

レポート問題

問1: 系3. 2を証明せよ.

(証明の例) x は主問題の許容解, y は双対問題の許容解であって,

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad \textcircled{1}$$

が成り立つと仮定する.

まず, x が主問題の最適解であることを示すために, 任意の主問題の許容解 x' に対して,

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n c_j x_j' \quad \textcircled{2}$$

が成り立つことを証明する.

x' と y に対して弱双対定理を適用すると,

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j' \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i \quad \textcircled{3}$$

が成り立つ. 式③と式①より, 不等式②が導かれる.

つぎに, y が双対問題の最適解であることを示すために, (以下略)



レポート問題

問2: 下記の2つのLPの双対問題を求めなさい.

また, それぞれの双対問題が

(a)最適解をもつ, (b)非有界, (c)実行不可能
のいずれに当てはまるか, 調べなさい(理由も書くこと)

最小化 $x + 2y$

条件 $-x - y \geq -3$

$x, y \geq 0$

(a)最適解をもつ

最大化 $-3z$

条件 $-z \leq 1$

$-z \leq 2$

$z \geq 0$

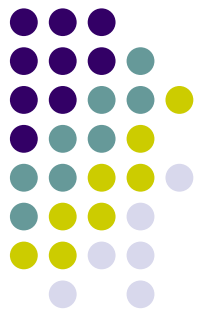
(a)最適解をもつ

理由1:

z の範囲は0以上なので, $z = 0$ が最適解である.

理由2:

この問題は許容解をもち, 目的関数値は3以下なので有界である. よってLPの基本定理より最適解が存在する.



レポート問題

問2: 下記の2つのLPの双対問題を求めなさい.

また, それぞれの双対問題が

(a)最適解をもつ, (b)非有界, (c)実行不可能
のいずれに当てはまるか, 調べなさい(理由も書くこと)

最小化 $x + 2y$

条件 $-x - y \geq 1$

$x, y \geq 0$

(c)実行不可能

最大化 z

条件 $-z \leq 1$

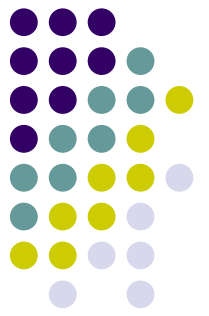
$-z \leq 2$

$z \geq 0$

(b)非有界

理由: 任意の非負値 α に対し, $z = \alpha$ とおくと
これは許容解である.

よって $z = \alpha$ を無限に大きくすることができる
ので, このLPは非有界である.



レポート問題

問3: 右の線形計画問題について考える.

(a) [P] の双対問題[D]を書きなさい.

[P]	最小化	$-2x_1$	$-x_2$	$+x_3$		最大化:	$-4y_1 - 4y_2 + 2y_3$
	条件	$-2x_1$	$-2x_2$	$+x_3$	≥ -4	条件:	$-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leq -2$
		$-2x_1$		$-4x_3$	≥ -4		$-2y_1 - 3y_3 \leq -1$
		$4x_1$	$-3x_2$	$+x_3$	≥ 2		$y_1 - 4y_2 + y_3 \leq 1$
		$x_1 \geq 0,$	$x_2 \geq 0,$	$x_3 \geq 0$			$y_1, y_2, y_3 \geq 0$

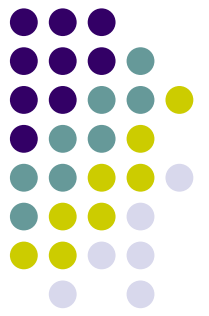
(b) [P]と[D]に対する相補性条件をすべて(具体的に)書きなさい.

$$(-2x_1 - 2x_2 + x_3 - (-4))y_1 = 0, \quad (-2x_1 - 4x_3 - (-4))y_2 = 0$$

$$(4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2)y_3 = 0$$

$$(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 - (-2))x_1 = 0, \quad (-2y_1 - 3y_3 - (-1))x_2 = 0$$

$$(y_1 - 4y_2 + y_3 - 1)x_3 = 0$$



レポート問題

問3: 右の線形計画問題について考える.

(c) [P] の最適解のひとつは $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$ である.

相補性定理を使って, 双対問題[D]の最適解をすべて計算しなさい. 計算の過程も書くこと.

(答え) 双対問題の最適解は, $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$ を代入したときの相補性条件と, 双対問題の制約条件を満たす (y_1, y_2, y_3) 全てである.

相補性条件に $x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$ を代入すると

$$0 \cdot y_1 = 0, \quad 0 \cdot y_2 = 0, \quad 6y_3 = 0,$$

$$(-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 - (-2)) \cdot 2 = 0, \quad (-2y_1 - 3y_3 - (-1)) \cdot 0 = 0$$

$$(y_1 - 4y_2 + y_3 - 1) \cdot 0 = 0$$

よって $y_3 = 0, y_1 + y_2 = 1$ が成り立つ.

また, 双対問題の制約条件より,

$$-2y_1 \leq -1, \quad y_1 - 4y_2 \leq 1, \quad y_1, y_2 \geq 0$$

整理すると, $(y_1, 1 - y_1, 0), 0.5 \leq y_1 \leq 1$ これが[D]の最適解全体