

# 数理手法III (数理最適化)第5回

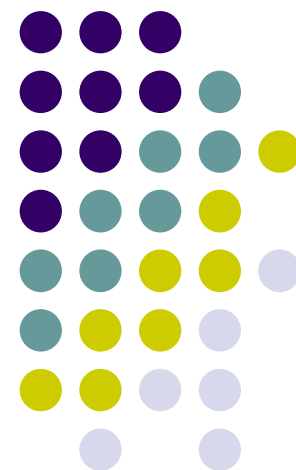
## 二段階単体法

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

[shioura.a.aa@m.titech.ac.jp](mailto:shioura.a.aa@m.titech.ac.jp)

<http://www.me.titech.ac.jp/~shioura/shioura/teaching/TUmp17/index.html>





## 今後の予定

- 11/1 第6回目 --- 組合せ最適化その1
- 11/8 第7回目 --- 中間試験
- 11/15 第8回目 --- ネットワーク最適化その1

# 中間試験について

- 日時: 11月8日(木) 13:05~14:35
- 場所: 工2号館 212講義室 (授業の部屋)
- 手書きのA4用紙一枚のみ持ち込み可 (印刷やコピーは不可)
  - これも採点の対象, 試験終了後に回収します
- 教科書, ノート等の持ち込みは不可
- 座席はこちらで指定
- 試験内容: 11/1 (第6回目) までの講義で教えたところ
  - 様々な数理計画モデル
  - 線形計画問: 標準形, 単体法, 各種定理
  - 組合せ最適化: 分枝限定法
- 50点満点, 20点以下は不合格

# 単体法の問題点

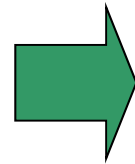


- 反復回数は有限か？

**巡回(cycling)** — 同じ辞書が繰り返し現れること

- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

$$\begin{array}{l} \text{最小化} \quad -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{条件} \quad -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ \quad \quad -2x_1 \quad \quad -4x_3 \geq -4 \\ \quad \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$



$$\begin{array}{l} z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 = -3 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 = 4 - 2x_1 \quad \quad -4x_3 \end{array}$$

# 巡回の例



		$x_1$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	-1	2	-1
$x_4$	0	-2	1	-1
$x_5$	0	-3	-1	-1
$x_6$	0	5	-3	2

		$x_1$	$x_6$	$x_3$
$z$	0	$7/3$	$-2/3$	$1/3$
$x_4$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$
$x_5$	0	$-14/3$	$1/3$	$-5/3$
$x_2$	0	$5/3$	$-1/3$	$2/3$

		$x_1$	$x_6$	$x_4$
$z$	0	2	-1	-1
$x_3$	0	-1	-1	-3
$x_5$	0	-3	2	5
$x_2$	0	1	-1	-2

		$x_5$	$x_2$	$x_3$
$z$	0	$1/3$	$7/3$	$-2/3$
$x_4$	0	$2/3$	$5/3$	$-1/3$
$x_1$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$
$x_6$	0	$-5/3$	$-14/3$	$1/3$

		$x_5$	$x_2$	$x_4$
$z$	0	-1	-1	2
$x_3$	0	2	5	-3
$x_1$	0	-1	-2	1
$x_6$	0	-1	-3	-1

		$x_5$	$x_6$	$x_4$
$z$	0	$-2/3$	$1/3$	$7/3$
$x_3$	0	$1/3$	$-5/3$	$-14/3$
$x_1$	0	$-1/3$	$2/3$	$5/3$
$x_2$	0	$-1/3$	$-1/3$	$-1/3$



# 単体法と巡回

- 基底・非基底変数が決まると、辞書は一意に定まる
- 基底・非基底変数の組合せは有限個
  
- 単体法は辞書を繰り返し生成する
- 単体法が終了しない→辞書が無限に生成される
  - 同じ辞書が何回も現れる
  - 巡回が起こっている

注意: 巡回が起こっているときは  
目的関数値が変化しない

# 最小添字規則



ピボット演算のとき、

最小添字規則(smallest subscript rule)を適用

⇒ 有限反復で終了

基底に入る  
変数の候補

- ステップ1にて係数が負の非基底変数が複数存在

⇒ 添字最小のものを選択

基底から出る  
変数の候補

- ステップ2にて値が0に減少する基底変数が複数存在

⇒ 添字最小のものを選択

# 最小添字規則の適用例



入る変数の候補

$x_1$  はどれだけ増やせるか?

出る変数の候補

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
z	0	-1	2	-1
$x_4$	0	-2	1	-1
$x_5$	0	-3	-1	-1
$x_6$	0	5	-3	2

$$x_4: 0 \rightarrow 0 - 2\alpha$$

$$x_5: 0 \rightarrow 0 - 3\alpha$$

$$x_6: 0 \rightarrow 0 + 5\alpha$$

$\therefore \alpha$  は最大 0

そのとき  $x_4 = x_5 = 0$

注意:  $x_6$  は増加するので、  
出る変数の候補ではない!



# 最小添字規則の適用例(つづき)



入る変数の候補

出る変数の候補

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$z$	0	-1	2	-1
$x_4$	0	-2	1	-1
$x_5$	0	-3	-1	-1
$x_6$	0	5	-3	2

	$x_4$	$x_2$	$x_3$	
$z$	0	$1/2$	$3/2$	$-1/2$
$x_1$	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$
$x_5$	0	$3/2$	$-5/2$	$1/2$
$x_6$	0	$-5/2$	$-1/2$	$-1/2$

最適

	$x_4$	$x_2$	$x_1$	
$z$	0	1	1	1
$x_3$	0	-1	1	-2
$x_5$	0	1	-2	-1
$x_6$	0	-2	-1	1



## 2段階単体法

### 単体法の問題点

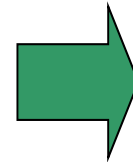
- 初期辞書が許容でない場合はどうする？

最小化  $-2x_1 - x_2$

条件  $-2x_1 - x_2 \geq 3$

$$-2x_1 + 3x_2 \geq -4$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$



$$z = 0 - 2x_1 - x_2$$

$$x_3 = -3 - 2x_1 - x_2$$

$$x_4 = 4 - 2x_1 + 3x_2$$

実は実行不可能なLP

基底解(0,0,-3,4)は  
許容解でない

- そもそも、LPの実行可能、不可能はどうやって判定する？

# 2段階単体法の流れ



- 任意のLPに適用可、実行可能性も判定
- 単体法を2回使用

## 1段階目: 実行可能性の判定

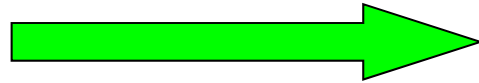
- **補助問題**を作成
  - 単体法を適用、元の問題の実行可能性を調べる
    - 許容解をもたない⇒終了
    - 許容解をもつ⇒許容辞書を出力、2段階目へ

## 2段階目: 非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

# 補助問題の作り方

元の問題



補助問題

人工変数

最小化  $c_1x_1 + \dots + c_nx_n$   
条件  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$   
...  
 $a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$   
 $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

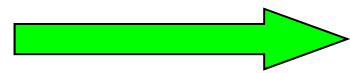
最小化  $x_a$   
条件  $a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_a \geq b_1$   
...  
 $a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n + x_a \geq b_m$   
 $x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_a \geq 0$

- 大きな  $x_a$  に対して  $(x_1, \dots, x_n, x_a)$  は許容解
- 元の問題が実行可能  $\Leftrightarrow$  補助問題の最適値 = 0
- $(x_1, \dots, x_n)$ : 元の問題の許容解  
 $\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_n, 0)$ : 補助問題の許容解



# 補助問題の解き方(その1)

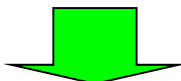
元問題



補助問題

最小化  $-x_1 - 2x_2$   
条件  $-x_1 - x_2 \geq -1$   
 $x_1 + x_2 \geq 1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

最小化  $x_a$   
条件  $-x_1 - x_2 + x_a \geq -1$   
 $x_1 + x_2 + x_a \geq 1$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_a \geq 0$



初期辞書

$$\begin{aligned} z_a &= && x_a \\ z &= && -x_1 - 2x_2 \\ x_3 &= 1 &- x_1 &- x_2 + x_a \\ x_4 &= -1 &+ x_1 &+ x_2 + x_a \end{aligned}$$

元問題の目的関数も追加

負の値なので許容辞書ではない



# 補助問題の解き方(その2)



許容でない初期辞書

→ ピボット演算により許容辞書へ

$$z_a = 0 \quad x_a$$

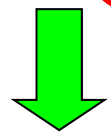
$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 1 - x_1 - x_2 + x_a$$

$$x_4 = -1 + x_1 + x_2 + x_a$$

- 非基底変数  $x_a$  を基底に入れる
- 基底変数の式の定数項を比較
- 定数項最小の基底変数を

基底から出す



$x_a$  と  $x_4$  を入れ替え

⇒ 許容辞書が得られる

$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

# 補助問題の解き方(その3)

許容辞書が得られた

→ 単体法で最適解を求める

係数が全て非負  
なので最適

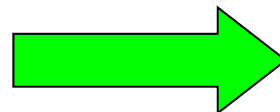
$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$x_1$  と  $x_a$  を  
入れ替え



$$z_a = 0 + x_a$$

$$z = -1 + x_a - x_2 - x_4$$

$$x_3 = 0 + 2x_a - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_a - x_2 + x_4$$

- 補助問題の最適値  $z_a = 0 \Rightarrow$  元問題は実行可能
- 現在の基底解  $(1, 0, 0, 0)$ : 元問題の許容解
- $x_a$  が非基底変数  
 $\Rightarrow$  最終辞書から  $x_a, z_a$  を削除すると元問題の許容辞書



# 補助問題の解き方(その4)



最終辞書で  $x_a$  が基底に入っている場合は？

係数が全て非負なので最適

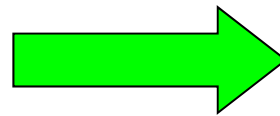
$$z_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$$z = 0 - x_1 - 2x_2$$

$$x_3 = 2 - 2x_1 - 2x_2 + x_4$$

$$x_a = 1 - x_1 - x_2 + x_4$$

$x_1$  と  $x_3$  を  
入れ替え



$$z_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

$$z = -1 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 - \frac{1}{2}x_4$$

$$x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_3 - x_2 + \frac{1}{2}x_4$$

$$x_a = 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4$$

元問題の許容辞書をどうやって求めるか？



# 補助問題の解き方(その5)



最適辞書において  $x_a$  が基底に入っている  
→ ピボット演算で  $x_a$  を基底から出す

$$\begin{aligned}z_a &= 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\z &= -1 + \frac{1}{2}x_3 - x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\x_1 &= 1 - \frac{1}{2}x_3 - x_2 + \frac{1}{2}x_4 \\x_a &= 0 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\end{aligned}$$

$x_3$  と  $x_a$  を  
入れ替え



$$\begin{aligned}z_a &= 0 + x_a \\z &= -1 + x_a - x_2 - x_4 \\x_1 &= 1 - x_a - x_2 + x_4 \\x_3 &= 0 + 2x_a - x_4\end{aligned}$$

$x_a$  が非基底にある

⇒  $x_a, z_a$  を削除すると  
元問題の許容辞書

係数が非ゼロの  
変数と  $x_a$  を入れ替え

$$\begin{aligned}z &= -1 - x_2 - x_4 \\x_1 &= 1 - x_2 + x_4 \\x_3 &= 0 - x_4\end{aligned}$$

# 2段階単体法の2段階目



1段階目で得られた許容辞書に  
単体法を適用

$$z = -1 - x_2 - x_4$$

$$x_1 = 1 - x_2 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

$x_2$  と  $x_1$  を  
入れ替え

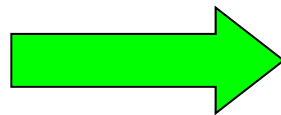


$$z = -2 + x_1 - 2x_4$$

$$x_2 = 1 - x_1 + x_4$$

$$x_3 = 0 - x_4$$

$x_4$  と  $x_3$  を  
入れ替え



$$z = -2 + x_1 + 2x_3$$

$$x_2 = 1 - x_1 - x_3$$

$$x_4 = 0 - x_3$$

最適解  $(0, 1, 0, 0)$  が得られた

# 2段階単体法の流れ



- 入力: 不等式標準形のLP

## 1段階目: 実行可能性の判定

- 補助問題に単体法を適用、

元問題の実行可能性を調べる

許容解をもたない ⇒ 終了

許容解をもつ ⇒ 許容辞書を出力、2段階目へ

## 2段階目: 非有界性判定、最適解の検出

- 1段階目で求めた許容辞書に単体法を適用

非有界 ⇒ 終了

有界 ⇒ 最適解を出力

∴ 実行可能で有界なLPは最適解をもつ(基本定理)

# 双対定理



定理2.3 (双対定理, duality theorem):

主問題または双対問題が最適解をもつ

⇒ 他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

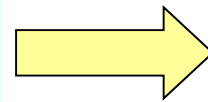
以下では、具体例を使って証明の流れを説明する

# 双対定理の証明(その1)



## 主問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} & -2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{条件} & -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\ & -2x_1 \quad - 4x_3 \geq -4 \\ & 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$



## 初期辞書

$$\begin{aligned} \text{最小化} & z \\ \text{条件} & z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ & x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ & x_5 = 4 - 2x_1 \quad - 4x_3 \\ & x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \\ & x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

## 双対問題

$$\begin{aligned} \text{最大化} & -4y_1 - 4y_2 - y_3 \\ \text{条件} & -2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2 \\ & -2y_1 \quad - 3y_3 \leq -1 \\ & y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- 主問題のスラック変数
  - 主問題の制約
  - 双対問題の変数
- の間の1対1対応
- $$\begin{aligned} x_4 & \leftrightarrow \text{第1制約} \leftrightarrow y_1 \\ x_5 & \leftrightarrow \text{第2制約} \leftrightarrow y_2 \\ x_6 & \leftrightarrow \text{第3制約} \leftrightarrow y_3 \end{aligned}$$

# 双対定理の証明(その2)



## 主問題

$$\begin{aligned}
 &\text{最小化} && -2x_1 - x_2 - x_3 \\
 &\text{条件} && -2x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\
 &&& -2x_1 \quad \quad - 4x_3 \geq -4 \\
 &&& 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq -1 \\
 &&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

## 初期辞書

$$\begin{aligned}
 &\text{最小化} && z \\
 &\text{条件} && z = 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
 &&& x_4 = 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
 &&& x_5 = 4 - 2x_1 \quad \quad - 4x_3 \\
 &&& x_6 = 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \\
 &&& x_1 \geq 0, \dots, x_6 \geq 0
 \end{aligned}$$

主問題の最適解は

$$x_1^* = 2, x_2^* = 0, x_3^* = 0, \text{最適値} = -4$$

## 最終辞書

$$\begin{aligned}
 z &= -4 + \boxed{(3/5)}x_4 + \boxed{(1/5)}x_2 + \boxed{(2/5)}x_5 \\
 x_1 &= 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5 \\
 x_3 &= 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5 \\
 x_6 &= 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 x_4 & & x_5 & & x_6 \\
 \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
 y_1^* = \frac{3}{5}, & y_2^* = \frac{2}{5}, & y_3^* = 0
 \end{array}$$

が双対問題の許容解,  
目的関数値 = -4

となることを示せば証明終了(弱双対定理の系より)



# 双対定理の証明(その3)

$$\begin{array}{c} x_4 \\ \updownarrow \\ y_1^* = \frac{3}{5}, y_2^* = \frac{2}{5}, y_3^* = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} x_5 \\ \updownarrow \\ y_4^* = 0, y_5^* = \frac{1}{5}, y_6^* = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} x_6 \\ \updownarrow \\ y_6^* = 0 \end{array}$$

が双対問題の許容解,  
目的関数値 = -4

となることを示す

最終辞書

$$\begin{aligned} z &= -4 + \boxed{\frac{3}{5}}x_4 + \boxed{\frac{1}{5}}x_2 + \boxed{\frac{2}{5}}x_5 \\ x_1 &= 2 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_2 - \frac{1}{10}x_5 \\ x_3 &= 0 + \frac{1}{5}x_4 + \frac{2}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_5 \\ x_6 &= 9 - \frac{7}{5}x_4 - \frac{29}{5}x_2 - \frac{3}{5}x_5 \end{aligned}$$

最終辞書なので,  
zの式の係数は非負  
→  $y_i^*$  はすべて非負

zの式の右辺を書き換える

$$\begin{aligned} z &= -4 + (y_1^*x_4 + y_5^*x_2 + y_2^*x_5) + (y_4^*x_1 + y_6^*x_3 + y_3^*x_6) \\ &= -4 + y_4^*x_1 + y_5^*x_2 + y_6^*x_3 + y_1^*x_4 + y_2^*x_5 + y_3^*x_6 \end{aligned}$$



# 双対定理の証明(その4)

## 最終辞書

$$\begin{aligned} z &= -4 + y_4^*x_1 + y_5^*x_2 + y_6^*x_3 + y_1^*x_4 + y_2^*x_5 + y_3^*x_6 \\ x_1 &= 2 - (2/5)x_4 - (4/5)x_2 - (1/10)x_5 \\ x_3 &= 0 + (1/5)x_4 + (2/5)x_2 - (1/5)x_5 \\ x_6 &= 9 - (7/5)x_4 - (29/5)x_2 - (3/5)x_5 \end{aligned}$$

$(x_1, x_2, \dots, x_6, z)$ は  
最終辞書の解  $\leftrightarrow$  初期辞書の解

## 初期辞書

$$\begin{aligned} z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\ x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \end{aligned}$$

初期辞書の4つの式を  
最終辞書のzの式に代入



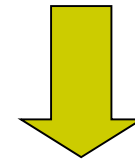
# 双対定理の証明(その5)



## 最終辞書の z の式

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ \text{右辺} &= -4 + \{y_1^*(4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3) \\ &\quad + y_2^*(4 - 2x_1 - 4x_3) \\ &\quad + y_3^*(1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3)\} \\ &\quad + (y_4^* x_1 + y_5^* x_2 + y_6^* x_3) \\ &= (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*) \\ &\quad + (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*)x_1 \\ &\quad + (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*)x_2 \\ &\quad + (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*)x_3 \end{aligned}$$

この式は恒等式,  
任意の $x_1, x_2, x_3$ に対して成り立つ  
→ 両辺の各項の  
係数, 定数は等しい



$$\begin{aligned} 0 &= (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*) \\ -2 &= (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*) \\ -1 &= (y_5^* - 2y_1^* - 3y_3^*) \\ -1 &= (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*) \end{aligned}$$

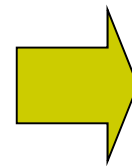
# 双対定理の証明(その6)



$$0 = (-4 + 4y_1^* + 4y_2^* + y_3^*) \quad \longrightarrow \quad -4y_1^* - 4y_2^* - y_3^* = -4$$

双対問題において  
 $(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ の目的関数値 = -4

$$\begin{aligned} -2 &= (y_4^* - 2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^*) \\ -1 &= (y_5^* - 2y_1^* \quad \quad - 3y_3^*) \\ -1 &= (y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^*) \end{aligned}$$



$y_4^*, y_5^*, y_6^*$ は非負なので

$$\begin{aligned} -2 &\geq -2y_1^* - 2y_2^* + 4y_3^* \\ -1 &\geq -2y_1^* \quad \quad - 3y_3^* \\ -1 &\geq y_6^* + y_1^* - 4y_2^* + y_3^* \end{aligned}$$

$(y_1^*, y_2^*, y_3^*)$ は  
双対問題の許容解

最大化  $-4y_1 - 4y_2 - y_3$   
条件  $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$   
 $-2y_1 \quad \quad - 3y_3 \leq -1$   
 $y_1 - 4y_2 + y_3 \leq -1$   
 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$

双対定理の証明終わり

# 今日の演習問題



問1: 右の辞書に最小添字規則を適用して解きなさい。

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	
$z$	0	-1	2	-1
$x_4$	6	-2	2	0
$x_5$	3	-1	-1	2
$x_6$	3	-1	-1	-1

問2: 次の線形計画問題を二段階単体法で解きなさい。

(a) 最小化  $-3x_1 - 2x_2$   
条件  $2x_1 - x_2 \geq -1$   
 $-x_1 + 2x_2 \geq 4$   
 $-x_1 - x_2 \geq -2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(b) 最小化  $-3x_1 - 2x_2$   
条件  $2x_1 - x_2 \geq -1$   
 $-x_1 + 2x_2 \geq 0$   
 $x_1 + x_2 \geq 2$   
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$