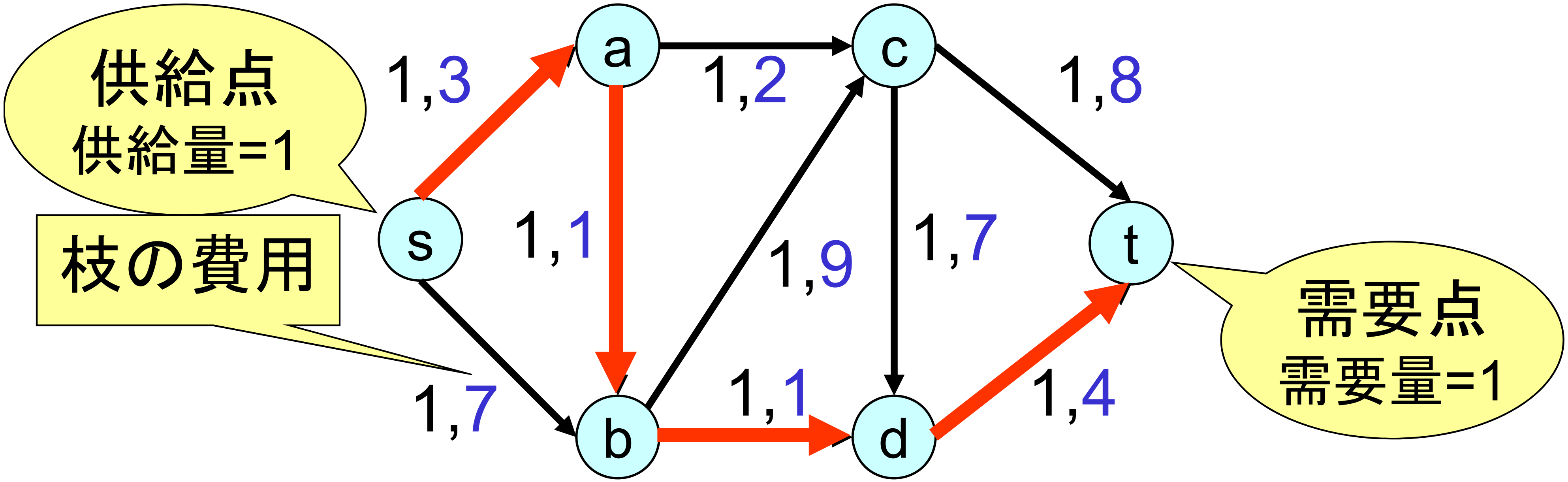


最短路問題との関係

最短路問題から最小費用流問題への変換

始点➔供給点，終点➔需要点，需要(供給)量＝1

枝の長さ➔枝の費用，各枝の容量＝1



最小費用(整数)フローを求める

➔ 最短 s-t パスを流れるフローになる

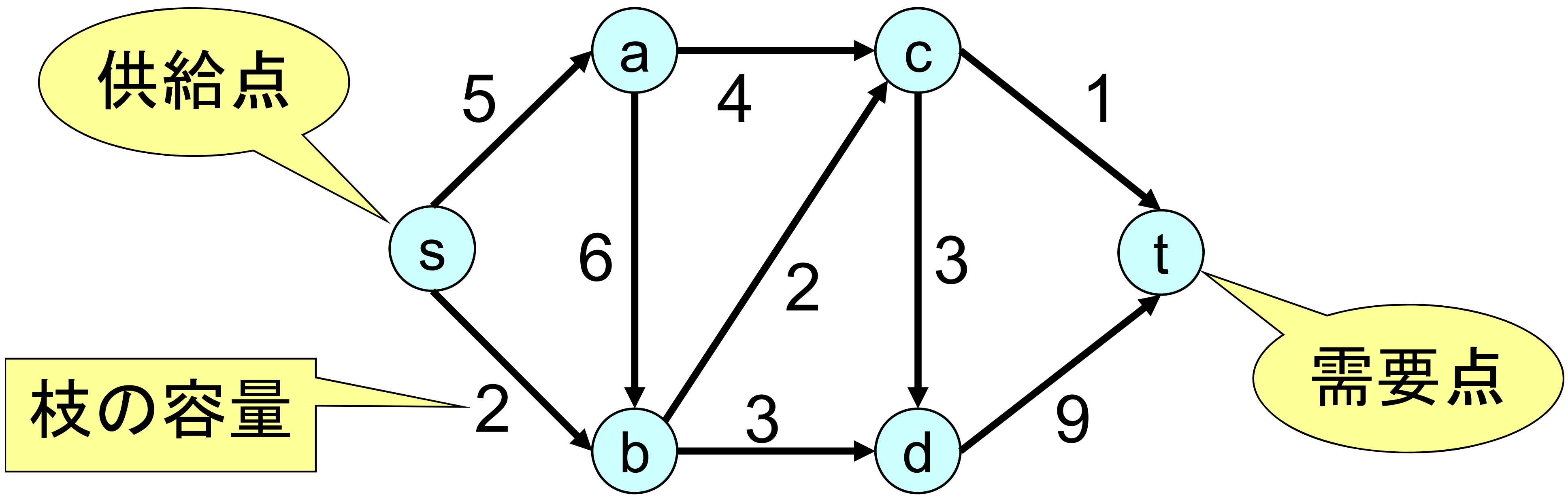
最大流問題との関係

入力：有向グラフ G = (V, E)

供給点 $s \in V$, 需要点 $t \in V$,

各枝 $(i, j) \in E$ の容量 $u_{ij} \geqq 0$

出力：フロー値が最大のフロー



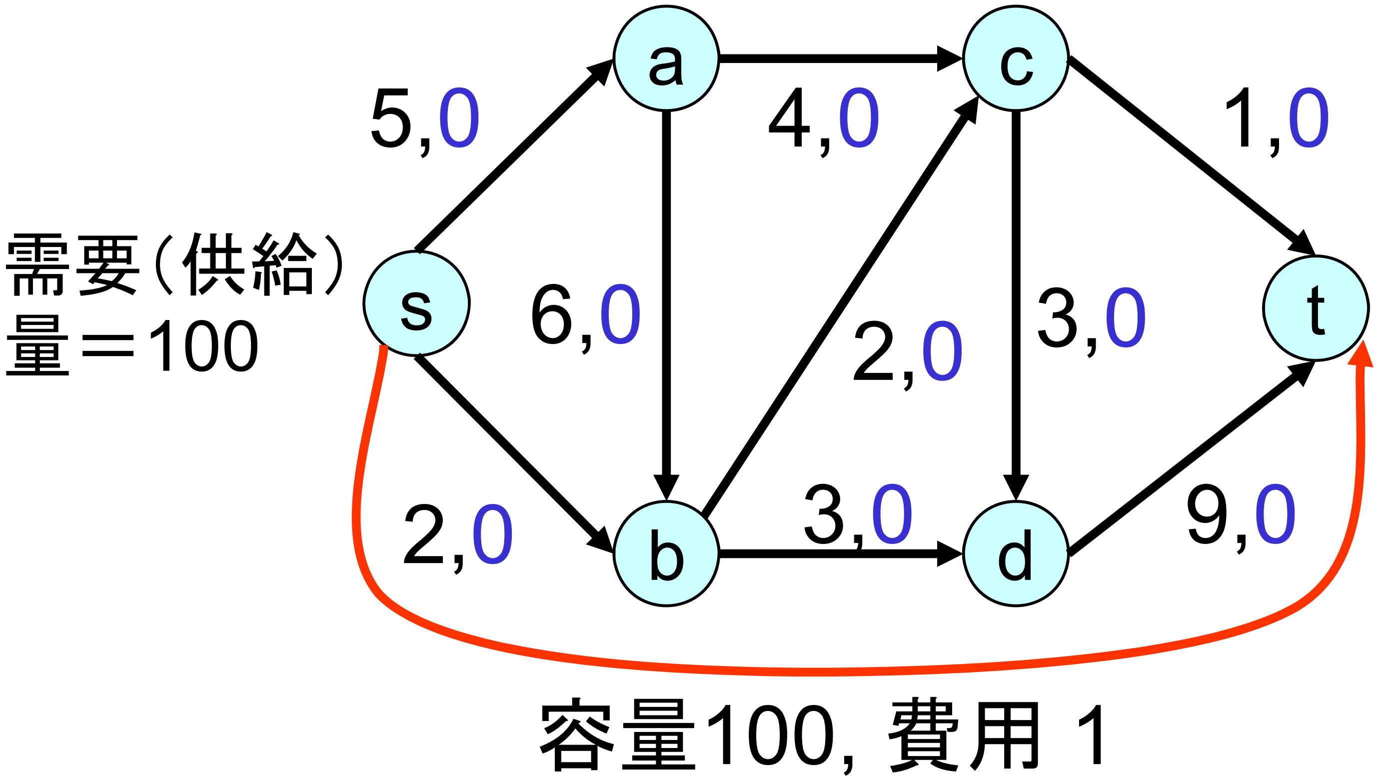
最大流問題との関係

最大流問題から最小費用流問題への変換

新たな枝(s,t)の追加：容量=U（十分大きい値），費用=1

元々の枝の費用=0

s の需要・供給量＝U，t の需要・供給量＝ - U

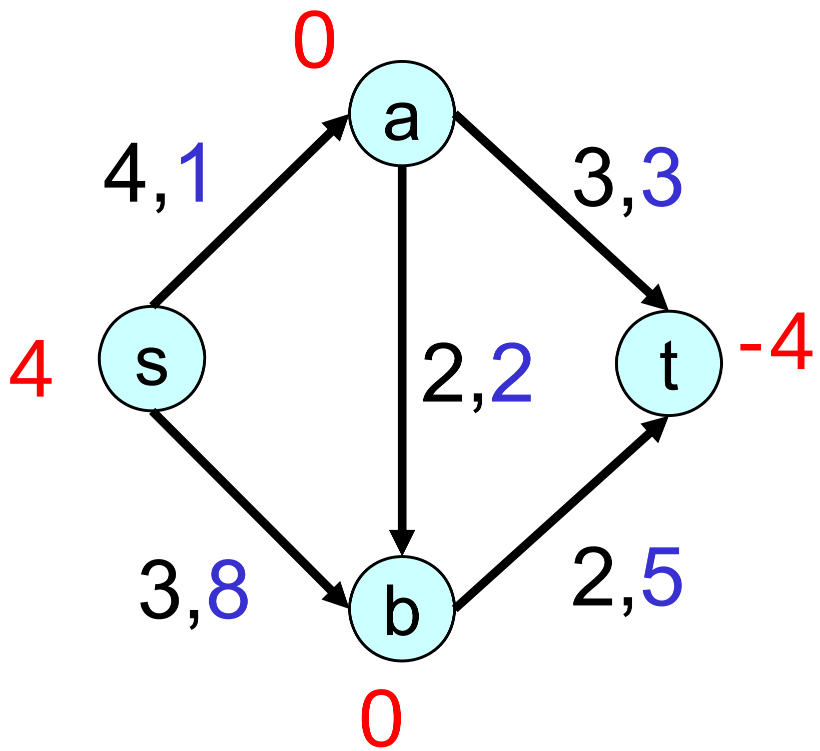


最小費用フローを求める

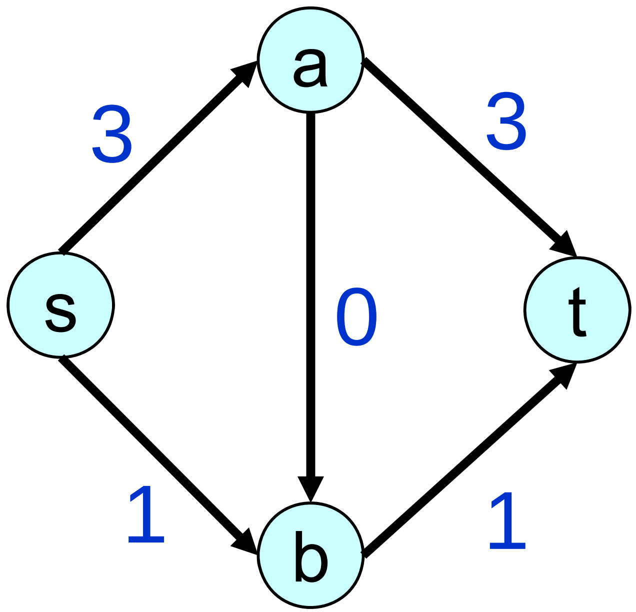
➔元々の枝を流れるフローは最大フローになっている

フローの最適性判定

フローの例



問題例



フローの費用＝25
最小か？

どうやって最小費用フローであることを判定するか？

ーーー 残余ネットワークの利用

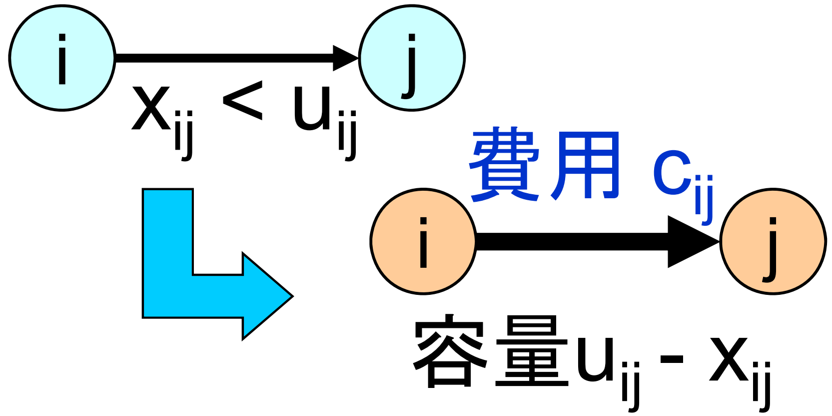
残余ネットワークの作り方(その1)

最大流のときとほとんど同じ作り方

$x = (x_{ij} \mid (i,j) \in E)$: 現在のフロー

フロー x に関する残余ネットワーク $G^x = (V, E^x)$

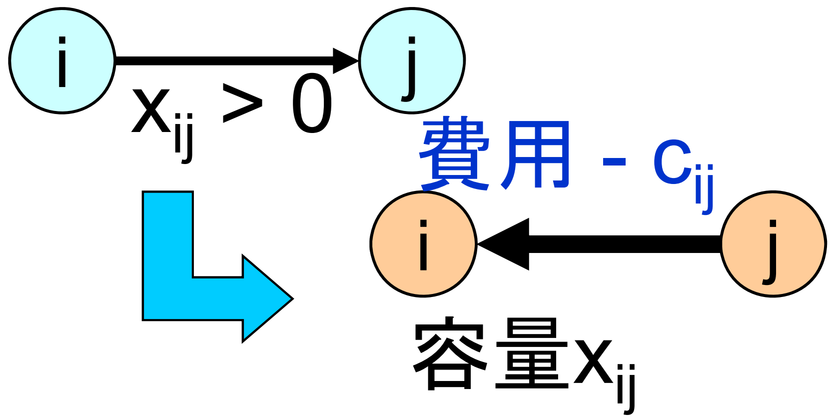
$E^x = F^x \cup R^x$



順向きの枝集合

$F^x = \{ (i, j) \mid (i, j) \in E, x_{ij} < u_{ij}\}$

容量 $u^x_{ij} = u_{ij} - x_{ij}$, 費用 c_{ij}

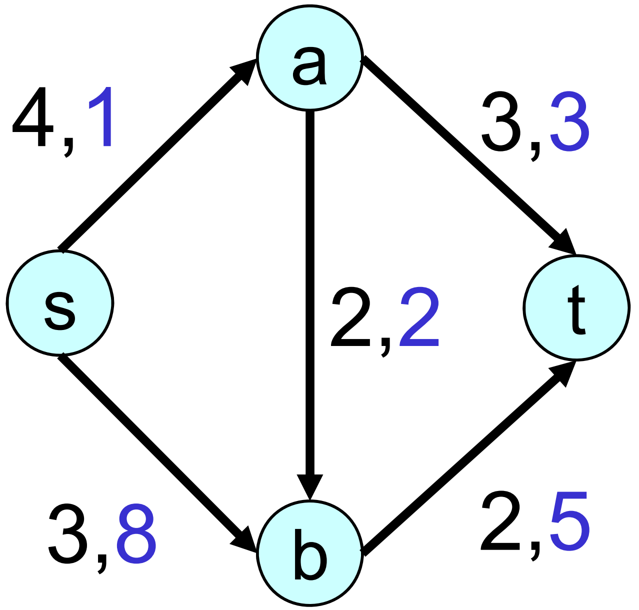


逆向きの枝集合

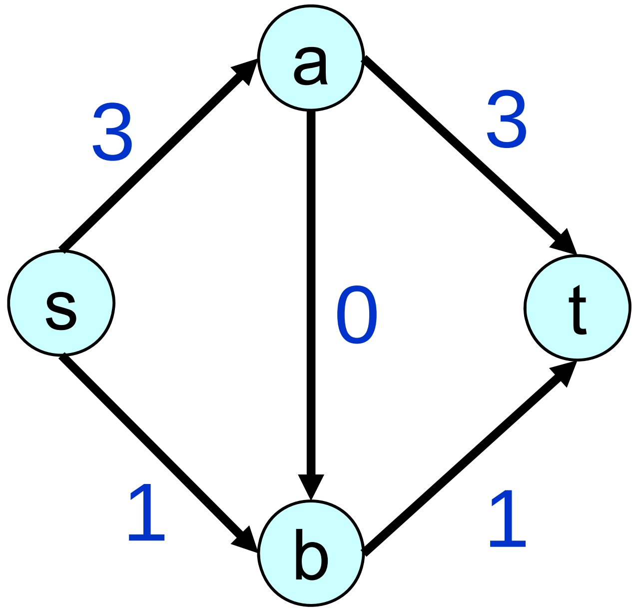
$R^x = \{ (j, i) \mid (i, j) \in E, x_{ij} > 0\}$

容量 $u^x_{ji} = x_{ij}$, 費用 - c_{ij}

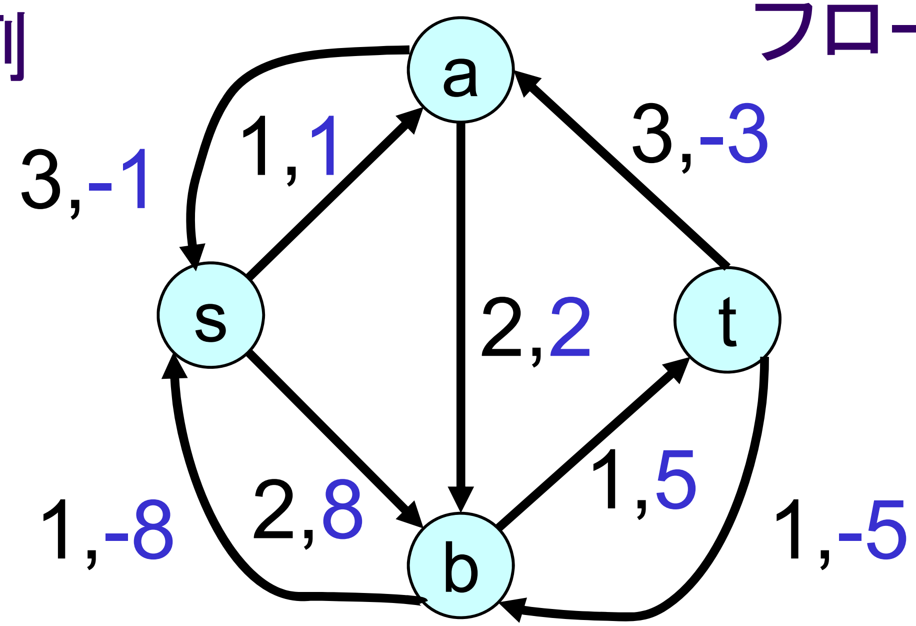
残余ネットワークの作り方(その2)



問題例



フローの例



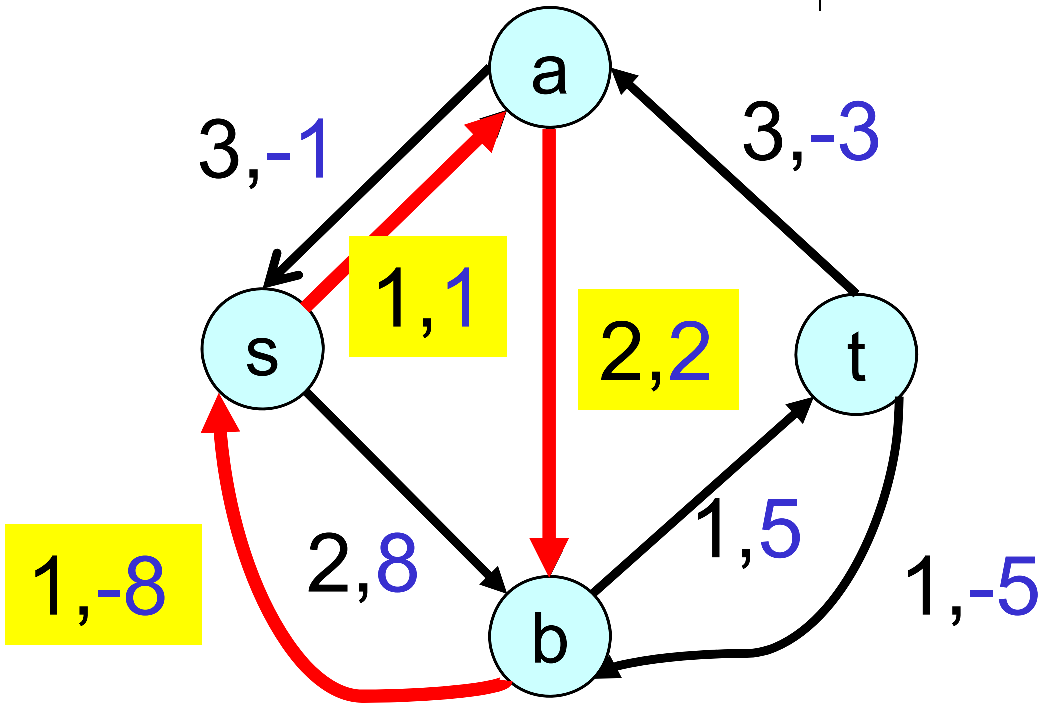
残余ネットワーク

残余ネットワークの性質(1)

残余ネットワークの閉路に注目

閉路の容量 α
＝閉路に含まれる枝の
容量の最小値 = 1

閉路の費用 γ
＝閉路に含まれる枝の
費用の和 = -5

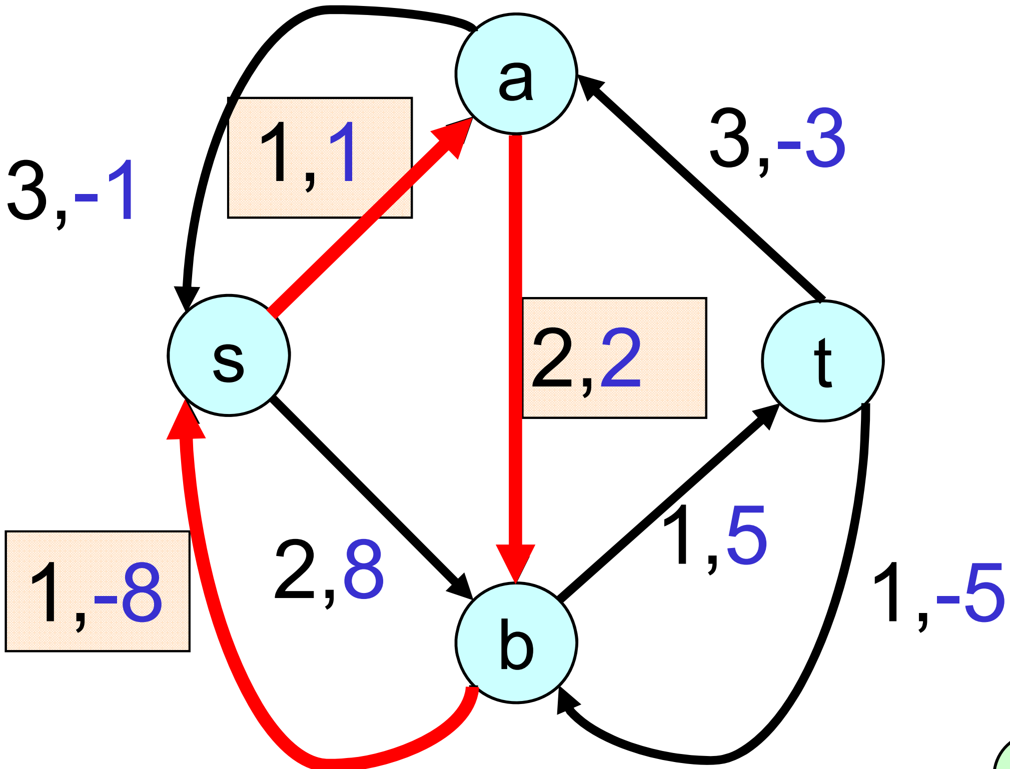


定理１：残余ネットワークに費用が負の閉路が存在
⇒ フローの費用を減少させることが可能
⇒ 現在のフローは費用最小でない

定理1の証明の概略

費用が負の閉路を用いて，フローの費用を減少できる

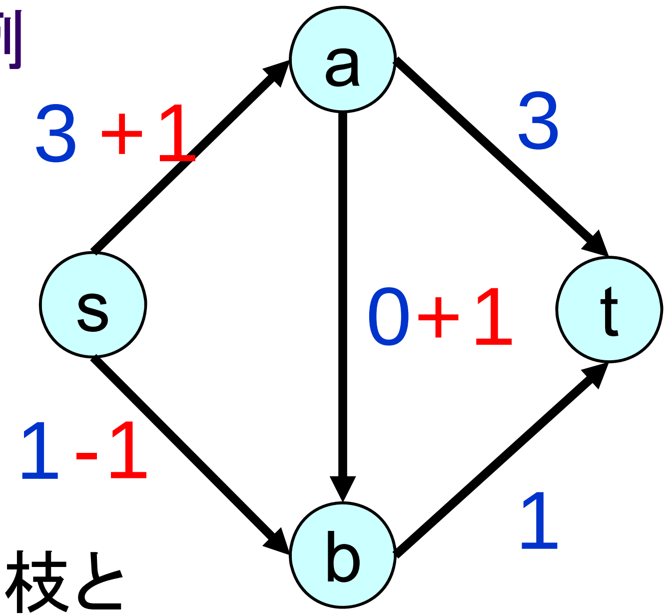
残余ネットワーク



閉路の容量 α=1

閉路の費用 γ=−5

フローの例



閉路の枝と

同じ向き⇒フロー値に＋α

逆の向き⇒フロー値に−α

無関係⇒フロー値は不変

この更新により、フローの費用は

$\alpha\gamma$（＝−5）変化

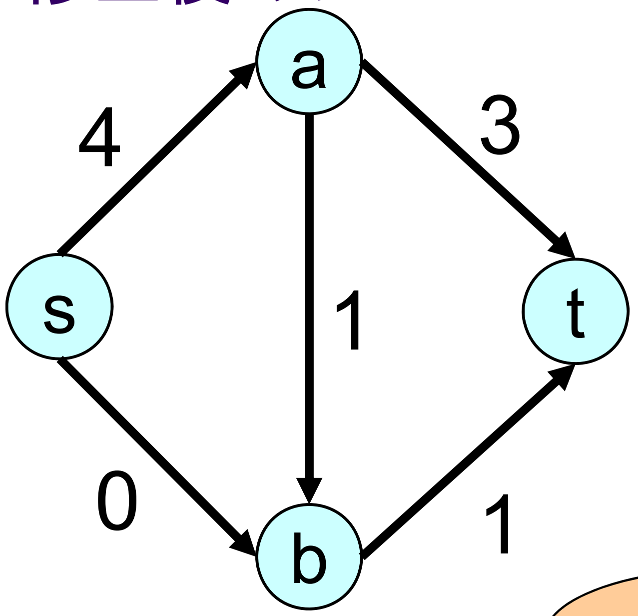
（より費用の小さいフローを得る）

残余ネットワークの性質(2)

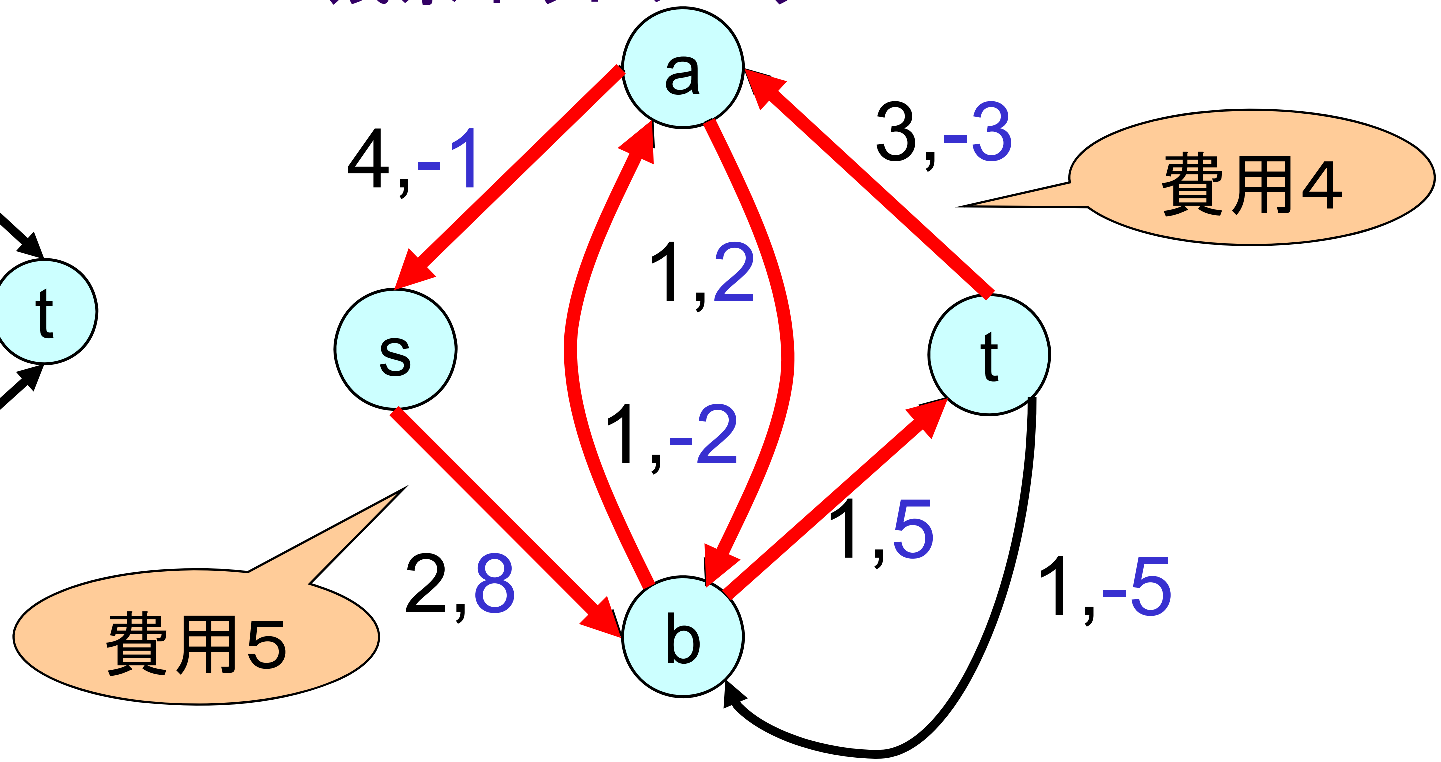
実は，定理1の逆も成り立つ（証明は省略）

定理２： 現在のフローは費用最小でない
⇒　残余ネットワークに費用が負の閉路が存在

修正後のフロー



残余ネットワーク

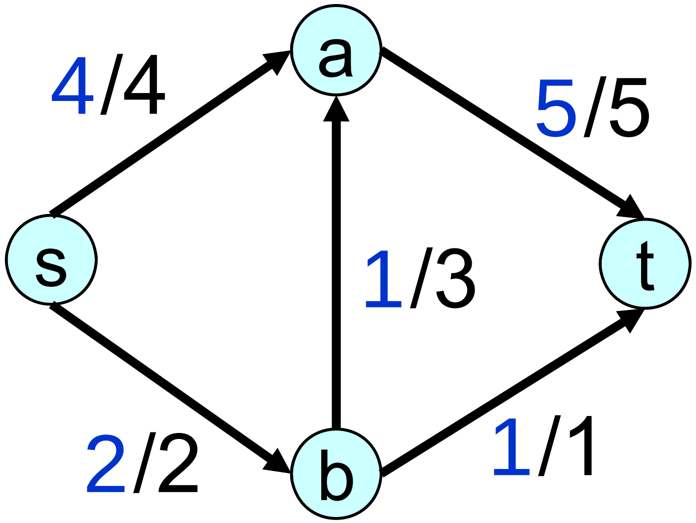


費用が負の閉路がない　⇒　現在のフローは費用最小

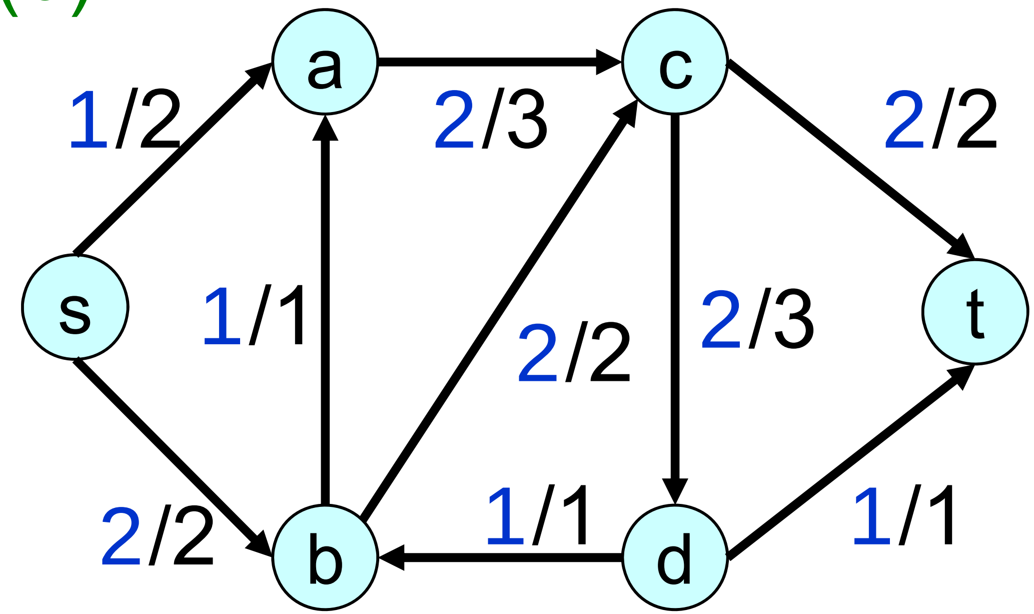
演習問題

問１：下記の図は，最大流問題およびその最大フローを表す．
これらのフローに対し，残余ネットワークを書きなさい．
また，授業でやったやり方に従って最小カットを求めよ

(a)

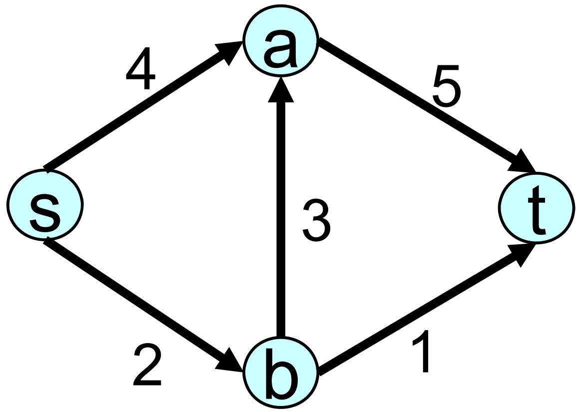


(b)



演習問題

問2： 次のネットワークにおいて，S={s, a}, T={b, t}としたときに，x(S, T) – x(T, S) = f が成り立つことを，下記の定式化を使って証明しなさい．



最大化　f

条件
$$
\begin{aligned}
& x_{sa} + x_{sb} = f \\
& x_{at} - x_{sa} - x_{ba} = 0 \\
& x_{ba} + x_{bt} - x_{sb} = 0 \\
& -x_{at} - x_{bt} = -f \\
& 0 \le x_{sa} \le 4,\ 0 \le x_{sb} \le 2,\ 0 \le x_{ba} \le 3, \\
& 0 \le x_{at} \le 5,\ 0 \le x_{bt} \le 1
\end{aligned}
$$

問3： 右のネットワークにおいて，最小カットが({s,b,d}, {t,a,c}) となるように，各枝の容量を設定しなさい．（全部の枝の容量を0とするのは不可）