学習・研究用テキスト 内点法 (4A)

パス追跡インフィージブル内点法

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 11 月 9 日

概要

線形計画問題の主双対問題を解くインフィージブル内点法は，Lustig et al. [2] により実用的なアルゴリズムとして提案され，Kojima, Megiddo, and Mizuno [1] により大域的な収束性が示された．その後，Zhang [6] と Mizuno [3] が多項式オーダのインフィージブル内点法を提案している．ここでは，Mizuno [3] に従い，多項式オーダのパス追跡インフィージブル内点法を説明する．

目次

1 パス追跡インフィージブル内点法

多項式オーダのパス追跡インフィージブル内点法を Mizuno [3] に従い説明する．まずはじめに，パス追跡インフィージブル内点法を説明し，中心パスの広い近傍を使った場合に，問題を解くのに必要とする反復回数が $O(n^2L)$ となることを示す．その後，中心パスの狭い近傍を使った場合に，問題を解くのに必要とする反復回数が $O(nL)$ となることを示す．実行可能な初期内点を使う場合には，広い近傍を使うパス追跡法の反復回数が $O(nL)$ 反復であり，狭い近傍を使うとき $O(\sqrt{n}L)$ であるので，インフィージブル内点法の場合には，理論的にはその場合よりも多くの反復回数を必要とすることになる．

1.1 アルゴリズム

m と n を正の整数とし，$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$，m 次元ベクトル $\boldsymbol{b}$，n 次元ベクトル $\boldsymbol{c}$ に対して，標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

が与えられているとする．行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m であるとする．上の問題に対する主双対問題は，条件

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

を満たす変数ベクトル $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を求める問題である．ここで，$\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$ は，ベクトル $\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^T$ に対して，$\boldsymbol{X}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x}$ を満たす対角行列である．この問題において，相補性条件 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ 以外の条件をすべて満たす点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を実行可能解といい，すべての条件を満たす点を最適解と呼ぶ．この主双対問題の任意の最適解を $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ とすれば，$\boldsymbol{x}^*$ は線形計画問題 (1) の最適解であり，$(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ はその双対問題の最適解である．

上の主双対問題 (2) の最適解を数値的に求めるのであるが，厳密に等号制約を満たす解を求めることは困難である．そこで，十分小さい正の数 $\epsilon_P > 0$，$\epsilon_D > 0$，$\epsilon > 0$ に対して，条件

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\| \leq \epsilon_P, \|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{c}\| \leq \epsilon_D, \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} \leq \epsilon \tag{3}$$

を満たす解を求めれば十分であるとする．また，十分大きな正の数 $\rho > 0$ に対して，

$$\|(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{z}^*)\|_\infty \leq \rho \tag{4}$$

をみたす最適解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ が存在するならばそのような解を求め，さもなければ，それをみたす最適解が存在しないことを判定できれば十分であるとする．理論的には，線形計画問題の大きさを L とするとき，ϵ_P，ϵ_D，ϵ を 2^{-L} 程度まで小さくし，ρ を 2^L 程度まで大きくすれば十分である．また，最適解は等式条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}$ を満たすので，ある

$$\rho_0 \geq \min\{\|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})\|_\infty | \boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{c}\} \tag{5}$$

に対して，$\rho \geq \rho_0$ であるとする．上の不等式 (5) を満たす ρ_0 の値を具体的に計算することは難しくなく，たとえば，$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{w}' = \boldsymbol{c}$ に対して，

$$\rho_0 = \|(\boldsymbol{u}', \boldsymbol{w}')\|_\infty$$

とすることができる．

パス追跡法を説明するために，解析的中心と中心パスについて説明する．主双対問題の解析的中心は，パラメータを $\mu > 0$ とするとき，方程式系

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \mu\boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{6}$$

の解である．主双対問題 (2) に実行可能内点が存在すれば，任意の $\mu > 0$ に対して解析的中心が唯一つ存在する．それを $(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ とすれば，解析的中心の集合

$$P_1 = \{(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu)) | \mu > 0\} \tag{7}$$

は, なめらかなパスとなり, 中心パスと呼ばれる．$\mu \to 0$ のとき, 中心パス上の点 $(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ は，最適解の集合上の一点 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ に収束し，この $\boldsymbol{x}^*$ は問題 (1) の最適解となる．したがって，十分小さな $\mu > 0$ に対して，解析的中心の近似点を求めることにより，線形計画問題 (1) を解くことができる．解析的中心と中心パスについて，より詳しくは，例えば水野 [5] を参照すること．

条件 $\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}$ を満たすとき，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を主双対問題 (2) の内点という．初期内点を $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ とする．インフィージブル内点法の最大の特徴は，この初期点として任意の (実行不能な) 内点を選ぶことができることである．ここでは，定数 $\gamma_0 \in (0, 1]$ に対して，初期点を

$$\boldsymbol{x}^0 = \gamma_0 \rho \boldsymbol{e}, \boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}^0 = \gamma_0 \rho \boldsymbol{e}$$

とし，

$$\mu_0 = (\boldsymbol{x}^0)^T \boldsymbol{z}^0 / n = \gamma_0^2 \rho^2$$

とする．

内点法では，初期内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ から実行可能内点の列 $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ を生成する．したがって，第 k 反復目の内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ が得られていると仮定し，次の内点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ の求め方を示す．パラメータ $\mu > 0$ の値を定め，現在の点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，解析的中心を定義する方程式系 (6) にニュートン法を適用したときの方向を $(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y}, \Delta \boldsymbol{z})$ とする．一般に，方程式系 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ に対する点 $\bar{\boldsymbol{u}}$ でのニュートン方向 $\Delta \boldsymbol{u}$ は，線形方程式系 $\nabla \boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{u}}) \Delta \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{u}})$ の解である．したがって，方向 $(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y}, \Delta \boldsymbol{z})$ は線形方程式系

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A} \Delta \boldsymbol{x} = -(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{A}^T \Delta \boldsymbol{y} + \Delta \boldsymbol{z} = -(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c}) \\ \boldsymbol{Z}_k \Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{X}_k \Delta \boldsymbol{z} = \mu \boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k \end{array} \tag{8}$$

の解である．この方程式系を解くことにより，ニュートン方向 $(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y}, \Delta \boldsymbol{z})$ は，順に

$$\begin{array}{rcl} \Delta \boldsymbol{y} & = & -(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{A}^T)^{-1} \\ & & \Big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-1}(\mu \boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k) + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k(\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c})\Big) \\ \Delta \boldsymbol{z} & = & -\boldsymbol{A}^T \Delta \boldsymbol{y} - (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c}) \\ \Delta \boldsymbol{x} & = & -\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k \Delta \boldsymbol{z} + \mu \boldsymbol{Z}_k^{-1} \boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}^k \end{array} \tag{9}$$

と表すことができる．現在の点からその方向にステップサイズ α 進み，次の点

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{y}^{k+1} \\ \boldsymbol{z}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^k + \alpha \Delta \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}^k + \alpha \Delta \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}^k + \alpha \Delta \boldsymbol{z} \end{pmatrix} \tag{10}$$

を求める．

次にステップサイズ α の値を決めるために，中心パス P_1 と初期点を含む近傍を導入する．定数 $\beta \in (0, 1)$ に対して，

$$N_1(\beta) = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}\| \geq \mu_0 \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|, \\ \mu \|\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}\| \geq \mu_0 \|\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{c}\|, \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z} \geq (1 - \beta)\mu \boldsymbol{e},\ \mu = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{z}/n, \boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{z} > 0 \end{array} \right\}$$

を定義する．明らかに，初期点と中心パスは．この近傍に含まれる．

以上の議論をまとめれば，アルゴリズムは次のようになる．

アルゴリズム 1.1 主双対パス追跡インフィージブル内点法は，次のステップから成る．

ステップ 0 $\rho > 0$，$\epsilon_P > 0$，$\epsilon_D > 0$，$\epsilon > 0$，$\gamma_0 > 0$，$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$，$\beta \in (0,1)$ とする．初期内点を $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0) = \gamma_0\rho(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{e})$，$\mu_0 = (\boldsymbol{x}^0)^T \boldsymbol{z}^0/n = \gamma_0^2\rho^2$，$\theta_0 = 1$，$k = 0$ とする．

ステップ 1 条件

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}\| \le \epsilon_P, \|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c}\| \le \epsilon_D, (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \le \epsilon \tag{11}$$

が成立したならば，$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ を近似解として，終了する．また，条件 $\theta_k > 0$ と

$$\|(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k)\|_1 > \frac{1+\gamma_0}{\gamma_0^2\theta_k\rho}(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \tag{12}$$

が成立したならば，最適解が存在しないとして，終了する．

ステップ 2 内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，パラメータ $\mu = \gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$ として，方程式系 (8) の解 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を (9) により計算する．

ステップ 3 ステップサイズ $\hat{\alpha}$ を，任意の $\alpha \in [0, \hat{\alpha}]$ に対して

$$\begin{gathered}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} \in N_1(\beta) \\ (\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) \le (1 - \alpha(1-\gamma_2))(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k\end{gathered}$$

が成立する最大の値 (あるいはその近似値) とする．$\alpha = \hat{\alpha}$ として，次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を (10) により求め，$\theta_{k+1} = (1-\alpha)\theta_k$ とする．k を 1 増加して，ステップ 1 へ行く．

ステップサイズの決め方から，このアルゴリズムで生成されるすべての点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ は，近傍 $N_1(\beta)$ 上にある．次の節では，ステップサイズに下界が存在することを示し，多項式オーダの反復回数でアルゴリズムが終了することを示す．

1.2 中心パスの広い近傍を使う場合

アルゴリズム 1.1 について，次の結果が成り立つことを示す．

定理 1.2 γ_0，γ_1，γ_2，β が線形計画問題のデータと無関係な定数であるとする．

$$L' = \max\{\log((\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0/\epsilon), \log(\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}\|/\epsilon_P), \log(\|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}\|/\epsilon_D\}$$

とすれば，アルゴリズム 1.1 は，$O(n^2L')$ の反復で終了する．また，ステップ 1 の後半の条件 (12) で終了した場合には，

$$\|(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{z}^*)\|_\infty \le \rho \tag{13}$$

をみたす主双対問題 (2) の最適解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ が存在しない．

線形計画問題の大きさを L とするとき，ρ を 2^L 程度とし，$\epsilon_P > 0$，$\epsilon_D > 0$，$\epsilon > 0$ を 2^{-L} 程度にすれば，線形計画問題が解けるので，$L' = O(L)$ であり，アルゴリズム 1.1 の反復回数は，$O(n^2L)$ である．

この節を通して，上記の定理 1.2 を証明する．はじめに，次の補題の結果を得る．

補題 1.3 アルゴリズム 1.1 の各反復で

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^{k+1} + \boldsymbol{z}^{k+1} - \boldsymbol{c}) = (1-\alpha)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c}) \tag{14}$$

と

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c}) = \theta_k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}) \tag{15}$$

が成り立ち

$$(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \geq \theta_k(\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0 \tag{16}$$

である．

証明 式 (8) より

$$\begin{array}{rcl}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{b} & = & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b} \\ & = & (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) + \alpha\boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} \\ & = & (1-\alpha)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b})\end{array}$$

となり，同様に

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^{k+1} + \boldsymbol{z}^{k+1} - \boldsymbol{c} = (1-\alpha)(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c})$$

となるので，式 (14) が成立する．

式 (15) は，$\theta_0 = 1$ であるから，$k = 0$ のとき明らかに成り立つので，k のときに成り立つと仮定する．このとき，式 (14) より

$$\begin{array}{rcl}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{b} & = & (1-\alpha)(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}) \\ & = & (1-\alpha)\theta_k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}) \\ & = & \theta_{k+1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b})\end{array}$$

と

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^{k+1} + \boldsymbol{z}^{k+1} - \boldsymbol{c} = (1-\alpha)(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c}) = \theta_{k+1}(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{c})$$

が成立し，$k+1$ のときも式 (15) が成立する．したがって，帰納法によりすべての k に対して式 (15) が成立する．

また，$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in N_1(\beta)$，$\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$，$\mu_0 = (\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0/n$ より，

$$(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}\| \geq (\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}\|$$

であるが，これと式 (15) より，式 (16) が導かれる．▮

補題 1.4 アルゴリズム 1.1 の第 k 反復で

$$|\Delta x_i\Delta z_i - (1-\beta)\frac{\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}}{n}| \leq \eta \text{ and } |\,\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}| \leq \eta \tag{17}$$

ならば

$$\hat{\alpha} \geq \alpha^* = \min\left\{1, \frac{\beta\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n\eta}, \frac{\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{\eta}, \frac{(\gamma_2-\gamma_1)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{\eta}\right\} \tag{18}$$

である．

証明 α の 2 次関数 f_i $(i=1,2,\cdots,n)$，g_P，g_D，h を

$$\begin{aligned}
f_i(\alpha) &= (x_i^k+\alpha\Delta x_i)(z_i^k+\alpha\Delta z_i)-(1-\beta)\frac{1}{n}(\boldsymbol{x}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{z})\\
g_P(\alpha) &= (\boldsymbol{x}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{z})\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}\|-n\mu^0\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{x})-\boldsymbol{b}\|\\
g_D(\alpha) &= (\boldsymbol{x}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{z})\|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0+\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{c}\|\\
&\quad -n\mu^0\|\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{y}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{z})-\boldsymbol{c}\|\\
h(\alpha) &= (1-\alpha(1-\gamma_2))(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k-(\boldsymbol{x}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{z})
\end{aligned}$$

と定義する．これらの関数が $\alpha\in[0,\hat{\alpha}]$ に対して 0 以上となるような最大の $\hat{\alpha}$ がアルゴリズム 1.1 のステップ 2 で計算されるステップサイズである．なお，$\boldsymbol{x}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{x}>0$ かつ $\boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{z}>0$ は，f_i がすべて 0 以上であることと f_i の第 2 項 $(\boldsymbol{x}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{z})$ が正であることから導くことができる．したがって，任意の $\alpha\in[0,\alpha^*]$ に対して，上の関数がすべて 0 以上となることを示せば，補題の結果が得られる．

まずはじめに，式 (8) と $\mu=\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$ より，

$$\begin{aligned}
(x_i^k+\alpha\Delta x_i)(z_i^k+\alpha\Delta z_i) &= x_i^kz_i^k+\alpha(z_i^k\Delta x_i+x_i^k\Delta z_i)+\alpha^2\Delta x_i\Delta z_i\\
&= x_i^kz_i^k+\alpha\left(\gamma_1\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n}-x_i^kz_i^k\right)+\alpha^2\Delta x_i\Delta z_i\\
&= (1-\alpha)x_i^kz_i^k+\alpha\gamma_1\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n}+\alpha^2\Delta x_i\Delta z_i
\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{z}) &= \textstyle\sum_{i=1}^n\left((1-\alpha)x_i^kz_i^k+\alpha\gamma_1\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n}+\alpha^2\Delta x_i\Delta z_i\right)\\
&= (1-\alpha)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k+\alpha\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k+\alpha^2\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}
\end{aligned} \tag{19}$$

が得られる．したがって，条件式 (17) より，任意の $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ に対して

$$\begin{aligned}
f_i(\alpha) &= (1-\alpha)(x_i^kz_i^k-(1-\beta)\frac{(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{z}^k}{n})+\alpha\beta\gamma_1\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n}+\alpha^2(\Delta x_i\Delta z_i-(1-\beta)\frac{\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}}{n})\\
&\geq \alpha\beta\gamma_1\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n}-\eta\alpha^2
\end{aligned}$$

となる．ゆえに，(18) より $\alpha\in[0,\alpha^*]$ ならば $f_i(\alpha)\geq 0$ $(i\in\{1,2,\cdots,n\})$ となる．次に，補題 1.3 と上の式 (19) を使うと

$$\begin{aligned}
g_P(\alpha) &= \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}\|((1-\alpha)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k+\alpha\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k+\alpha^2\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z})-(1-\alpha)n\mu^0\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}\|\\
&= (1-\alpha)(\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}\|(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k-n\mu^0\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}\|)\\
&\quad +\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}\|\alpha(\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k+\alpha\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z})\\
&\geq \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}\|\alpha(\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k-\alpha\eta)
\end{aligned}$$

となるので，$\alpha \in [0, \alpha^*]$ ならば $g_P(\alpha) \geq 0$ となる．同様に，$\alpha \in [0, \alpha^*]$ ならば $g_D(\alpha) \geq 0$ となる．最後に，

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= (1-\alpha(1-\gamma_2))(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k - ((1-\alpha)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k + \alpha\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k + \alpha^2\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}) \\ &\geq \alpha(\gamma_2-\gamma_1)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k - \alpha^2\eta \end{aligned}$$

となるので，$\alpha \in [0, \alpha^*]$ ならば $h(\alpha) \geq 0$ となる． ∎

この節の後半で

$$\eta = O(n)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \tag{20}$$

に対して，補題の条件 (17) が成り立つことを示す．このとき，補題の結果から，ある $\delta > 0$ が存在し

$$\hat{\alpha} \geq \frac{\delta}{n^2}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned} &\theta_k \leq \theta_0 \prod_{i=0}^{k-1}(1-\hat{\alpha}) \leq \left(1-\frac{\delta}{n^2}\right)^k \\ &(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \leq (\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0 \prod_{i=0}^{k-1}(1-\hat{\alpha}(1-\gamma_2)) \leq \left(1-\frac{\delta(1-\gamma_2)}{n^2}\right)^k (\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0 \\ &(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k+\boldsymbol{z}^k-\boldsymbol{c}) = \theta_k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0+\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{c}) \end{aligned}$$

であるので，高々 $O(n^2L')$ の反復でアルゴリズム 1.1 の条件 (11) が成立する．ゆえに，定理 1.2 の前半が成り立つ．(定理の後半の結果は，この節の最後に示す．)

それでは，関係式 (20) が成り立つことを示す．そのために，次の補題を使う．

補題 1.5 アルゴリズム 1.1 の第 k 反復で

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{x} &= -\theta_k\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{u}) + \theta_k(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})D(\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-0.5}(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k-\mu\boldsymbol{e}) \\ \Delta\boldsymbol{y} &= -\theta_k(\boldsymbol{y}^0-\boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D} \\ &\quad \big(\theta_k\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{u}) + \theta_k\boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-0.5}(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k-\mu\boldsymbol{e})\big) \\ \boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{z} &= \theta_k\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{u}) - \theta_k(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})\boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{w}) - \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-0.5}(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k-\mu\boldsymbol{e}) \end{aligned}$$

が成立する．ただし，$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{X}_k^{0.5}\boldsymbol{Z}_k^{-0.5}$, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}^2\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}$ であり，$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{c}$ を満たす解である．

証明 補題にあるように，$(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を定めたとすれば，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}$ と $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{0}$ より

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{x} \\ &= -\theta_k\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{u}) \\ &= -\theta_k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{b}) \\ \boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{z} &= -\theta_k\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{y}^0-\boldsymbol{v}) - \theta_k(\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{w}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\theta_k(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0+\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{c}) \\
\boldsymbol{Z}_k\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z} &= (\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{0.5}(\boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{z}) \\
&= -(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{0.5}(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-0.5}(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k-\mu\boldsymbol{e}) \\
&= \mu\boldsymbol{e}-\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k
\end{aligned}
$$

となる．したがって，補題 1.3 より，$(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{z})$ は方程式系 (8) の解である．▌

行列 $\boldsymbol{Q}$ と $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q}$ は射影行列なので，上の補題より

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\| &\le \theta_k\|\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{u})\|+\theta_k\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{w})\|+\|(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-0.5}(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k-\mu\boldsymbol{e})\| \\
\|\boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{z}\| &\le \theta_k\|\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{u})\|+\theta_k\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{w})\|+\|(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-0.5}(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k-\mu\boldsymbol{e})\|
\end{aligned}
$$

が成立する．式 (5) より，$\|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})\|_\infty\le\rho_0$ と仮定でき，$\rho\ge\rho_0$ であるので

$$
-\rho\boldsymbol{e}\le\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{u}\le 2\rho\boldsymbol{e},\ -\rho\boldsymbol{e}\le\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{w}\le 2\rho\boldsymbol{e}
$$

となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\| &= \theta_k\|\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{x}^0-\boldsymbol{u})\|+\theta_k\|\boldsymbol{D}(\boldsymbol{z}^0-\boldsymbol{w})\|+\|(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-0.5}(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k-\mu\boldsymbol{e})\| \\
&\le 2\theta_k\rho\|\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{e}\|+2\theta_k\rho\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}\|+\sqrt{\sum_{i=1}^n((x_i^kz_i^k)^{0.5}-\mu(x_i^kz_i^k)^{-0.5})^2} \\
&= 2\theta_k\rho(\|(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-0.5}\boldsymbol{z}^k\|+\|(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-0.5}\boldsymbol{x}^k\|) \\
&\quad+\sqrt{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k-2n\mu+\mu^2\sum_{i=1}^n(x_i^kz_i^k)^{-1}}
\end{aligned}
$$

が得られる．$\theta_k>0$ であると仮定すると，

$$
\begin{aligned}
&x_i^kz_i^k\ge(1-\beta)\tfrac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n} \\
&\mu=\gamma_1\tfrac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n} \\
&\|(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{z}^k)\|\le\|(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{z}^k)\|_1\le\tfrac{1+\gamma_0}{\gamma_0^2\theta_k\rho}(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k
\end{aligned}
$$

であるので，

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\| &\le 4\theta_k\rho\left((1-\beta)\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n}\right)^{-0.5}\frac{1+\gamma_0}{\gamma_0^2\theta_k\rho}(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \\
&\quad+\sqrt{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k-2\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k+\frac{\gamma_1^2(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{1-\beta}} \\
&= \left(\frac{4(1+\gamma_0)\sqrt{n}}{\sqrt{1-\beta}\gamma_0^2}+\sqrt{1-2\gamma_1+\frac{\gamma_1^2}{1-\beta}}\right)\sqrt{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}
\end{aligned}
$$

となる．$\theta_k=0$ の場合には，$(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{z}^k)$ が実行可能解なので，上の不等式において右辺の第 1 項がないものを得ることができる．したがって，$\|\boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\|$ の大きさは $O(\sqrt{n})\sqrt{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}$ となり，同様に $\|\boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{z}\|$ の大きさも $O(\sqrt{n})\sqrt{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}$ となる．ゆえに，$|\Delta x_i\Delta z_i|$ と $|(\Delta\boldsymbol{x})^T\Delta\boldsymbol{z}|$ の大きさが $O(n)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k$ となるので，関係式 (20) が得られる．

この節の最後に，定理の後半の結果を示す．

補題 1.6 アルゴリズム 1.1 がステップ 1 の後半の条件

$$\|(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k)\|_1 > \frac{1+\gamma_0}{\gamma_0^2\theta_k\rho}(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k$$

により終了した場合には,

$$\|(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{z}^*)\|_\infty \leq \rho \tag{21}$$

をみたす主双対問題 (2) の最適解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ が存在しない.

証明 背理法で証明するために, $\|(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{z}^*)\|_\infty \leq \rho$ をみたす主双対問題 (2) の最適解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ が存在することを仮定する. 式 (15) より,

$$\boldsymbol{A}(\theta_k\boldsymbol{x}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^k) = \theta_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} + \theta_k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b})) = 0$$

が成立し, 同様に

$$\boldsymbol{A}^T(\theta_k\boldsymbol{y}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{y}^* - \boldsymbol{y}^k) + (\theta_k\boldsymbol{z}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{z}^* - \boldsymbol{z}^k) = 0$$

が成立する. したがって,

$$(\theta_k\boldsymbol{x}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}^k)^T(\theta_k\boldsymbol{z}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{z}^* - \boldsymbol{z}^k) = 0$$

となる. これより

$$\begin{aligned}
&(\theta_k\boldsymbol{x}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{z}^k + (\theta_k\boldsymbol{z}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{z}^*)^T\boldsymbol{x}^k \\
&= (\theta_k\boldsymbol{x}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{x}^*)^T(\theta_k\boldsymbol{z}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{z}^*) + (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k
\end{aligned}$$

を得る. この等式, $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{z}^0 = \gamma_0\rho\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{x}^* \leq \rho\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{z}^* \leq \rho\boldsymbol{e}$, $x_i^*z_i^* = 0$ $(i \in \{1, 2, \cdots, n\})$ を使えば

$$\begin{aligned}
\theta_k\gamma_0\rho\|(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k)\|_1 &= \theta_k((\boldsymbol{z}^0)^T\boldsymbol{x}^k + (\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^k) \\
&\leq (\theta_k\boldsymbol{x}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{x}^*)^T\boldsymbol{z}^k + (\theta_k\boldsymbol{z}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{z}^*)^T\boldsymbol{x}^k \\
&= (\theta_k\boldsymbol{x}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{x}^*)^T(\theta_k\boldsymbol{z}^0 + (1-\theta_k)\boldsymbol{z}^*) + (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \\
&\leq n\theta_k\gamma_0\rho^2 + (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k
\end{aligned}$$

が得られる. ここで, 補題 1.3 より, $(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \geq \theta_k(\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0 = n\theta_k\gamma_0^2\rho^2$ であるから, 上の不等式より

$$\theta_k\gamma_0\rho\|(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k)\|_1 \leq \frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{\gamma_0} + (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k$$

となるが, これは補題の条件に矛盾する. ▌

1.3 中心パスの狭い近傍を使う場合

前節で反復回数が $O(n^2L)$ となることを示したパス追跡インフィージブル内点法は, 中心パスの広い近傍を使っており, 初期点が実行可能な場合には, 反復回数が $O(nL)$ となる. 一方, 実行可能な初期点を使うパス追跡法は, 中心パスの狭い近傍内に点列を生成することにより, 反復回数が

$O(\sqrt{n}L)$ となることが知られている．ここでは，中心パスの狭い近傍内に点列を生成することにより，反復回数が $O(nL)$ となるパス追跡インフィージブル内点法を解説する．そのアルゴリズムは，Mizuno, Todd, and Ye [4] によるプレディクタ・コレクタ法に基づいている．

初期内点を $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0) = \gamma_0\rho(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{e})$ とし，$\mu_0 = \gamma_0^2\rho^2$ とする．定数 $\beta \in (0, 1)$ に対して，中心パスの狭い近傍

$$N_2(\beta) = \left\{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mu\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}\| \geq \mu_0\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|, \\ \mu\|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}\| \geq \mu_0\|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} - \boldsymbol{c}\|, \\ \|\boldsymbol{X}\boldsymbol{z} - \mu\boldsymbol{e}\| \leq \beta\mu,\ \mu = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}/n, \boldsymbol{x} > 0, \boldsymbol{z} > 0 \end{array} \right\}$$

を定義する．明らかに，初期点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ は，この近傍上の点である．近傍 $N_1(\beta)$ と比較すると，条件 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{z} \geq (1-\beta)\mu\boldsymbol{e}$ が $\|\boldsymbol{X}\boldsymbol{z} - \mu\boldsymbol{e}\| \leq \beta\mu$ に入れ替わっており，より強い条件となっている．したがって，上で定義した近傍 $N_2(\beta)$ は近傍 $N_1(\beta)$ より狭くなっている．本節で扱うアルゴリズムは，プレディクタ・コレクタ法に基づいているので，$\beta_1 = 1/4$ と $\beta_2 = 1/2$ に対する大小 2 つの近傍 $N_2(\beta_2)$ と $N_2(\beta_1)$ を使う．狭いほうの近傍 $N_2(\beta_1)$ 上に点列を生成するが，プレディクタステップで計算される中間点は広いほうの近傍 $N_2(\beta_2)$ 上にある．この近傍を使うことと，プレディクタ・コレクタ法を使うことを除いては，アルゴリズム 1.1 と同じであり，次のようになる．

アルゴリズム 1.7 中心パスの狭い近傍を使った主双対パス追跡インフィージブル内点法は，次のステップから成る．

ステップ 0　$\rho > 0$，$\epsilon_P > 0$，$\epsilon_D > 0$，$\epsilon > 0$，$\gamma_0 > 0$，$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$，$\beta_1 = 1/4$，$\beta_2 = 1/2$ とする．初期内点を $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0) = \gamma_0\rho(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{e})$，$\mu_0 = (\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0/n = \gamma_0^2\rho^2$，$\theta_0 = 1$，$k = 0$ とする．

ステップ 1　条件

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^k - \boldsymbol{b}\| \leq \epsilon_P, \|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^k + \boldsymbol{z}^k - \boldsymbol{c}\| \leq \epsilon_D, (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \leq \epsilon \tag{22}$$

が成立したならば，$(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ を近似解として，終了する．また，条件 $\theta_k > 0$ と

$$\|(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k)\|_1 > \frac{1+\gamma_0}{\gamma_0^2\theta_k\rho}(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \tag{23}$$

が成立したならば，最適解が存在しないとして，終了する．

ステップ 2(**プレディクタステップ**)　内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，パラメータ $\mu = \gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$ として，方程式系 (8) の解 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を (9) により計算する．ステップサイズ $\hat{\alpha}$ を，任意の $\alpha \in [0, \hat{\alpha}]$ に対して

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} \in N_2(\beta_2) \\ (\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) \leq (1 - \alpha(1-\gamma_2))(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \end{gathered}$$

となる最大の値 (あるいはその近似値) とする．$\alpha = \hat{\alpha}$ として，中間点を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix}$$

とし，$\theta' = (1-\alpha)\theta^k$ とする．

ステップ 3(コレクタステップ) 点 $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ においてセンタリング方向 $(\Delta\boldsymbol{x}', \Delta y', \Delta\boldsymbol{z}')$ を線形方程式系

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\Delta\boldsymbol{x} = 0 \\ \boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y} + \Delta\boldsymbol{z} = 0 \\ \boldsymbol{Z}'\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{X}'\Delta\boldsymbol{z} = \frac{(\boldsymbol{x}')^T\boldsymbol{z}'}{n}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{z}' \end{array}$$

の解として計算する．ステップサイズを 1 として，次の点を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{y}^{k+1} \\ \boldsymbol{z}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ \boldsymbol{z}' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x}' \\ \Delta\boldsymbol{y}' \\ \Delta\boldsymbol{z}' \end{pmatrix}$$

として，$\theta^{k+1} = \theta'$ とする．k を 1 増加して，ステップ 1 へ行く．

コレクタステップでは, 実行可能な初期点を使う場合と同じ探索方向を使っているので, Mizuno, Todd, and Ye [4] の結果が使え，$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}') \in N_2(\beta_2)$ であることから $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1}) \in N_2(\beta_1)$ が成り立つ．したがって，上のアルゴリズムは実行できる．このとき，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{k+1} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^{k+1} + \boldsymbol{z}^{k+1} - \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}' + \boldsymbol{z}' - \boldsymbol{c})$ であるので，$\theta_{k+1} = \theta'$ とする．前節と同様にして，アルゴリズム 1.7 について，次の結果が得られる．

定理 1.8 γ_0，γ_1，γ_2 が線形計画問題のデータと無関係な定数であるとする．

$$L' = \max\{\log((\boldsymbol{x}^0)^T\boldsymbol{z}^0/\epsilon), \log(\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}\|/\epsilon_P), \log(\|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}\|/\epsilon_D\}$$

とすれば，アルゴリズム 1.7 は，$O(nL')$ の反復で終了する．また，ステップ 1 の後半の条件 (23) で終了した場合には,

$$\|(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{z}^*)\|_\infty \le \rho \tag{24}$$

をみたす主双対問題 (2) の最適解 $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ が存在しない．

アルゴリズム 1.7 では，アルゴリズム 1.1 より狭い近傍を使っているので，ステップサイズ以外のことについては，前節の結果がそのまま使える．したがって，定理 1.8 の後半の結果が成り立つ．また，補題 1.3 の結果も成り立つ．ステップサイズに関しては，前節と同様にして，次の結果が得られる．

補題 1.9 アルゴリズム 1.7 の第 k 反復で

$$\|\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z} - \frac{\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}}{n}\boldsymbol{e}\| \le \eta \text{ and } \mid \Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}| \le \eta \tag{25}$$

ならば

$$\hat{\alpha} \ge \alpha^* = \min\left\{0.5, \sqrt{\frac{\beta_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{2n\eta}}, \frac{\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{\eta}, \frac{(\gamma_2-\gamma_1)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{\eta}\right\} \tag{26}$$

である．

証明 α の 2 次関数 f，g_P，g_D，h を

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) &= \beta_2 \frac{(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z})}{n} \\
&\quad - \|(\boldsymbol{X}_k + \alpha\Delta\boldsymbol{X})(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) - \frac{(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z})}{n}\boldsymbol{e}\| \\
g_P(\alpha) &= (\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z})\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{b}\| - n\mu^0\|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}\| \\
g_D(\alpha) &= (\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z})\|\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}^0 + \boldsymbol{z}^0 - \boldsymbol{c}\| \\
&\quad - n\mu^0\|\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{y}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{c}\| \\
h(\alpha) &= (1 - \alpha(1-\gamma_2))(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k - (\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z})
\end{aligned}
$$

と定義する．これらの関数が $\alpha \in [0, \hat{\alpha}]$ に対して 0 以上となるような最大の $\hat{\alpha}$ がアルゴリズム 1.7 のステップ 2 で計算されるステップサイズである．なお，$\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x} > 0$ かつ $\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z} > 0$ は，f が 0 以上であることから導くことができる．したがって，任意の $\alpha \in [0, \alpha^*]$ に対して，上の関数がすべて 0 以上となることを示せば，補題の結果が得られる．関数 g_P，g_D，h については，補題 1.4 の場合と同様に証明できる．以下では，f が 0 以上となることを示す．

まずはじめに，式 (8) と $\mu = \gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$ より

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{X}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{X})(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k + \alpha(\boldsymbol{Z}_k\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z}) + \alpha^2\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z} \\
&= (1-\alpha)\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k + \alpha\gamma_1\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n}\boldsymbol{e} + \alpha^2\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z}
\end{aligned}
$$

と

$$
(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) = (1-\alpha)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k + \alpha\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k + \alpha^2\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}
$$

が得られる．$\alpha \leq \alpha^* \leq \frac{\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{\eta}$ と $|\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}| \leq \eta$ より，上の右辺の第 2 項は第 3 項の絶対値より大きいので，

$$
(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) \geq (1-\alpha)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k \tag{27}
$$

が得られる．上の関係式と式 (25) より

$$
\begin{aligned}
&\|(\boldsymbol{X}_k + \alpha\Delta\boldsymbol{X})(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) - \frac{(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z})}{n}\boldsymbol{e}\| \\
&= \|(1-\alpha)\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k + \alpha\gamma_1\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n}\boldsymbol{e} + \alpha^2\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z} \\
&- \frac{(1-\alpha)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k + \alpha\gamma_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k + \alpha^2\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}}{n}\boldsymbol{e}\| \\
&\leq (1-\alpha)\|\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k - \frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n}\boldsymbol{e}\| + \alpha^2\|\Delta\boldsymbol{X}\Delta\boldsymbol{z} - \frac{\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}}{n}\boldsymbol{e}\| \\
&\leq (1-\alpha)\beta_1\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n} + \alpha^2\eta
\end{aligned}
$$

となる．したがって，$\alpha \in [0, \alpha^*]$ ならば (26) より

$$
\begin{aligned}
&\|(\boldsymbol{X}_k + \alpha\Delta\boldsymbol{X})(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) - \frac{(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z})}{n}\boldsymbol{e}\| \\
&\le (1-\alpha)\beta_1\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n} + \frac{\beta_1(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{2n\eta}\eta \\
&\le 2(1-\alpha)\beta_1\frac{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}{n} \quad (\text{since } 0.5 \le 1-\alpha)
\end{aligned}
$$

が得られる．この不等式，(27)，$\beta_2 = 2\beta_1$ より，$\alpha \in [0, \alpha^*]$ ならば $f(\alpha) \ge 0$ が成立する． ∎

ここで，前節と同じ議論により，$\|\boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\|$ と $\|\boldsymbol{D}\Delta\boldsymbol{z}\|$ の大きさが $O(\sqrt{n})\sqrt{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}$ となる．したがって，$\eta = O(n)(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k$ に対して，条件 (25) が成り立つので，上の補題より，ある $\delta > 0$ が存在し，アルゴリズムの各反復で $\hat{\alpha} \ge \delta/n$ となる．ゆえに，定理 1.8 の前半の結果が得られる．

参考文献

[1] Kojima, M., Megiddo,, N. and Mizuno, S.: "A Primal-Dual Infeasible-Interior Point Algorithm for Linear Programming", *Mathematical Programming* **61** (1993) 261–280.

[2] Lustig, I. J., Marsten, R. E., and Shanno, D. F.: "Computation Experience with a Primal-Dual Interior Point Method for Linear Programming", *Linear Algebra and its Applications* **152** (1991) 191–222.

[3] Mizuno, S.: "Polynomiality of Infeasible-Interior-Point Algorithms for Linear Programming", *Mathematical Programming* **67** (1994) 109–119.

[4] Mizuno, S., Todd, M. J., and Ye, Y.: "On Adaptive-Step Primal-Dual Interior-Point Algorithms for Linear Programming", *Mathematics of Operations research* **18** (1993) 964–981.

[5] 水野眞治：学習・研究用テキスト内点法 (2A) 解析的中心と中心パス，Web 上のテキスト，http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/ (2010)

[6] Zhang, Y.: "On the Convergence of a Class of Infeasible Interior-Point Methods for the Horizontal Linear Complementarity Problem", *SIAM Journal on Optimization* **4** (1994) 208-227.