問 1：

［1］以下で述べられた問題を数理計画問題として定式化せよ．定式化の際には，**1 つ 1 つの式が何を意味するのか，簡単に説明せよ**．なお，**問題の最適解を求める必要はない**．また，定式化して得られた問題が線形計画問題，ネットワーク最適化問題，非線形計画問題，整数計画問題の何れに当てはまるかを述べると共に，**その理由**を簡単に説明せよ．

問題の記述：ヨーロッパのとあるワイン製造会社では，3 種類のぶどう G1，G2，G3 を原材料として，赤，白，ロゼの 3 種類のワインを生産している．各ワインを 1 樽（たる）分だけ生産することによって得られる利益と，1 樽分を生産するために必要なぶどうの量は表の通りである．ただし，各々のぶどうの最大供給量は決まっており，G1 は 4 トン，G2 は 8 トン，G3 は 6 トンとなっている．このとき，総利益を最大にするような各ワインの生産量を決定せよ．なお，生産量は樽の個数で表し，その個数は整数とする．

ワインの種類	1 樽分を生産するのに必要なぶどうの量（単位：トン）			1 樽当りの利益（単位：1 万ユーロ）
	G1	G2	G3	
赤	2	1	0	4
白	0	0	3	6
ロゼ	1	2	1	3

［2］0-1 ナップサック問題を分枝限定法で解いている過程で，下記の部分問題(A)，(B)，(C) が出てきた場合について考える．

［2-1］部分問題(A)，(B)，(C)に対する緩和問題（連続ナップサック問題）の**最適解とその目的関数値**を求めよ．答えのみ書けば良い．

［2-2］部分問題(A)，(B)，(C)が出てきた時点で，**目的関数値が 30 の暫定解**が得られているとする．このとき，［2-1］の結果をふまえて，各々の部分問題に対して分枝操作と限定操作のどちらを適用すべきか答えよ．**また，その理由を詳しく書くこと**．

(A) 最大化 $7x_1 + 10x_2 + 27x_3 + 8x_4$
条件 $x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 \le 7$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

(B) 最大化 $10x_1 + 9x_2 + 13x_3 + 4x_4$
条件 $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 10$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

(C) 最大化 $7x_1 + 9x_2 + 18x_3 + 5x_4$
条件 $x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 \le 7$
$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}$

問 2： 右の線形計画問題について考える．

［1］この問題に対して単体法を使って最適解を求めよ．ただし，**最小添字規則を使う**とともに，**各反復で用いた辞書やピボット演算で入れ替えた変数**を明記すること．
（ヒント：初期辞書は許容辞書である）

［2］この問題の実行可能領域（実行可能解全体の集合）を図示せよ．また，［1］の単体法の計算過程で得られた基底解が，図示した実行可能領域のどの点に対応するか，説明せよ．

［3］この問題の双対問題を書け．また，相補性条件を全て書け．

［4］**相補性条件を利用**して，双対問題の**最適解をすべて**計算せよ．

最小化 $-x_1 - x_2$
条件
$$-x_1 \ge -1$$
$$-2x_1 - x_2 \ge -3$$
$$-x_2 \ge -1$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

問 3：二段階単体法を使って，下記の線形計画問題(a)，(b)が実行可能解をもつか否かを判定したい．

[1] これらの問題に対する補助問題を書け．結果のみ書けば良い．

[2] **二段階単体法を使って，これらの問題が実行可能解をもつか否か判定せよ**．実行可能解をもつ場合には，**元の問題の初期辞書**を求めなさい．**計算の過程も省略せずに書く**こと．

(a) 最小化 $7x_1 + 5x_2$

条件
$$-x_1 - x_2 \geq 1$$
$$-2x_1 - x_2 \geq 2$$
$$-x_1 - 2x_2 \geq -3$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

(b) 最小化 $x_1 + 3x_2$

条件
$$2x_1 + 2x_2 \geq 2$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 + 2x_2 \geq -1$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

問 4：

次の線形計画問題の主問題(P)と双対問題(D)を考える．

(P) 最小化： $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$

条件：
$$a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$
$$x_1 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0$$

(D) 最大化： $b_1y_1 + \cdots + b_my_m$

条件：
$$a_{11}y_1 + \cdots + a_{m1}y_m \leq c_1$$
$$\vdots$$
$$a_{1n}y_1 + \cdots + a_{mn}y_m \leq c_n$$
$$y_1, y_2,\ \ldots,\ y_m \geq 0$$

[1] 線形計画問題の弱双対定理とは，次のような定理である．

> 主問題(P)の任意の実行可能解 $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ と双対問題(D)の任意の実行可能解 $(y_1, y_2, \ldots,\ y_m)$ に対して，
> $$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n \geq b_1y_1 + \cdots + b_my_m$$
> が成り立つ．

弱双対定理を用いて，以下の命題を**証明せよ**：

主問題(P)の任意の実行可能解 $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ と双対問題(D)の任意の実行可能解 $(y_1, y_2, \ldots,\ y_m)$ に対して，

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = b_1y_1 + \cdots + b_my_m$$

が成り立つならば，$(y_1, y_2, \ldots,\ y_m)$ は双対問題(D)の最適解である．

[2] **双対問題が非有界となるような線形計画問題**の具体例を一つ書きなさい．ただし，変数は 2 つ，制約（変数の非負条件は除く）の数は 2 つとすること．なお，その具体例に対し，双対問題が非有界となることを説明すること．

[3] 双対問題(D)を不等式標準形に書き直せ．**どのように書き直したのか，説明すること**．

[4] 上記の[3]で得られた線形計画問題に対し，その双対問題を書け．結果のみ書けば良い．
また，得られた問題と，主問題(P)との関係を説明せよ．