オペレーションズリサーチ 2010 (8)

8　DEA(包絡分析法)

8.1　例題（支店の評価）

スーパー M には、都内に 7 つの支店 A, B, C, D, E, F, G があり、それぞれの店の従業員数、売り場面積、売上高は表 1 のようになっている。この 7 つの支店それぞれについて、その他の支店と比べたときに、効率的であるかどうか判断せよ。

表 1: 各支店のデータ

支店	A	B	C	D	E	F	G
従業員数	30 人	45 人	20 人	50 人	25 人	70 人	40 人
売り場面積	850m^2	700m^2	500m^2	850m^2	400m^2	750m^2	650m^2
売上高	620 万円	750 万円	430 万円	680 万円	520 万円	880 万円	440 万円
来客数	630 人	590 人	480 人	650 人	570 人	930 人	440 人

8.2　DEA と対象とする問題

支店の評価問題のように、複数の同様な分析対象を相対的に評価する方法として **DEA** (Data Envelopment Analysis: **包絡分析法**) がある。DEA では、例題における支店のような分析対象を DMU (Decision Making Unit: 意思決定者、事業体) と呼ぶ。事業体としては、銀行、商社、デパート、支店、支社、病院、学校、個人などさまざまなものがある。各事業体について、例題における従業員数と売り場面積のような入力 (投入) データと売上高のような出力 (算出) データを得ることができるものとする。事業体を評価するうえで、同じ出力を得るためには入力データが小さいほど、そして同じ入力のもとでは出力データが大きいほどその事業体が好ましい（効率的である）とする。

一般には、n 個の事業体 $DMU_1,\ DMU_2, \cdots,\ DMU_n$ があり、各事業体 DMU_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ に対して、m 個の入力データ $x_{1j},\ x_{2j},\ \cdots,\ x_{mj}$ と s 個の出力データ $y_{1j},\ y_{2j},\ \cdots,\ y_{sj}$ が得られるものとする。各事業体の入力データを並べた m 次元のベクトルと出力データを並べた s 次元のベクトルを

$$\boldsymbol{x}_i = \begin{pmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{mi} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y}_i = \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{si} \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

とする。

8.3 CCRモデル

n 個の事業体の中から、相対的な効率性を見たい事業体を DMU_o $(o \in \{1, 2, \cdots, n\})$ とする。入力データが小さいほど好ましく、出力データが大きいほど好ましいので、DEAでは、その比（比率尺度）

$$\frac{\text{総出力（総産出）}}{\text{総入力（総投入）}} \tag{1}$$

の値が大きいほど好ましいと考える。ただし、複数の入力データがあるので、i 番目の入力にウエイト $v_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ を乗じて、すべて加えたもの

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{x}_o = v_1 x_{1o} + v_2 x_{2o} + \cdots + v_m x_{mo}$$

を総入力とし、同様に r 番目の出力にウエイト $u_r (r = 1, 2, \cdots, n)$ を乗じてすべて加えたもの

$$\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{y}_o = u_1 y_{1o} + u_2 y_{2o} + \cdots + u_s y_{so}$$

を総出力とする。このとき、比率尺度 (1) をなるべく大きくしたいのであるが、他の事業体と比べて効率的であるかどうか判断するために、すべての事業体で比率尺度 (1) が 1 以下となる条件の下で、事業体 DMU_o の比率尺度 θ を最大化する次のモデルを考える。

$$\begin{array}{lrcl} \text{最大化} & \theta = \dfrac{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{x}_o} & & \\ \text{制約条件} & \dfrac{\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{x}_j} & \leq & 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \\ & \boldsymbol{u} & \geq & 0, \\ & \boldsymbol{v} & \geq & 0. \end{array} \tag{2}$$

制約式には、ここで考えている o 番目の事業体も含むので、目的関数の最適値 θ^* は、1 以下である。これは、1978 年に Charnes, Cooper and Rhodes によって初めて提案された DEA モデルであり、提案者の頭文字をとって **CCRモデル**と呼ばれている。DEA では、このモデルのように、事業体 DMU_o にとって最も都合の良いように、ウエイトを選ぶことができる。CCR モデルでは、すべての事業体の総入力と総出力の比が 1 以下になるようにウエイトを選ぶとき、事業体 DMU_o の総入力と総出力の比 θ を最大化するように最適値 θ^* を求めている。この値 θ^* を事業体 DMU_o の **D 効率値**という。このとき、$\theta^* = 1$ ならば、事業体 DMU_o は **D 効率的**であるといい、$\theta^* < 1$ ならば、**D 非効率的**であるという。

8.4 線形計画問題への変換

上記の問題 (2) は、目的関数と制約関数の一部が分数関数で表されている分数計画問題である。これらの分数関数の分母が正であるので、制約式では両辺に分母と同じ関数を乗じることにより、線形制約に変換できる。また、すべての変数 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_s)$ と $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_m)$ の値を定数倍しても目的関数の値が変わらないので、目的関数の分

母の大きさを1と固定する。以上の変形により、問題(2)は、次の等価な線形計画問題に変形できる：

$$\begin{array}{llcll} \text{最大化} & \theta = & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_o & & \\ \text{制約条件} & & \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_o & = & 1, \\ & & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_j & \leq & \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n), \\ & & \boldsymbol{u} & \geq & 0, \\ & & \boldsymbol{v} & \geq & 0. \end{array} \tag{3}$$

この問題は、各事業体の入力データを並べた $m \times n$ 行列

$$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \cdots & \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

と、出力データを並べた $s \times n$ 行列

$$Y = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1 & \boldsymbol{y}_2 & \cdots & \boldsymbol{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sn} \end{pmatrix}$$

を使って、次のように表すことができる：

$$\begin{array}{llcll} \text{最大化} & \theta = & \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{y}_o & & \\ \text{制約条件} & & \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}_o & = & 1, \\ & & -\boldsymbol{v}^T X + \boldsymbol{u}^T Y & \leq & 0, \\ & & \boldsymbol{u} & \geq & 0, \\ & & \boldsymbol{v} & \geq & 0. \end{array} \tag{4}$$

この線形計画問題の双対問題は、$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が変数であることに注意すれば、次のようになる。

$$\begin{array}{llcl} \text{最小化} & \theta & & \\ \text{制約条件} & \theta\boldsymbol{x}_o - X\lambda & \geq & 0, \\ & \boldsymbol{y}_o - Y\lambda & \leq & 0, \\ & \lambda & \geq & 0. \end{array} \tag{5}$$

双対定理により、この双対問題の最適値は主問題の最適値と等しくなる。実際の計算では、主問題よりもこの双対問題を解き、D 効率値 θ^* を求める。

8.5 生産可能集合と双対問題

DEA では、n 個の事業体 DMU_j $(j = 1, 2, \cdots, n)$ の入力と出力データ $(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j) \in R^{m+s}$ を扱っている。このようなデータ $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を活動と呼び、ユークリッド空間 R^{m+s} の点とみなす。活動の集合を**生産可能集合**と呼び、記号 P で表す。この生産可能集合 P に対して次の仮定を設ける。

(P1) 任意の $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し、$(\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{y}_j) \in P$.

(P2) 任意の $k \geq 0$ に対して、$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in P$ ならば $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in P$.

(P3) 任意の $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in P$ に対して、$\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}$, $\bar{\boldsymbol{y}} \leq \boldsymbol{y}$ ならば $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in P$.

(P4) P に属する活動の非負線形結合の活動は P に属する。

ここで、仮定 (P2) は、仮定 (P4) に含まれるので、数学的には必要がない。上の仮定 (P1) から (P4) のすべてをみたす (最小の) 集合は、

$$\begin{aligned} P &= \{(x, y) \mid \boldsymbol{x} \geq X\lambda,\ \boldsymbol{y} \leq Y\lambda,\ \lambda \geq 0,\ \lambda \in R^n\} \\ &= \{(x, y) \mid \boldsymbol{x} \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{x}_j,\ \boldsymbol{y} \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \boldsymbol{y}_i,\ \lambda_j \geq 0,\ \lambda_j \in R\ (j = 1, 2, \cdots, n)\} \end{aligned}$$

となる。

双対問題 (5) の制約条件は、生産可能集合 P を使うと、$(\theta \boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o) \in P$ と表すことができる。すなわち、双対問題は、事業体 DMU_o の入力データをすべて θ 倍に縮小したときの活動 $(\theta \boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ が生産可能集合 P に入るという条件の下で、θ の最小値を求めていることになる。もちろん、$(\boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ が P に属するので、$\theta \leq 1$ である。事業体 DMU_o が D 効率的であるときは、θ を 1 より少しでも下げると、活動 $(\theta \boldsymbol{x}_o, \boldsymbol{y}_o)$ が生産可能集合から出てしまうことを意味している。

事業体 DMU_o が非効率的であるとき、

$$E_o = \{j \mid \lambda_j^* > 0, j \in \{1, 2, \cdots, n\}\}$$

を DMU_o の**参照集合**または**優位集合**という。参照集合に属する事業体が効率的であり、活動がその非負結合に等しい事業体も効率的であることがいえる。したがって、活動が $(X\lambda^*, Y\lambda^*)$ となる事業体も効率的である。事業体 DMU_o は、入力を $\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_o - X\lambda^*$ だけ減少させ、出力を $\Delta \boldsymbol{y} = Y\lambda^* - \boldsymbol{y}_o$ だけ増加することができれば、活動が $(X\lambda^*, Y\lambda^*)$ となるので、効率的になる。これは、事業体の改善のための一つの指針を示している。

参考図書：刀根薫著：「経営効率性の測定と改善　包絡分析法 DEA による」日科技連、1993.