# 2017 年度 数理手法 III 期末試験問題 [50 点満点]

2018 年 1 月 17 日(水) 13 時 05 分～14 時 35 分 (90 分)

**※ 解答用紙全てに名前，学籍番号等を書くこと.**

**※ 解答用紙の裏面に記入してもよいが，その場合は，**

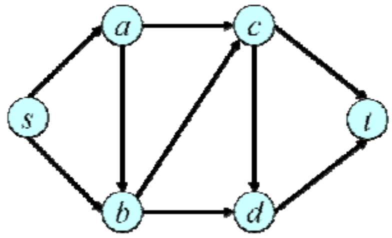
**解答用紙右上の[裏面に記入]の [有] に○を付けること**

**※ 問１から問４まである．それぞれ，別の用紙に解答を書くこと.**

**※ A4 用紙を持ち込んでいる場合には，名前と学籍番号を書いて**

**提出すること.**

**問 1：** 右図のネットワークに関する最大流問題を考える．ただし，各枝 $(i,j)$ の容量を $u_{ij}$ とし，頂点 $s$ がソース，頂点 $t$ がシンクを表す．



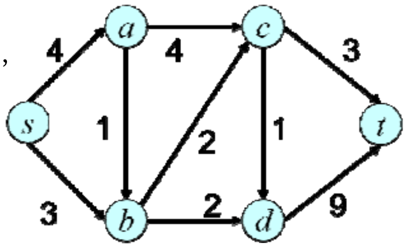

[1] この最大流問題の定式化における，**流量保存条件の式**をすべて書け．**ソース $s$，シンク $t$ における流量保存条件**も書くこと．ただし，枝 $(i,j)$ のフローを表す変数は $x_{ij}$，総流量を表す変数は $f$ とする．

[2] 頂点集合 $S=\{s,b,d\}$ から $T=\{a,c,t\}$ に向かう枝のフローの合計値$x(S,T)$，頂点集合 $T$ から $S$に向かう枝のフローの合計値 $x(T,S)$，および総流量 $f$ の関係を数式により示せ．また，その関係式を，小問[1]で示した**流量保存条件の式を使って証明**せよ．

[3] このネットワークにおけるフロー $\left(x_{ij} \,\middle|\, (i,j) \in E\right)$，およびそのフローに関する残余ネットワークを考える．残余ネットワークにおいて，ソース $s$ からパスにより到達可能な頂点集合が $S=\{s,b,d\}$ により与えられるとき，**頂点集合 $S$ から$T=\{a,c,t\}$ に向かう各枝のフローの値**，および**頂点集合 $T$ から $S$ に向かう各枝のフローの値**を記述せよ．また，そのように記述できる**理由を説明**せよ．

[4] 小問[3]におけるフロー $\left(x_{ij} \,\middle|\, (i,j) \in E\right)$ がこのネットワークの最大フローであることを証明せよ．小問[2]，[3] の結果を使ってもよい．

[5] 各枝$(i,j)$の容量 $u_{ij}$ が右図のように与えられたとする．このネットワークの最大フローを，**増加路アルゴリズム**を用いて計算せよ．なお，**各反復におけるフロー，残余ネットワーク，および利用した増加路を明記**すること．




[6] 小問[5]の結果をふまえ，右図のネットワークの最小カットを計算せよ．どのようにして計算したか，**簡単に説明する**こと．

**問 2：** 最小費用流問題の入力が，有向グラフ $G=(V,E)$，各頂点 $i \in V$ の需要・供給量 $b_i$，各枝 $(i,j)$ の容量 $u_{ij}$ および費用 $c_{ij}$ により与えられたとする．あるフロー $\left(x_{ij} \,\middle|\, (i,j) \in E\right)$ が費用最小であるための必要十分条件として，以下の条件(a)が知られている．

| |
|---|
| 条件(a) --- 以下の(i)，(ii)，(iii) を満たすポテンシャル $(p_i \mid i \in V)$ が存在する： |
| (i) $c_{ij}-p_i+p_j>0$ なる枝 $(i,j)$ に対し，$x_{ij}=0$ が成り立つ． |
| (ii) $c_{ij}-p_i+p_j<0$ なる枝 $(i,j)$ に対し，$x_{ij}=u_{ij}$ が成り立つ． |
| (iii) $0<x_{ij}<u_{ij}$ なる枝$(i,j)$ に対し，$c_{ij}-p_i+p_j=0$ が成り立つ． |

[1] フロー $\left(x_{ij} \,\middle|\, (i,j) \in E\right)$ に対して条件(a)が成り立つとき，そのフローに関する残余ネットワークに負閉路（費用が負の閉路）が存在しないことを証明せよ．

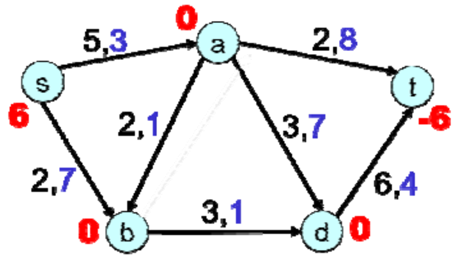
[2] フロー $\left(x_{ij} \,\middle|\, (i,j) \in E\right)$ に対して条件(a)が成り立つとき，そのフローが最小費用フローであることを証明せよ．証明では，以下の命題を用いてもよい．

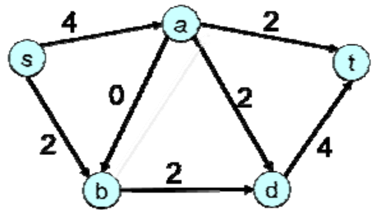
**命題**：各枝 $(i,j)$ に対し $c'_{ij}=c_{ij}-p_i+p_j$ とおく．このとき，任意のフロー $\left(y_{ij} \,\middle|\, (i,j) \in E\right)$ に対し，$\sum_{(i,j)\in E} c'_{ij}\, y_{ij} = \sum_{(i,j)\in E} c_{ij}\, y_{ij} - \sum_{k\in V} p_k\, b_k$ という関係が成り立つ．

（問 2 は次のページにつづく）

**問 2（つづき）**

ここからは右上図の最小費用流問題について考える．各枝に付随する数字は「枝容量，枝費用」，各頂点に付随する数字は「供給・需要量」を表す．




[3] この最小費用流問題の最小費用フローを，**負閉路消去アルゴリズム**を用いて求めよ．ただし，**右下図のフローを初期フロー**とすること．なお，**各反復におけるフロー，残余ネットワーク，および利用した負閉路を明記**すること．

[4] 小問[3]で得られた最小費用フローに対し，条件(a)を満たすポテンシャルをひとつ求めよ．**結果のみ書けばよい**．また，求めたポテンシャルが条件(a)を満たしていることを確認すること．

[5] この最小費用流問題の許容解（フロー）を求める問題は，ある最大流問題に帰着することができる．どのような最大流問題に帰着できるのか，説明すると共に，そのように**帰着できる理由**を述べよ．

**問 3：** $n$ 変数関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について考える．

[1] 関数 $f$ が凸関数であることの定義を書け．

[2] ベクトル $x^* \in \mathbb{R}^n$ が関数 $f$ の極小解であることの定義を書け．

[3] 関数 $f$ は凸関数であるとする．このとき，ベクトル $x^* \in \mathbb{R}^n$ が関数 $f$ の極小解ならば，$x^*$ は関数 $f$ の最小値を実現する（つまり，任意のベクトル $y \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(y) \geq f(x^*)$ を満たす）．このことを証明せよ．

[4] 関数 $f$ は一変数（つまり $n=1$）の凸関数であるとし，変数を $x$ とする．このとき，関数 $f(x)$ に 2 次関数 $g(x) = x^2 + bx + c$（$b, c$ は定数）を加えて得られる関数 $h(x) = f(x) + g(x)$ が凸関数になることを，**定義に基づいて**証明せよ．

**問 4：** 関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について考える． $f$ は 2 階微分可能な関数とする

[1] ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\nabla f(x) \neq 0$ ならば，$f\bigl(x + \delta \nabla f(x)\bigr) > f(x)$ を満たす十分小さい正の実数 $\delta$ が存在する．これを証明せよ．（ヒント：不等号の向きに注意）

[2] ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ は任意のベクトル $y \in \mathbb{R}^n$ に対して $f(y) \leq f(x^*)$ を満たすとする．このとき，ベクトル $x$ は停留点であることを証明せよ．小問[1]で述べた性質を使ってもよい．

[3] ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$は関数 $f$ の停留点とする．$x$ が関数 $f$ の極小解であるための**十分条件**および**必要条件**を述べよ．いずれも「ヘッセ行列」および「正定値（半正定値）」という用語を使うこと．なお，**証明を書く必要はない**．

以下では関数 $f(x,y) = 2x^2 - 4xy + y^4 - \frac{8}{3}y^3 - 4y^2$ について考える．

[4] 関数 $f$ の**勾配ベクトル** $\nabla f(x,y)$ と**ヘッセ行列** $\mathrm{H}f(x,y)$ を計算せよ．

[5] **最急降下方向**および**ニュートン方向**の定義を書け．さらに，関数 $f$ の$(x,y) = (-1,0)$ における**最急降下方向**および**ニュートン方向**を計算せよ．

[6] 関数 $f$ の停留点をすべて計算せよ．

[7] 各停留点が極小解か否かを判定し，その理由を書け．小問[3]**で述べた条件を使うこと**.