オペレーションズリサーチ 2010(4) 非線形計画問題

水野 眞治 (西 9-520 号室)、中田 和秀 (西 9-521 号室)，北原知就（西 9-425 号室）

本資料は，参考文献 [1] をもとにしている．

5 非線形計画問題 (Nonlinear Programming Problem)

5.1 1 変数関数の最小化

1 変数関数の最小化とは，関数 $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ が与えられたとき，任意の実数 $x \in \mathcal{R}$ に対して

$$f(x^*) \leq f(x)$$

を満たす $x^* \in \mathcal{R}$ を求める問題である．この 1 変数最小化問題を

$$\min_x \ f(x) \tag{1}$$

と表す．また，解 x^* を関数 f(あるいは最小化問題) の**大域的最小解**または**大域的最適解** (global optimal solution) という．

ある $\epsilon > 0$ が存在し，$|x - x^*| < \epsilon$ をみたす任意の x に対して

$$f(x^*) \leq f(x)$$

を満たすとき，この x^* を関数 f(最小化問題) の**局所的最小解**または**局所的最適解** (local optimal solution) という．

関数 f は

$$x, y \in \mathcal{R}, \alpha \in [0, 1] \Rightarrow f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

を満たすとき，凸関数と呼ばれる．関数 f が凸関数ならば，任意の局所的最適解は大域的最適解となる．

f が連続微分可能で，その導関数を f' とするとき，x^* が問題 (1) の局所的最適解ならば

$$f'(x^*) = 0 \tag{2}$$

が成立する．この条件 (2) を, x^* が局所的最適解であるための **1 次の必要条件** (first-order necessary condition) という．f が凸関数ならば，条件 (2) は，x^* が局所的最適解であるための必要十分条件となる．

f が 2 回連続微分可能で，その 2 階の導関数を f'' とするとき，x^* が問題 (1) の局所的最適解ならば

$$f'(x^*) = 0,\ f''(x^*) \geq 0 \tag{3}$$

が成立する．この条件 (3) を，x^* が局所的最適解であるための **2 次の必要条件** (second-order necessary condition) という．逆に，x^* において

$$f'(x^*) = 0,\ f''(x^*) > 0 \tag{4}$$

が成立するならば，x^* は問題 (1) の局所的最適解となる．この条件 (4) を，x^* が局所的最適解であるための **2 次の十分条件** (second-order sufficient condition) という．

5.2 1 変数関数最小化問題に対するニュートン法 (Newton's Method)

関数 $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ が 2 回連続微分可能なとき，次の最小化問題

$$\min_{x}\ f(x)$$

を解くためのニュートン法について解説する．

ニュートン法は，初期点 x^0 より数列 (点列)$\{x^k | k = 0, 1, \cdots\}$ を生成する反復法である．この数列の第 k 項を点 x^k と呼ぶこともある．第 k 反復で得られた点を x^k とするとき，関数 f を x^k において 2 次近似した関数を

$$g(x) = f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) + \frac{1}{2}f''(x^k)(x - x^k)^2$$

とする．

2 階の微係数 $f''(x^k)$ が正であると仮定すれば，関数 g は凸 2 次関数となり，その最小値は

$$g'(x) = f'(x^k) + f''(x^k)(x - x^k) = 0$$

をみたす x^* において達成される．この解は

$$x^* = x^k - \frac{f'(x^k)}{f''(x^k)}$$

と表される．この x^* を次の点 x^{k+1} として，上記の操作を繰り返すことにより，点列 $\{x^k\}$ を生成するのが，ニュートン法である．

例 5.1 1 変数関数 f を任意の $x \in \mathcal{R}$ に対して

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32$$

とし，初期点を $x^0 = 4$ とする．このとき，$f'(4) = 480$，$f''(4) = 456$ であり，関数 f を x^0 において 2 次近似した関数は

$$g(x) = 352 + 480(x-4) + 228(x-4)^2$$

となり，$g'(x^*) = 0$ の解は

$$x^* = 4 - \frac{480}{456} = 2\frac{54}{57}$$

となる．

5.3 多変数関数の最小化

多変数関数の最小化とは，関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ が与えられたとき，任意の点 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ に対し

$$f(\boldsymbol{x}^*) \le f(\boldsymbol{x})$$

となる $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{R}^n$ を求める問題である．この最小化問題を

$$\min_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x})$$

と表す．この解 $\boldsymbol{x}^*$ を関数 f(最小化問題) の**大域的最小解 (最適解)** という．

ある $\epsilon > 0$ が存在し，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| < \epsilon$ をみたす任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}^*) \le f(\boldsymbol{x})$$

をみたすとき，この点 $\boldsymbol{x}^*$ を関数 f(最小化問題) の**局所的最小解 (最適解)** という．

関数 f は

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^n, \alpha \in [0,1] \Rightarrow f(\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}) \le \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y})$$

を満たすとき，凸関数と呼ばれる．関数 f が凸関数ならば，任意の局所的最適解は大域的最適解となる．

関数 f が連続微分可能であるとする．点 $\boldsymbol{x}$ における偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ の値を第 i 要素とする n 次元ベクトル

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

を f の**勾配ベクトル** (gradient vector) という．

定理 5.2 点 $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解ならば

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \tag{5}$$

が成立する．

上の定理の式 (5) を $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解であるための **1 次の必要条件**という．関数 f が凸関数ならば，必要十分条件となる．一般に，$\nabla f(\boldsymbol{x}) = 0$ をみたす点 $\boldsymbol{x}$ を関数 f の**停留点** (stationary point) という．

関数 f が 2 回連続微分可能であるとする．点 $\boldsymbol{x}$ における 2 階の偏導関数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ の値を i 行 j 列成分とする $n \times n$ 行列

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & & \vdots & \\ \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\boldsymbol{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

を**ヘッセ行列** (Hessian matrix) という．

定理 5.3 点 $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解ならば

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \text{ かつ } \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) \text{ が半正定値行列} \tag{6}$$

が成立する．

上の定理にある条件 (6) を $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解であるための **2 次の必要条件**という．ここで，半正定値行列 $\boldsymbol{M}$ とは，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} \geq 0$ となる行列のことである．

定理 5.4 関数 f が 2 回連続微分可能であり，条件

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0} \text{ かつ } \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*) \text{ が正定値行列} \tag{7}$$

が成り立つならば，$\boldsymbol{x}^*$ は関数 f の局所的最適解である．

上の定理の条件 (7) を $\boldsymbol{x}^*$ が関数 f の局所的最適解であるための **2 次の十分条件**という．ここで，正定値行列 $\boldsymbol{M}$ とは，任意のゼロベクトルでない $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ に対して，$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{x} > 0$ となる行列のことである．

例 5.5 2 変数関数 f を任意の $(x_1, x_2)^T \in \mathcal{R}^2$ に対して

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 x_2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 2x_2 + 3$$

とする．このとき，

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

かつ

$$\nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

となる．このとき，最小解であるための一次の必要条件は

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -2 \end{aligned}$$

となるので，$(x_1, x_2) = (3, 1)$ が得られる．この点 (この場合，任意の点) において，ヘッセ行列 $\nabla^2 f(x_1, x_2)$ が正定値となるので，2 次の必要条件と十分条件を満たす．したがって，$(x_1, x_2) = (3, 1)$ は f の局所的最適解であり，そのときに最小値 -2 をとる．この場合，f が凸関数であるので，これは大域的最適解でもある．

5.4 最急降下法

関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ が 2 回連続微分可能なとき，次の最小化問題

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ f(\boldsymbol{x})$$

を考える．この問題に対する最急降下法は，反復解法であり，初期点 $\boldsymbol{x}^0$ より点列 $\{\boldsymbol{x}^k | k = 0, 1, \cdots\}$ を生成する．

第 k 反復で点 $\boldsymbol{x}^k$ が求められているとし，次の点の求め方を説明する．勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{x}^k)$ は，この点における関数 f の増加方向であるから，その逆方向へ進むことにより，関数 f の値を減少させることができる．ステップサイズを α として，次の点を

$$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \alpha \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$$

とする．ステップサイズ α は，問題

$$\min_{\alpha} \ f(\boldsymbol{x}^k - \alpha \nabla f(\boldsymbol{x}^k))$$

を解くことにより求めることができる．上記の問題は，1 変数 α に関する最小化問題であるので，**直線探索** (1 変数関数の最小化，1 次元探索，line search) により近似解を求めることができる．

アルゴリズム 5.6 最急降下法のアルゴリズムは，次のステップからなる．

ステップ 0　初期点 $\boldsymbol{x}^0$ を選び，十分小さな正の数 ϵ を定め，$k=0$ とする．

ステップ 1　$\|\nabla f(\boldsymbol{x}^k)\| \leq \epsilon$ ならばストップし，$\boldsymbol{x}^k$ を近似解とする．さもなければ問題

$$\min_{\alpha} \ f(\boldsymbol{x}^k - \alpha \nabla f(\boldsymbol{x}^k))$$

の (近似) 解 α^* を求める．

ステップ 2　$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k - \alpha^* \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$ とし，k を 1 増加しステップ 1 へ戻る．

上の最急降下法のアルゴリズムにおいて，$\epsilon = 0$ とすれば，生成される点列が有界ならば，その点列の集積点 $\boldsymbol{x}^*$ は関数 f の停留点となる ($\nabla f(\boldsymbol{x}^*) = 0$ となる) ことが知られている．

5.5 多変数関数最小化問題に対するニュートン法 (Newton's Method)

写像 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ が 2 回連続微分可能なとき，次の最小化問題

$$\min_{\boldsymbol{x}} \ f(\boldsymbol{x})$$

を考える．関数 f を点 $\boldsymbol{x}^k$ において 2 次近似した関数を

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}^k) + \nabla f(\boldsymbol{x}^k)^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^k) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^k)^T \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^k).$$

とする．ヘッセ行列 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)$ が正定値であると仮定すれば，関数 g は凸 2 次関数となり，その最小値は

$$\nabla g(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}^k) + \nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^k) = 0$$

をみたす点 $\hat{\boldsymbol{x}}$ において達成される．この解は

$$\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^k = -\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$$

と表される．

$\boldsymbol{d} = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}^k = -\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)^{-1} \nabla f(\boldsymbol{x}^k)$ を探索方向とし，ステップ幅を α とし，問題

$$\min_{\alpha} \ f(\boldsymbol{x}^k + \alpha \boldsymbol{d})$$

を解き，その解 α^* に対して，次の点 $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha^* \boldsymbol{d}$ を求める．

アルゴリズム 5.7 ニュートン法のアルゴリズムは，次のステップからなる．

ステップ 0　初期点 $\boldsymbol{x}^0$ を選び，十分小さな正の数 $\epsilon > 0$ を定め，$k=0$ とする．

ステップ 1　$\|\nabla f(\boldsymbol{x}^k)\| \le \epsilon$ ならばストップし，$\boldsymbol{x}^k$ を近似解とする．さもなければ，

$$\boldsymbol{d} = -\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^k)^{-1}\nabla f(\boldsymbol{x}^k)$$

を計算し，問題

$$\min_{\alpha} \ f(\boldsymbol{x}^k + \alpha \boldsymbol{d})$$

の (近似) 解 α^* を求める．

ステップ 2　$\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha^* \boldsymbol{d}$ とし，k を 1 増加してステップ 1 へ戻る．

最小解 $\boldsymbol{x}^*$ においてヘッセ行列 $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}^*)$ が正定値であり，初期点 $\boldsymbol{x}^0$ が $\boldsymbol{x}^*$ に十分近いならば，ニュートン法で生成される点列は $\boldsymbol{x}^*$ に速く収束する (局所的に 2 次収束する) ことが知られている．

5.6　不等式制約のみの非線形計画問題

不等式制約のみの非線形計画問題は，変数ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n$ と関数 $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, $g_i : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ に対し

$$\begin{array}{lll} \text{(NLP1)} & \text{最小化} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{制約条件} & g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, i = 1, 2, \cdots, m \end{array}$$

と表される．ここで，目的関数 f とすべての g_i は 2 回連続微分可能であるとする．制約条件をすべてみたす点 $\boldsymbol{x}$ を**実行可能解**といい，すべての実行可能解の集合 $S = \{\boldsymbol{x} | g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, i = 1, 2, \cdots, m\}$ を**実行可能領域**という．

任意の実行可能解 $\boldsymbol{x} \in S$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}^*) \le f(\boldsymbol{x})$$

となる $\boldsymbol{x}^* \in S$ を非線形計画問題 (NLP1) の**大域的最小解 (最適解)** という．ある $\epsilon > 0$ が存在し，$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| < \epsilon$ をみたす任意の実行可能解 $\boldsymbol{x} \in S$ に対して，

$$f(\boldsymbol{x}^*) \le f(\boldsymbol{x})$$

をみたす $\boldsymbol{x}^* \in S$ を非線形計画問題 (NLP1) の**局所的最小解 (最適解)** という．

実行可能領域 S が凸集合 (すべての関数 g_i が凸関数) で目的関数 f が凸関数ならば，任意の局所的最小解が大域的最小解となる．このとき，問題 (NLP1) を**凸計画問題**という．

例 5.8 非線形計画問題の例として,

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & f(x_1,x_2)=(x_1-1)^2+(x_2-2)^2 \\
\text{制約条件} & g_1(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-2\le 0 \\
 & g_2(x_1,x_2)=-x_1+x_2\le 0 \\
 & g_3(x_1,x_2)=-x_2\le 0
\end{array}
$$

を扱う.この問題の最適解は, $\boldsymbol{x}^*=(1,1)^T$ であり,そのときの最小値は 1 である.最適解で等号が成立している制約式 ($g_1(\boldsymbol{x}^*)=0$ と $g_2(\boldsymbol{x}^*)=0$) を**有効制約**という.最適解 $\boldsymbol{x}^*$ において目的関数の勾配ベクトル $\nabla f(\boldsymbol{x}^*)=(0,-2)^T$ が有効制約の勾配ベクトル $\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*)=(2,2)^T$ と $\nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)=(-1,1)^T$ の非負結合で釣り合っている.すなわち,ある $u_1^*\ge 0$ と $u_2^*\ge 0$ に対し,

$$\nabla f(\boldsymbol{x}^*)+u_1^*\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*)+u_2^*\nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)=0$$

が成立する.実際, $u_1^*=.5$, $u_2^*=1$ とすれば,上の式が成立する.上記の条件と制約条件を一緒にすると,

$$
\begin{array}{l}
\nabla f(\boldsymbol{x}^*)+u_1^*\nabla g_1(\boldsymbol{x}^*)+u_2^*\nabla g_2(\boldsymbol{x}^*)+u_3^*\nabla g_3(\boldsymbol{x}^*)=0 \\
\left.\begin{array}{l} g_i(\boldsymbol{x}^*)\le 0 \\ u_i^*\ge 0 \\ u_i^*g_i(\boldsymbol{x}^*)=0 \end{array}\right\} i=1,2,3
\end{array}
$$

と表すことができる.ここで, $g_3(\boldsymbol{x}^*)<0$ より, $u_3^*=0$ である.

一般には,点 $\boldsymbol{x}^*$ が非線形計画問題 (NLP1) の局所的最適解であり,点 $\boldsymbol{x}^*$ における有効制約の勾配ベクトルが 1 次独立であるならば,ある $\boldsymbol{u}^*=(u_1^*,u_2^*,\cdots,u_m^*)\in\mathcal{R}^m$ が存在し

$$
\begin{array}{l}
\nabla f(\boldsymbol{x}^*)+\sum_{i=1}^m u_i^*\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)=0, \\
\left.\begin{array}{l} g_i(\boldsymbol{x}^*)\le 0 \\ u_i^*\ge 0 \\ u_i^*g_i(\boldsymbol{x}^*)=0 \end{array}\right\} i=1,2,\cdots,m
\end{array}
$$

が成立する.これを最適性の**1 次の必要条件**といい,**カルーシュ・キューン・タッカー条件** (Karush-Kuhn-Tucker 条件, KKT 条件) またはキューン・タッカー条件 (KT 条件) と呼ぶ.

例 5.9 次の例題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & f(\boldsymbol{x})=(x_1-2)^2+(x_2+1)^2 \\
\text{制約条件} & g_1(\boldsymbol{x})=(x_1-1)^3+x_2\le 0 \\
 & g_2(\boldsymbol{x})=-x_1\le 0 \\
 & g_3(\boldsymbol{x})=-x_2\le 0
\end{array}
$$

では，最適解 $(x_1, x_2) = (1, 0)$ において，有効制約の勾配ベクトルが 1 次独立でない．この例題では，この最適解において KKT 条件が成立していない．

非線形計画問題 (NLP1) に対し，**ラグランジュ乗数** $u_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ を導入して，**ラグランジュ関数** (Lagrangian) を

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{m} u_i g_i(\boldsymbol{x})$$

と定義する．ただし，ラグランジュ乗数の中に負の値をとるものがるときは，$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = -\infty$ とする．このとき，KKT 条件は，

$$\begin{array}{l} \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) = \nabla f(\boldsymbol{x}^*) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \\ \left.\begin{array}{l} g_i(\boldsymbol{x}^*) \leq 0 \\ u_i^* \geq 0 \\ u_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \end{array}\right\} i = 1, 2, \cdots, m \end{array}$$

と表わされる．

最適解 $\boldsymbol{x}^*$ における有効制約の集合を

$$I(\boldsymbol{x}^*) = \{i | g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0\}$$

とし，すべての有効制約の勾配ベクトルと直交するベクトルの集合を

$$M = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^n | \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{y} = 0, i \in I(\boldsymbol{x}^*)\}$$

とする．非線形計画問題 (NLP1) の局所的最適解 $\boldsymbol{x}^*$ において有効制約の勾配ベクトルが 1 次独立で，KKT 条件をみたすラグランジュ乗数を $\boldsymbol{u}^*$ とすれば，

$$\boldsymbol{y}^T \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) \boldsymbol{y} \geq 0 \text{ for } \forall \boldsymbol{y} \in M$$

が成立する．これと KKT 条件を合わせて，最適性の 2 次の必要条件という．

逆に，KKT 条件をみたす $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)$ に対して，

$$M' = \left\{ \boldsymbol{y} \in \mathcal{R}^n \middle| \begin{array}{l} \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{y} = 0, i \in I(\boldsymbol{x}^*) \text{ and } u_i^* > 0, \\ \nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)^T \boldsymbol{y} \geq 0, i \in I(\boldsymbol{x}^*) \text{ and } u_i^* = 0 \end{array} \right\}$$

と定義するとき

$$\boldsymbol{y}^T \nabla_{\boldsymbol{x}}^2 L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) \boldsymbol{y} > 0 \text{ for } \forall \boldsymbol{y} \in M' \text{ and } \boldsymbol{y} \neq 0$$

が成り立つならば，$\boldsymbol{x}^*$ は (NLP1) の局所的最適解となる．この条件と KKT 条件を合わせて最適性の 2 次の十分条件という．

5.7 一般の非線形計画問題

等式制約と不等式制約を持つ一般的な非線形計画問題は

$$\begin{array}{lll} \text{(NLP2)} & \text{最小化} & f(\boldsymbol{x}) \\ & \text{制約条件} & g_i(\boldsymbol{x}) \le 0,\ i = 1, \cdots, m \\ & & h_j(\boldsymbol{x}) = 0,\ j = 1, \cdots, l \end{array}$$

と表すことができる．関数 f とすべての g_i，h_j が 2 回連続微分可能であるとする．問題 (NLP1) と同様に，実行可能解，大域的最適解，局所的最適解などを定義できる．

問題 (NLP2) のラグランジュ関数を

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\boldsymbol{x}) + \sum_{j=1}^{l} v_j h_j(\boldsymbol{x})$$

と定義する．このとき，点 $\boldsymbol{x}^*$ が非線形計画問題 (NLP2) の最適解であり，有効制約の勾配ベクトル $\nabla g_i(\boldsymbol{x}^*)$ $(i \in I(\boldsymbol{x}^*))$, $\nabla h_j(\boldsymbol{x}^*)$ が 1 次独立ならば，ある $\boldsymbol{u}^*$ と $\boldsymbol{v}^*$ に対し次の条件 (KKT 条件)

$$\begin{array}{l} \nabla_{\boldsymbol{x}} L(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{v}^*) = 0 \\ \left.\begin{array}{l} g_i(\boldsymbol{x}^*) \le 0 \\ \boldsymbol{u}_i^* \ge 0 \\ \boldsymbol{u}_i^* g_i(\boldsymbol{x}^*) = 0 \end{array}\right\} i = 1, \cdots, m \\ h_j(\boldsymbol{x}^*) = 0,\ j = 1, \cdots, l \end{array}$$

が成立する．問題 (NLP2) の 2 次の必要条件と十分条件も (NLP1) と同様に求めることができる．

参考文献

[1] 水野眞治：学習用テキスト 非線形計画法 (1) 非線形計画問題，Web 上のテキスト，http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/ (2010)