数理手法（数理最適化）第3回

線形計画問題の諸定理
単体法

塩浦昭義

東京工業大学 経営工学系 准教授

shiouras.a.aa@m.titech.ac.jp

URL変更しました

http://www.me.titech.ac.jp/~shioura/shioura/teaching/TUmp17/index.html

復習：主問題と双対問題

主問題(primal problem)

最小化：$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

条件：$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

双対問題(dual problem)

最大化：$b_1y_1 + \cdots + b_my_m$

条件：$a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1$

$$\vdots$$

$$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$$

主問題の i 番目の不等式
$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$

⇔ 対応 ⇔

双対問題の i 番目の変数
$y_i \geq 0$

主問題の j 番目の変数
$x_j \geq 0$

⇔ 対応 ⇔

双対問題の j 番目の不等式
$a_{1j}y_1 + \cdots + a_{mj}y_m \leq c_j$

実行可能, 実行不可能

定義：不等式標準形のLPに対し

- 実行可能(feasible)⇔許容解（実行可能解）が存在する
- 実行不可能(infeasible)⇔許容解（実行可能解）が存在しない

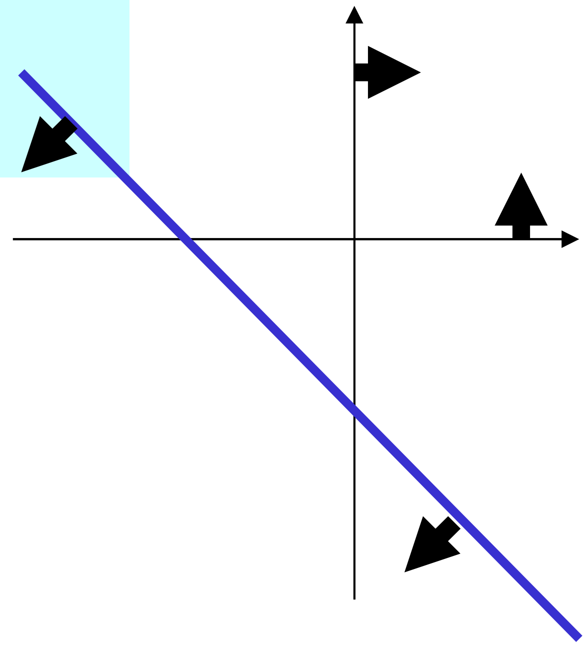
最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq -3$
　　　$x, y \geqq 0$

実行可能

（1，1）は許容解

最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq 1$
　　　$x, y \geqq 0$

実行不可能



有界, 非有界

定義：実行可能なLPは（最小化の場合)

- 有界(bounded)
  ⇔任意の許容解の目的関数値がある定数より大きい
- 非有界(unbounded)⇔目的関数値をいくらでも小さく出来る

最小化	$x + 2y$
条件	$-x - y \geqq -3$
	$x, y \geqq 0$

有界

目的関数値≧0

最小化	$-x - y$
条件	$x + y \geqq 0$
	$x, y \geqq 0$

非有界

任意の$\alpha > 0$に対し(α, α)は許容解

目的関数値＝-2α

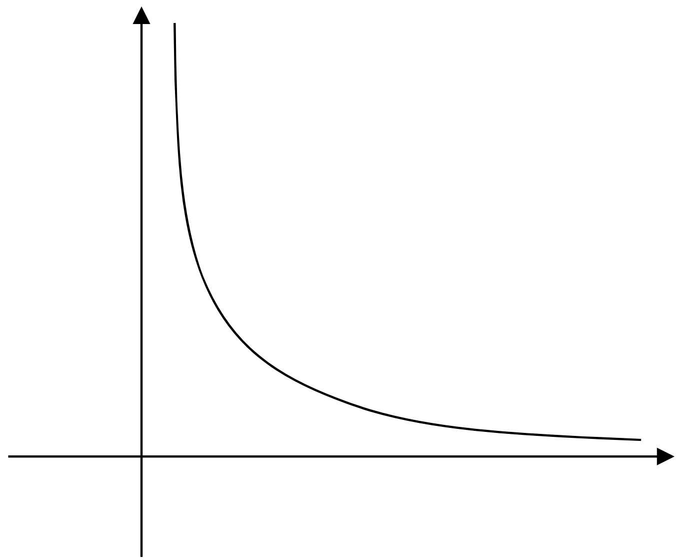
線形計画問題の諸定理

LPの基本定理

定理３．１（基本定理, fundamental theorem）
任意のLPに対し、
実行可能かつ有界　⇒　最適解が存在

※非線形計画の場合は成り立つとは限らない！

最小化　y
条件　$xy \geqq 1$
$x, y \geqq 0$



最適値＝０
でも $y = 0$ なる許容解はない

弱双対定理

定理3．2(弱双対定理, weak duality theorem):

x: 主問題の許容解, **y**: 双対問題の許容解

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

主問題の目的関数値　　　双対問題の目的関数値

弱双対定理の証明

シグマの順番
を換える

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件

$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n \geqq b_2$

…

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最大化　$b_1y_1+\cdots+b_my_m$

条件

$a_{11}y_1+\cdots+a_{m1}y_m \leqq c_1$

$a_{12}y_1+\cdots+a_{m2}y_m \leqq c_2$

…

$a_{1n}y_1+\cdots+a_{mn}y_n \leqq c_n$

$y_1 \geqq 0, \ldots, y_m \geqq 0$

弱双対定理の系

系3．1
主問題が非有界　⇒　双対問題は実行不可能
双対問題が非有界　⇒　主問題は実行不可能

証明: 対偶 （双対 : 実行可能⇒主 : 有界） を示す

双対問題が実行可能と仮定

y: 双対問題の許容解、 $\alpha = \sum b_i y_i$

弱双対定理より、主問題の任意の許容解 **x** に対し

$$\sum c_j x_j \geqq \alpha \qquad \therefore \quad \text{主問題は有界}$$

弱双対定理の系

系３．２
x: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解，
$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ を満たす
⇒ **x**: 主問題の最適解、**y**: 双対問題の最適解

証明→レポート問題

弱双対定理（定理３．２）を使って証明すること

弱双対定理の系

例3．3

最小化 $-2x_1 - x_2 - x_3$

条件 $-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0$

最大化 $-4y_1 - 4y_2 - y_3$

条件 $-2y_1 - 2y_2 + 4y_3 \leqq -2$

$-2y_1 - 3y_3 \leqq -1$

$y_1 - 4y_2 + y_3 \leqq -1$

$y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0,\ y_3 \geqq 0$

$x = (2, 0, 0)$: 許容解　　$y = (3/5, 2/5, 0)$: 許容解

$$-2 \times 2 - 0 - 0 = -4 = -4 \times (3/5) - 4 \times (2/5) - 0$$

⇒　系3．2より、 x, y はそれぞれ最適解

双対定理

定理３．３（双対定理, duality theorem）:
主問題または双対問題が最適解をもつ
⇒　他方も最適解をもち、かつ最適値が一致する

証明 → 後日

主問題と双対問題の答えの組合せ

			双対問題		
			実行可能		実行不可能
			最適解	非有界	
主問題	実行可能	最適解	○ （双対定理）	× （系３．１）	× （双対定理）
主問題	実行可能	非有界	× （系３．１）	× （系３．１）	○ （系３．１）
主問題	実行不可能		× （双対定理）	○ （系３．１）	○

相補性定理(complementarity slackness theorem)

定理3．4：

$\mathbf{x}$: 主問題の許容解，$\mathbf{y}$: 双対問題の許容解

$\mathbf{x}$ および $\mathbf{y}$ は最適解

$\Updownarrow$

相補性条件
(complementarity slackness condition)

各 j = 1, ..., n について

$\sum_i a_{ij} y_i \leqq c_j$ と $x_j \geqq 0$ のどちらかは等号成立

各 i = 1, ..., m について

$\sum_j a_{ij} x_j \geqq b_i$ と $y_i \geqq 0$ のどちらかは等号成立

相補性定理の証明

x: 主問題の許容解　　　**y**: 双対問題の許容解

x、**y**　は最適解

⇕

$\sum_i a_{ij} y_i = c_j$　または　$x_j = 0$　($\forall j = 1, 2, \ldots, n$)

$\sum_j a_{ij} x_j = b_i$　または　$y_i = 0$　($\forall i = 1, 2, \ldots, m$)

証明:　弱双対定理の証明より

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) y_i \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

x、yが最適　⇔　最初の項＝最後の項

⇔　$(\sum_i a_{ij} y_i) x_j = c_j x_j$, $(\sum_i a_{ij} x_j) y_i = b_i y_i$　⇔　相補性

線形計画問題の解法

2変数の線形計画問題

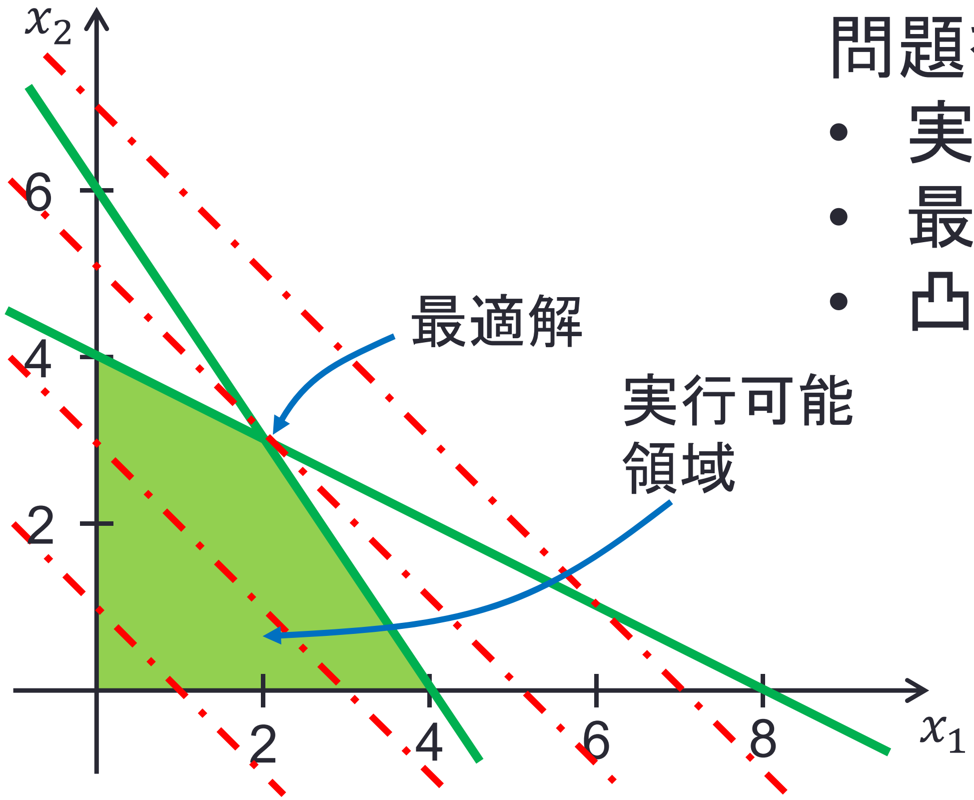
例題

目的関数: $-x_1 - x_2 \quad \rightarrow$ 最小化

制約条件: $3x_1 + 2x_2 \leq 12$

$x_1 + 2x_2 \leq 8$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$



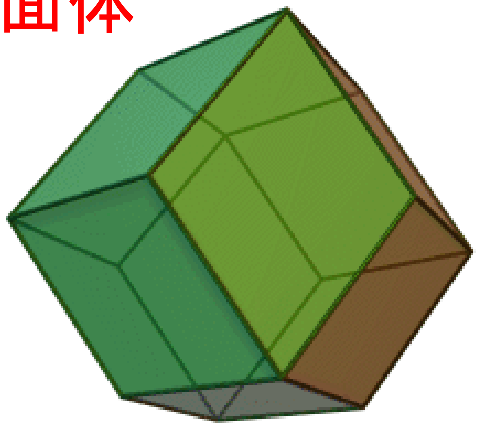
問題を図示してわかること

- 実行可能領域は平面上の凸多角形
- 最適解は凸多角形の境界に位置
- 凸多角形の頂点の1つは最適解

実行可能領域と最適解の性質

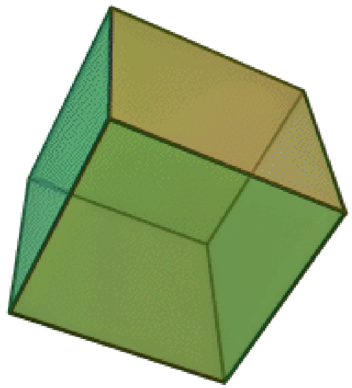
- 一般の n 変数の線形計画問題の場合
  - 実行可能領域は, n 次元実数空間における凸多面体
  - 凸多面体の頂点の中に, 必ず最適解が存在

➔ 最適解を見つけるには, 実行可能領域の
頂点を全て調べればよい！



http://en.wikipedia.org/wiki/
Image:Rhombicdodecahedron.gif

- 単純なやり方で頂点を調べると, 指数時間が必要
  - 超立方体の場合, 頂点の数は 2^n 個
- 効率的に頂点を調べて最適解を見つける方法
  - シンプレックス法（単体法）



http://upload.wikimedia.org/wikipedia
/commons/4/48/Hexahedron.gif

シンプレックス法

- 線形計画問題の最適解を求めるアルゴリズム
- G. B. Dantzig (1947)が提案
- 「ピボット操作」により，「基底解」を繰り返し更新して，最適解を求める

- 今日の残りの内容：シンプレックス法の説明のための準備
  - 基底解の説明
  - ピボット演算の説明

辞書(その1)

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化　$c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

条件　$a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1$

$\cdots$

$a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0$

最小化　z

条件　$z = 0 \quad + \; c_1x_1+\cdots+c_nx_n$

$x_{n+1} = -b_1 + a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n$

$\cdots$

$x_{n+m} = -b_m + a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_n \geqq 0,$

$x_{n+1} \geqq 0, \ldots, x_{n+m} \geqq 0$

この等式制約のみで

問題を表現できる　→　**辞書(dictionary)**

辞書(その2)

問題の変形

不等式標準形　⇒　一種の等式標準形

最小化　$-2x_1 - x_2 - x_3$

条件　$-2x_1 - 2x_2 + x_3 \geqq -4$

$-2x_1 - 4x_3 \geqq -4$

$4x_1 - 3x_2 + x_3 \geqq -1$

$x_1 \geqq 0, x_2 \geqq 0, x_3 \geqq 0$

最小化　z

条件

$$\boxed{\begin{aligned} z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\ x_5 &= 4 - 2x_1 - 4x_3 \\ x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3 \end{aligned}}$$

$x_1 \geqq 0, \ldots, x_6 \geqq 0$

辞書

辞書に関する用語

$$
\begin{aligned}
z &= \ \ 0 \quad + c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \\
x_{n+1} &= -b_1 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\
&\cdots \\
x_{n+m} &= -b_m + a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

非基底変数
(nonbasic variable)
右辺の変数

基底変数(basic variable): 左辺に表れる変数

基底解(basic solution): 非基底変数を0としたときの解

（許容とは限らない）

$$
\begin{aligned}
z &= 0 - 2x_1 - x_2 - x_3 \\
x_4 &= 4 - 2x_1 - 2x_2 + x_3 \\
x_5 &= 4 - 2x_1 \qquad\ \ - 4x_3 \\
x_6 &= 1 + 4x_1 - 3x_2 + x_3
\end{aligned}
$$

⇒ 基底解は(0,0,0,4,4,1)

基底解と非基底変数の関係

非基底変数の選び方に応じて，基底解は変わる
変数は n 個，非基底変数は n-m個
➔非基底変数の組合せは $_nC_{n-m}$ 個➔ $_nC_{n-m}$ 個の基底解

$$
\boxed{
\begin{aligned}
z &= \qquad\; -x_1 - x_2 \\
x_3 &= 12 - 3x_1 - 2x_2 \\
x_4 &= 8 \quad - x_1 \; - 2x_2
\end{aligned}
}
$$

2ページ目の
例題を
等式標準形
にしたもの

等式 m = 2 個，変数 n = 4 個
➔ $_4C_2$ = 4x3/2 = 6 個の基底解

基底x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)
基底x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)
基底x_2, x_4 非基底 x_1, x_4: (0,6,0,−4)
基底x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)
基底x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)
基底x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)

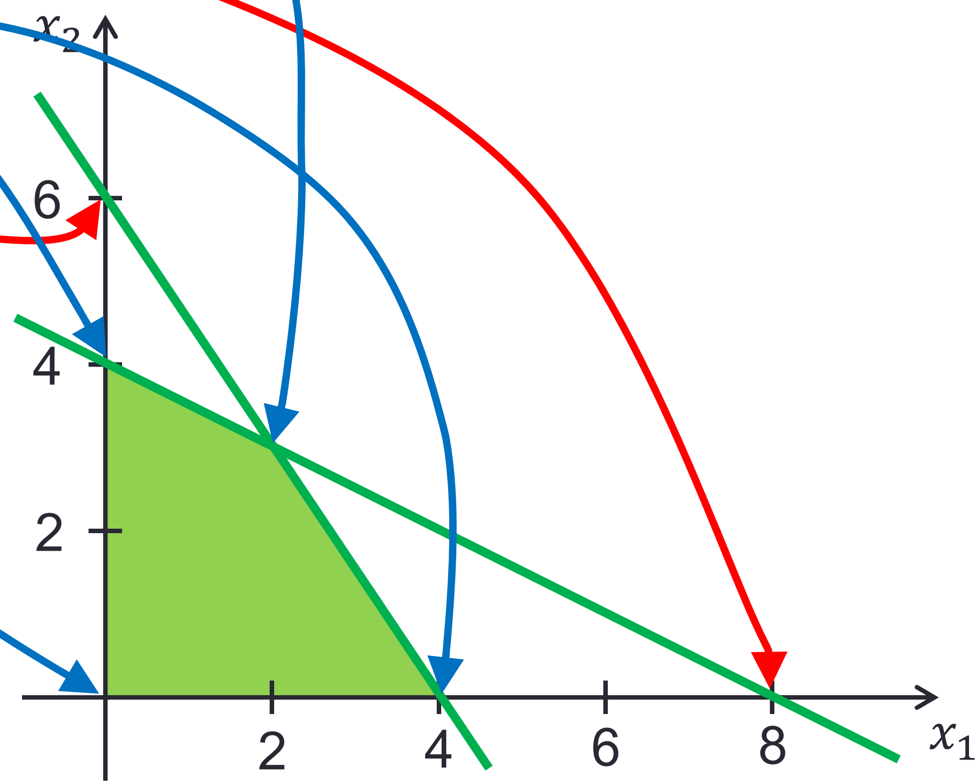
２つは実行不可能，残りは実行可能

基底解と頂点の関係

実行可能な基底解は，実行可能領域の頂点に対応している
➔ 実行可能な基底解の中に，必ず最適解が存在する

最適基底解: 最適な基底解のこと

基底 x_1, x_2 非基底 x_3, x_4: (2,3,0,0)
基底 x_1, x_3 非基底 x_2, x_4: (8,0, −12,0)
基底 x_1, x_4 非基底 x_2, x_3: (4,0,0,4)
基底 x_2, x_3 非基底 x_1, x_4: (0,4,4,0)
基底 x_2, x_4 非基底 x_1, x_3: (0,6,0,−4)
基底 x_3, x_4 非基底 x_1, x_2: (0,0,12,8)



レポート問題

問１：系３．２を証明せよ.

問２：下記の２つのLPの双対問題を求めなさい.

また，それぞれの双対問題が

　(a)最適解をもつ，(b)非有界，(c)実行不可能

のいずれに当てはまるか，調べなさい（理由も書くこと）

最小化　$x + 2y$	最小化　$x + 2y$
条件　$-x - y \geqq -3$	条件　$-x - y \geqq 1$
$x, y \geqq 0$	$x, y \geqq 0$

レポート問題

問3：右の線形計画問題について考える.

(a) [P] の双対問題[D]を書きなさい.

(b) [P]と[D]に対する相補性条件をすべて（具体的に）書きなさい.

(c) [P] の最適解のひとつは$x_1 = 2, x_2 = x_3 = 0$である.
　相補性定理を使って，双対問題[D]の最適解をすべて計算しなさい．計算の過程も書くこと.

$$
[\mathrm{P}] \left|
\begin{array}{lrrrl}
\text{最小化} & -2x_1 & -x_2 & +x_3 & \\
\text{条件} & -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & \geq -4 \\
 & -2x_1 & & -4x_3 & \geq -4 \\
 & 4x_1 & -3x_2 & +x_3 & \geq 2 \\
 & \multicolumn{4}{c}{x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0}
\end{array}
\right.
$$

レポート問題

問１：系３．2を証明せよ.

系３．２

x: 主問題の許容解，**y**: 双対問題の許容解，

$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ が成り立つ

⇒ **x**: 主問題の最適解、**y**: 双対問題の最適解