オペレーションズリサーチ 2010(1) OR 概説と線形計画問題

水野 眞治 (西 9-520 号室)、中田 和秀 (西 9-521 号室)，北原知就（西 9-425 号室）

本資料は，参考文献 [1] と [2] をもとにしている．

1　オペレーションズリサーチ概説

- 英語で Operations Research (米国) あるいは Operational Research (英国) といい、略して OR （オーアール) と呼ぶ
- 第 2 次世界大戦のときに西側連合軍の作戦計画を科学的に行うために始まったといわれている
- 問題解決のための科学（数理的手法）
- 計画や管理の主に数量的側面に焦点をあて、社会や企業活動のなかに内在する法則性を知り、これを意思決定の一助とするものである

<u>OR の代表的な問題と手法</u>

- 線形計画法 (問題)
- 2 次計画法 (問題)
- 非線形計画法 (問題)
- ネットワーク計画法 (問題)
- 組合せ最適化問題 (整数計画法)
- 階層的意思決定手法 (AHP)
- 経営効率化の評価 (DEA)
- マルコフモデル
- 待ち行列
- シミュレーション
- システムの信頼性
- 在庫問題
- スケジューリング
- ゲームの理論

2 線形計画問題

2.1 生産計画問題

問題 2.1 A 社では，3 種類の原料 (原料１，２，３) を使って，2 種類の製品 (製品１，２) を生産している．製品１を 1 トン生産するには，原料１，２，３がそれぞれ 1 トン，4 トン，3 トン必要であり，製品２を 1 トン生産するには，原料１，２，３がそれぞれ 2 トン，4 トン，1 トン必要である．1 日の原料１，２，３の使用可能量は，それぞれ 80 トン，180 トン，90 トンである．また，製品１，２を生産したときの 1 トンあたりの利益はそれぞれ 5 万円，4 万円である．1 日あたりの利益を最大にするには，製品１，２をそれぞれ何トンずつ生産すればよいか．

2.2 標準形の線形計画問題

線形計画問題にはいくつかの形があるが，それらを個別に扱うのは大変である．ここでは，線形計画問題の標準形を示し，後に標準形だけを扱えば十分であることを示す．

線形計画問題とは，いくつかの変数が線形の等式と不等式をすべてみたすという条件のもとで，線形の関数を最適化 (最大化あるいは最小化) するような変数の値をすべて求める問題である．このとき，最適化する関数を**目的関数** (objective function) といい，みたすべき等式あるいは不等式を**制約条件** (constraint) という．なお，本テキストでは，等号なしの不等式制約 ($\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} < b$ など) を含む場合には，線形計画問題とは呼ばない．

線形計画問題は，自然数 n と m を使って

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{制約条件} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq (0, 0, \cdots, 0)^T
\end{array}
$$

と表すことができるとき，**標準形** (standard form) と呼ばれる．ここで，添え字の集合 $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ と $N_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ を導入すると，x_i $(i \in N_n)$ が変数であり，b_j $(j \in N_m)$，c_i $(i \in N_n)$，a_{ij} $(i \in N_n, j \in N_m)$ はデータとして与えられる定数である．標準形の線形計画問題の特徴は，全ての変数に 0 以上という**非負条件** (nonnegative constraint) がつき，その他の制約が (不等式ではなく) 線形の等式であらわされ，線形の目的関数を最小化するところにある．

ベクトル

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を使うと，標準形の線形計画問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

と表される．線形計画問題では，制約条件をすべてみたすベクトル $\boldsymbol{x}$ を**実行可能解** (feasible solution) といい, 実行可能解の中で目的関数を最適にするものを**最適解** (optimal solution) といい，そのときの目的関数の値を**最適値** (optimal value) という．また，実行可能解の集合

$$F = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^n | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

を**実行可能領域** (feasible region) という．$F \neq \emptyset$ のとき，線形計画問題が**実行可能**であるといい，$F = \emptyset$ のとき**実行不能**であるという．

2.3 一般形の線形計画問題

線形計画問題の目的関数，制約条件，変数には，次のような場合がありうる．

1. 目的関数を最大化する場合と最小化する場合
2. 制約に含まれる各条件式が，線形の等式 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b$ の場合，左辺が右辺以下という不等式 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq b$ の場合，あるいは左辺が右辺以上という不等式 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \geq b$ の場合
3. 各変数に 0 以上という非負条件が付く場合と付かない場合

これらすべての場合を考えると，多くの形の線形計画問題を扱う必要がある．しかし，線形計画問題において，目的関数 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ を最小化する最適解を求めることと，その符号を変えた目的関数 $-\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$ を最大化する最適解を求めることは，実質的に同じである．また，左

辺が右辺以下という不等式 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \le b$ は，両辺に -1 を乗じることにより左辺が右辺以上という不等式 $-\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \ge -b$ に簡単に変換できる．そこで，本テキストでは，目的関数を最小化し，制約条件が等式または左辺 $\ge$ 右辺という不等式であり，0 以上という条件がつく変数と付かない変数を持つ問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 \ge \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2 \\ & \boldsymbol{x}_1 \ge \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

を**一般形の線形計画問題**という．ここで，不等式制約の数を m_1，等式制約の数を m_2，0 以上という非負条件が付く変数の数を n_1，付かない変数の数を n_2 とすれば，$\boldsymbol{A}_{11}$, $\boldsymbol{A}_{12}$, $\boldsymbol{A}_{21}$, $\boldsymbol{A}_{22}$ はそれぞれ $m_1 \times n_1$ 行列，$m_1 \times n_2$ 行列，$m_2 \times m_1$ 行列，$m_2 \times n_2$ 行列であり，ベクトル $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{x}_1$ 等の次元も同様である．$\boldsymbol{x}_1$ の各成分のように 0 以上という制約の付く変数を**非負変数**，$\boldsymbol{x}_2$ の各成分のように非負制約の付かない変数を**自由変数**という．

上記の議論より，任意の線形計画問題は，この一般形で表すことが可能である．また，標準形の線形計画問題 (1) は，線形計画問題 (2) において $m_1 = 0$, $m_2 = m$, $n_1 = n$, $n_2 = 0$ となっている場合とみなすことができる．

2.4 線形計画問題の同値変換

2 つの線形計画問題は，一方を解くことにより他方も解くことができるとき，同値であるという．線形計画問題は，次のような変換を加えても，得られる線形計画問題と同値である．本テキストではこのような変換を**同値変換**と呼ぶ．

1. 目的関数に正の実数を乗ずる，あるいは実数を加える．
2. 最大化問題の目的関数に -1 を乗じて，最小化問題とする．逆に，最小化問題の目的関数に -1 を乗じて，最大化問題とする．
3. 等式制約の両辺に 0 でない同じ実数を乗ずる，あるいは同じ実数または式を加える．
4. 不等式制約の両辺に同じ正の実数を乗ずる，あるいは同じ実数または式を加える．
5. 不等式制約の両辺に -1 を乗じて不等号の向きを逆にする．
6. 不等式制約 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \le b$ を $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + u = b, u \ge 0$ に置き換える，あるいは不等式制約 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \ge b$ を $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} - u = b, u \ge 0$ に置き換える．このときの変数 u を**スラック変数**という．
7. 等式制約 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = b$ を 2 つの不等式制約 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \le b, \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \ge b$ に置き換える，あるい

はその逆を行う．

8. 自由変数 x に対して，2 つの非負変数を使って $x = u - v$ とし，それをすべての x に代入して x を消去し，非負制約 $u \geq 0, v \geq 0$ を加える．逆に，$u - v$ という形でのみ現れる 2 つの非負変数 u, v に対して，自由変数 x を使って $u - v = x$ を代入して u と v を消去する．
9. 目的関数あるいは制約式の一部に現れる線形関数 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$ を新しい変数 t で置き換え，制約条件に $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} - t = 0$ を加える．
10. 等式制約からひとつの変数を他の変数で表し，それをすべての式に代入することにより変数をひとつ消去する．

標準形の線形計画問題 (1) が一般形の線形計画問題 (2) のひとつの形であることをすでに示したが，ここでは一般形の線形計画問題 (2) が上の同値変換を使って標準形の線形計画問題 (1) に変換できることを示す．線形計画問題 (2) において，自由変数 $\boldsymbol{x}_2$ の各成分 x_{2i} $(i = 1, 2, \cdots, n_2)$ を 2 つの非負変数 u_{2i} と v_{2i} の差で表し，j $(j = 1, 2, \cdots, m_1)$ 番目の不等式制約にスラック変数 z_j を導入することにより，次の問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{v}_2 \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}_1 \\
& \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{b}_2 \\
& (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{z}) \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

に同値変換できる．ここで，$\boldsymbol{u}_2 = (u_{21}, u_{22}, \cdots, u_{2n_2})^T$，$\boldsymbol{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, \cdots, v_{2n_2})^T$，$\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_{m_1})^T$ である．上の問題は，標準形の線形計画問題である．以上のことから，次の定理が成り立つ．

定理 2.2 すべての線形計画問題は，同値変換により，標準形の線形計画問題にできる．

この定理より，線形計画問題の性質あるいは解法を議論するときに，理論的には標準形だけ扱えば十分である．

2.5 線形計画問題の３つの場合

ここでは，線形計画問題の実行可能性と最適解に関する，重要で基本的な事柄を解説する．問題 (2) の実行可能領域を F とし，目的関数の取る値の集合

$$V = \{z | z = \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x}_2, (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \in F\} \tag{3}$$

を定義する．ここで，V は実数の集合であるが，次の 3 つの場合がある．

1. V は空集合である．
2. V は空集合ではなく，V に下界が存在しない．
3. V は空集合ではなく，V に下界が存在する．

1 番目の場合には，F も空集合なので，問題 (2) が実行不能な場合である．2 番目の場合には，実行可能であるが，最小化問題において目的関数値がいくらでも小さくなる実行可能解が存在するので，最適解が存在しない場合である．このとき，線形計画問題が**非有界**である，あるいは**無限解**をもつという．3 番目の場合には，次の定理で示されるように，最適解が存在する．

定理 2.3 線形計画問題 (2) は，実行可能でかつ目的関数値に下界が存在するならば，最適解と最適値をもつ．

上の定理から，線形計画問題には３つの場合，すなわち

1. 実行不能な場合
2. 実行可能であるが，非有界であるため最適解が存在しない場合
3. 実行可能であり，最適解が存在する場合

があり，その他の場合 (実行可能で目的関数値に下界が存在するが，最適化が存在しない場合) は起こりえない．線形計画問題を解くということは，その問題が３つ場合のいずれであるか判定し，最適解を持つ場合には少なくとも１つの最適解を求める必要がある．

2.6 双対問題

一般形の線形計画問題 (2)，すなわち

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{x}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}_2 \\ & \boldsymbol{x}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

に対して，次の問題

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_{21}^T\boldsymbol{y}_2 \leq \boldsymbol{c}_1 \\ & \boldsymbol{A}_{12}^T\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{A}_{22}^T\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{c}_2 \\ & \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{4}$$

あるいは，それを変形した

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -\boldsymbol{b}_1^T\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{b}_2^T\boldsymbol{y}_2 \\ \text{制約条件} & -\boldsymbol{A}_{11}^T\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{A}_{21}^T\boldsymbol{y}_2 \geq -\boldsymbol{c}_1 \\ & -\boldsymbol{A}_{12}^T\boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{A}_{22}^T\boldsymbol{y}_2 = -\boldsymbol{c}_2 \\ & \boldsymbol{y}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{5}$$

を問題 (2) の**双対問題**という．このとき，元の問題 (2) を**主問題**という．この問題 (5) は，一般形の線形計画問題である．したがって，問題 (2) の双対問題が (5) であるという定義をこの問題 (5) に適用すれば，問題 (5) の双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{z}_2 \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{z}_2 \geq \boldsymbol{b}_1 \\ & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{z}_1 + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{b}_2 \\ & \boldsymbol{z}_1 \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{6}$$

と表すことができる．この問題は，主問題 (2) と同じである． 以上のことから，次の定理が成り立つ．

定理 2.4 双対問題 (4) の双対問題は，主問題 (2) と同値である．

この定理より，双対問題と主問題の間に成り立つ性質は，双対問題と主問題を入れ替えても成り立つ．

一般形の線形計画問題の双対問題の定義から，その他の線形計画問題の双対問題を簡単に得ることができる．たとえば，標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{7}$$

は，一般形の問題 (2) において $\boldsymbol{c}_2$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{b}_1$，$\boldsymbol{A}_{11}$，$\boldsymbol{A}_{12}$，$\boldsymbol{A}_{22}$ がなく，$\boldsymbol{c}_1 = \boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{A}_{21} = \boldsymbol{A}$ となっている場合である．その双対問題は，(4) より

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c} \end{array} \tag{8}$$

となる．ここで，問題 (4) における変数ベクトル $\boldsymbol{y}_2$ の代わりに $\boldsymbol{y}$ を使っている．

2.7 双対定理

この節では，線形計画問題の主問題と双対問題の間に成り立つ性質等について調べる．一般形の線形計画問題を使うと煩雑になるので，標準形の線形問題 (1) を主問題として，その双対問題 (8) を使う．

双対問題 (8) は，スラック変数を導入すると

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{9}$$

となる．弱双対定理を示す前に，簡単に導かれるが，重要な関係式を示す．

補題 2.5 $\boldsymbol{x}$ を主問題 (1) の実行可能解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を双対問題 (9) の実行可能解とすれば，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}$$

が成立する．

この補題から，次の弱双対定理がすぐに導かれる．

定理 2.6 (弱双対定理 (weak duality theorem)) $\boldsymbol{x}$ を主問題 (1) の実行可能解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を双対問題 (9) の実行可能解とすれば，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$$

が成立する．すなわち，主問題 (1) の目的関数値は，双対問題 (9) の目的関数値より常に大きいか等しい．

この定理より，主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}$ と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ の目的関数値の差 $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ は，常にゼロ以上である．この差を**双対ギャップ**という．弱双対定理は，主問題と双対問題がともに実行可能であるときのみ意味があり，少なくとも一方が実行不能な場合には，特に何も言っていない．しかし，線形計画問題には，最適解をもつ，非有界，実行不能の 3 つの場合のみがあることを使えば，弱双対定理より，次のような興味深い結果を導くことができる．

系 2.7 線形計画問題の主問題 (1) と双対問題 (9) について，次のことが成り立つ．

1. 主問題と双対問題がともに実行可能ならば，主問題の実行可能解での目的関数値は，双対問題の最適値の上界となる．($\boldsymbol{x}$ を主問題の実行可能解とすれば，双対問題の任意の実行可能解 $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ に対して，$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ が成立する．) 同様に，双対問題の実行可能解での目的関数値は，主問題の最適値の下界となる．
2. 主問題と双対問題がともに実行可能ならば，それぞれ最適解をもつ．
3. 主問題が実行可能で非有界ならば，双対問題は実行不能である．

4. 主問題の実行可能解 $\boldsymbol{x}^*$ での目的関数値と双対問題の実行可能解 $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ での目的関数値が一致 $(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}^*)$ すれば，$\boldsymbol{x}^*$ と $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$ はそれぞれの問題の最適解である．

この系の最後の結果は，主問題と双対問題の目的関数値が等しければ，それぞれ最適解であることを述べている．しかし，その逆，それぞれが最適解を持つときに最適値が等しいことまでは主張していない．次の双対定理は，このことが成り立つことも示しおり，強力な結果である．

定理 2.8 (双対定理 (duality theorem)) 線形計画問題 (1) が最適解をもつならば，双対問題 (8) も最適解をもち，その最適値が等しい．

双対定理は，次の二つのことを主張している．

1. 主問題が最適解をもつならば，双対問題も最適解をもつ．
2. 上記の時に，主問題の最適値と双対問題の最適値が等しい．

双対定理として，後半の結果はよく知られているが，前半の結果も大変重要である．この前半の結果と弱双対定理から，次の系が得られる．

系 2.9 主問題と双対問題についての次の 4 つの条件はすべて同値である．

1. 主問題は最適解をもつ．
2. 双対問題は最適解をもつ．
3. 主問題と双対問題はともに最適解を持つ．
4. 主問題と双対問題はともに実行可能である．

次の結果は，線形計画問題の最適解であるための必要十分条件を示している．

系 2.10 $\boldsymbol{x}$ が主問題の最適解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が双対問題の最適解ならば，

1. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$
2. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}$
3. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} = 0$

が成立する．逆に，ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が上の 3 つの条件をみたすならば，$\boldsymbol{x}$ が主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が双対問題の最適解である．

次の系のように，線形計画問題の実行可能解が最適であるための条件をさまざまな形で

述べることができる．

系 2.11 $\boldsymbol{x}$ を主問題の実行可能解，$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を双対問題の実行可能解とすれば，次の４つの条件はすべて同値である．

1. それぞれ最適解である．
2. $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$ である．
3. $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ である．
4. すべての $i \in \mathcal{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して $x_i z_i = 0$ である．

上の４番目の条件を**相補性条件** (complementarity condition) または**相補スラック条件** (complementary slackness condition) という．

以上のことから，主問題を解く代わりに双対問題を解いたとすれば，主問題について次のようなことがいえる．

1. 双対問題が最適解をもてば，主問題も最適解をもつ．
2. 双対問題が非有界ならば，主問題は実行不能である．
3. 双対問題が実行不能ならば，主問題は実行不能であるか，あるいは非有界である．

また，シンプレックス法で主問題あるいは双対問題を解き，その最適解が得られた場合には，同時に他方の問題の最適解も得ることができる．

参考文献

[1] 水野眞治：学習用テキスト線形計画法 (1) 線形計画問題，Web 上のテキスト，http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/ (2010)

[2] 水野眞治：学習用テキスト線形計画法 (2) 双対問題と双対定理，Web 上のテキスト，http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/ (2010)