

学習用テキスト 非線形計画法 (2)

線形相補性問題

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010年11月9日

概要

線形相補性問題は、線形の等式条件と相補性条件を満たす非負ベクトルの組を求める問題である。線形計画問題あるいは凸2次計画問題の最適化条件を表す数理モデルと解釈できる。ここでは、線形相補性問題と混合線形相補性問題を解説し、線形計画問題あるいは凸2次計画問題の最適条件が相補性問題となることを示す。また、線形相補性問題を解く内点法についても解説する。

目次

1	線形相補性問題	1
1.1	線形相補性問題とは	1
1.2	線形計画問題と線形相補性問題	3
1.3	凸2次計画問題と線形相補性問題	7
1.4	線形相補性問題と内点法	9
1.5	演習問題の略解	11

1 線形相補性問題

1.1 線形相補性問題とは

ここでは、線形相補性問題と混合線形相補性問題を解説する。 n を自然数とし、 n 次の正方行列 M とベクトル $q \in \mathcal{R}^n$ が与えられたとき、次の条件

$$\begin{aligned} z &= Mx + q \\ x^T z &= 0 \\ x &\geq 0, z \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

を満たすベクトルの組 $(x, z) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n$ を求める問題を線形相補性問題 (Linear Complementarity Problem) という。ここで、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ と $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$

が非負ベクトルであるので、条件 $x^T z = 0$ は、任意の $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して

$$x_i = 0 \text{ または } z_i = 0$$

あるいは、対角行列 $X = \text{diag}(x)$ に対して

$$Xz = 0$$

が成立することを意味する。これを非負ベクトル x と z の相補性条件という。線形の等式条件 $z = Mx + q$ と非負条件 $x \geq 0, z \geq 0$ を満たす点 (x, z) を問題 (1) の実行可能解、さらに $x^T z = 0$ を満たす点を解という。ここで、次の仮定を置く。

仮定 1.1 正方行列 M が半正定値である、すなわち、任意の $x \in \mathcal{R}^n$ に対して $x^T M x \geq 0$ が成立する。

このとき、問題 (1) を単調な線形相補性問題という。

例 1.2 次の問題

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_1 z_1 + x_2 z_2 &= 0 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &\geq 0 \end{aligned}$$

は、 $n = 2$ の線形相補性問題の例である。この問題は、行列

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

が半正定値行列であるので、単調な線形計画問題である。ちなみに、この問題の解は、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

である。

より一般的な線形相補性問題は、 $(n+m) \times (n+m+n)$ 行列 A とベクトル $b \in \mathcal{R}^{n+m}$ に対して、条件

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= b \\ x^T z &= 0 \\ x \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

を満たす点 $(x, y, z) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^n$ を求める問題である．これを混合線形相補性問題という．線形相補性問題 (1) は， $m = 0$ かつ

$$A = (M \quad -I), \quad b = -q \quad (3)$$

とし， y を削除した混合線形相補性問題となっている．混合線形相補性問題の行列 A に対して

$$A \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \Delta x^T \Delta z \geq 0 \quad (4)$$

が成立するならば，この問題を単調な線形相補性問題と呼ぶ．行列 A が式 (3) のように表されているとき， M が半正定値行列であるならばこの条件が満たされる (演習問題)．

単調な場合には，内点法などにより，線形相補性問題を効率よく (多項式時間で) 解くことが可能である．また，線形相補性問題 (1) は，行列 M が準正定値 (strictly copositive) ならば，Lemke 法により解くことが可能である (たとえば，[1, 2] 参照)．

より一般に、写像 $f : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n+m}$ に対して、条件

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0 \\ x^T z &= 0 \\ x &\geq 0, z \geq 0 \end{aligned}$$

を満たすベクトル $(x, y, z) \in \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^n$ を求める問題を非線形相補性問題あるいは単に相補性問題という．

演習問題 1.3 行列 $A = (M \quad -I)$ であるとき， M が半正定値行列ならば，条件 (4) が成立することを示せ．

1.2 線形計画問題と線形相補性問題

この節では，様々な形の線形計画問題の最適条件が単調な線形相補性問題あるいは混合線形相補性問題となることを示す．また，自己双対線形計画問題は，それ自身が線形相補性問題とみなされることを示す．

線形の不等式制約と変数の非負制約をもつ線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & c^T x \\ \text{制約条件} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

とその双対問題

$$\begin{aligned} & \text{最大化} && b^T y \\ & \text{制約条件} && A^T y \leq c \\ & && y \geq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

を考える． x が主問題 (5) の最適解であり， y が双対問題 (6) の最適解であるとき， $x_2 = Ax - b$ ， $y_2 = -A^T y + c$ とすれば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix} \\ (y_2^T, x_2^T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} &\geq 0, \end{aligned} \tag{7}$$

が成立し，逆に (x, y) と (y_2, x_2) が条件 (7) を満たすならば， x が主問題 (5) の最適解であり， y が双対問題 (6) の最適解である．したがって，条件 (7) は，線形計画問題 (5) とその双対問題の最適解であるための必要十分条件であるが，これは線形相補性問題 (1) となっている．

標準形の線形計画問題

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && c^T x \\ & \text{制約条件} && Ax = b \\ & && x \geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

とその双対問題

$$\begin{aligned} & \text{最大化} && b^T y \\ & \text{制約条件} && A^T y \leq c \end{aligned} \tag{9}$$

を考える． x が主問題 (8) の最適解であり， (y, z) が双対問題 (9) の最適解であるならば，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A^T & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \\ x^T z &= 0 \\ x \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned} \tag{10}$$

が成立し，逆に (x, y, z) が条件 (10) を満たすならば， x が主問題 (8) の最適解であり， (y, z) が双対問題 (9) の最適解である．したがって，条件 (10) は，標準形の線形計画問題の最適条件であり，これは混合線形相補性問題 (2) となっている．

例 1.4 線形計画問題

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && -x_1 - 2x_2 \\ & \text{制約条件} && 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & && (x_1, x_2, x_3)^T \geq 0 \end{aligned}$$

の最適条件は，ある y と (z_1, z_2, z_3) に対して

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2y + z_1 &= -1 \\ y + z_2 &= -2 \\ y + z_3 &= 0 \\ x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3 &= 0 \\ (x_1, x_2, x_3)^T &\geq \mathbf{0}, (z_1, z_2, z_3)^T &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

が成立することである．これは，混合線形相補性問題となっている．ちなみに，この問題の解は，

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 0), y = -2, (z_1, z_2, z_3) = (3, 0, 2)$$

である．

一般形の線形計画問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2 \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \\ & \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{11}$$

とその双対問題

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \mathbf{b}_1^T \mathbf{y}_1 + \mathbf{b}_2^T \mathbf{y}_2 \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{A}_{11}^T \mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{21}^T \mathbf{y}_2 \leq \mathbf{c}_1 \\ & \mathbf{A}_{12}^T \mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}^T \mathbf{y}_2 = \mathbf{c}_2 \\ & \mathbf{y}_1 \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{12}$$

を考える．主問題 (11) の実行可能解 $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ と双対問題 (12) の実行可能解 $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ が最適解となる必要十分条件は，

$$\mathbf{x}_1^T (\mathbf{c}_1 - \mathbf{A}_{11}^T \mathbf{y}_1 - \mathbf{A}_{21}^T \mathbf{y}_2) + (\mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_1)^T \mathbf{y}_1 = 0$$

が成立することである．したがって， $\mathbf{u} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{A}_{11}^T \mathbf{y}_1 - \mathbf{A}_{21}^T \mathbf{y}_2$ ， $\mathbf{v} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_1$ とすれば， $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ が問題 (11) の最適解となり， $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$ が双対問題 (12) の最適解とな

る必要十分条件は，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & -\mathbf{I} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{A}_{21}^T & \mathbf{I} & \mathbf{A}_{11}^T \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22}^T & \mathbf{O} & \mathbf{A}_{12}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1^T, \mathbf{v}^T) \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y}_1 \end{pmatrix} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

と表すことができる．これは，混合線形相補性問題 (2) となっている．

次に，自己双対線形計画問題が，混合相補性問題となっていることを示す．一般の線形計画問題 (11) は，ベクトル $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ の次元を順に n_1, n_2, m_1, m_2 とするとき，条件

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1, n_2 = m_2 \\ \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}^T \end{aligned} \quad (14)$$

を満たすならば，自己双対である．このとき，問題 (11) の実行可能解が最適解となる必要十分条件は，相補性条件

$$\mathbf{x}_1^T (\mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_1) = 0$$

を満たすことである ([4] 参照)．したがって， $\mathbf{x}_3 = \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2 - \mathbf{b}_1$ とすれば，問題 (11) の最適条件は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_3 &= 0 \\ \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_3 &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (15)$$

となる．これは，混合線形相補性問題 (2) となっている．

演習問題 1.5 線形相補性問題 (7) が単調であることを示せ．

演習問題 1.6 混合線形相補性問題 (10) が単調であることを示せ．

演習問題 1.7 混合線形相補性問題 (13) が単調であることを示せ .

演習問題 1.8 混合線形相補性問題 (15) が単調であることを示せ .

1.3 凸 2 次計画問題と線形相補性問題

この節では, 様々な形の凸 2 次計画問題の最適条件が単調な線形相補性問題あるいは混合線形相補性問題となることを示す .

線形の不等式制約と変数の非負制約を持つ凸 2 次計画問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ \text{制約条件} \quad & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{16}$$

とその双対問題

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & b^T y - \frac{1}{2}x^T Qx \\ \text{制約条件} \quad & A^T y \leq Qx + c \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{17}$$

を考える . x が主問題 (16) の最適解であり, y が双対問題 (17) の最適解であるとき, $x_2 = Ax - b$, $y_2 = Qx - A^T y + c$ とすれば

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix} \\ (y_2^T, x_2^T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq 0, \end{aligned} \tag{18}$$

が成立し, 逆に (x, y) と (y_2, x_2) が条件 (18) を満たすならば, x が主問題 (16) の最適解であり, y が双対問題 (17) の最適解である . したがって, 条件 (18) は, 凸 2 次計画問題 (16) とその双対問題の最適解であるための必要十分条件であり, 線形相補性問題 (1) となっている .

n 個の変数と m 個の等式制約を持つ標準形の凸 2 次計画問題は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ \text{制約条件} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

と表される . $x \in \mathcal{R}^n$ がこの凸 2 次計画問題の最適解となる必要十分条件は, ある

$y \in \mathcal{R}^m$ と $z \in \mathcal{R}^n$ が存在し, 条件

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ -Qx + A^T y + z &= c \\ x^T z &= 0 \\ x \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned} \tag{19}$$

が成立することである. この問題 (19) は, 混合線形相補性問題 (2) となっている.

例 1.9 次の2次計画問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \frac{1}{2}(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-3, -4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{制約条件} \quad & x_1 + 2x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

を考える. これは凸2次計画問題であり, (x_1, x_2) が最適解であるための必要十分条件は, ある y, z_1, z_2 に対して

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \\ (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

が成立することである. これは, 混合線形相補性問題である. ちなみに, この問題の解は, $x_1 = \frac{2}{7}, x_2 = \frac{5}{14}, y = -\frac{3}{2}, z_1 = 0, z_2 = 0$ である.

凸2次計画問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ \text{制約条件} \quad & A_1 x = b_1 \\ & A_2 x \geq b_2 \end{aligned} \tag{20}$$

を考える. $x \in \mathcal{R}^n$ が凸2次計画問題 (20) の最適解となる必要十分条件は, ある $y_1 \in \mathcal{R}^{m_1}$ と $y_2 \in \mathcal{R}^{m_2}$ が存在し, 条件

$$\begin{aligned} A_1 x &= b_1 \\ A_2 x &\geq b_2 \\ A_1^T y_1 + A_2^T y_2 &= Qx + c \\ y_2^T (A_2 x - b_2) &= 0 \\ y_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{21}$$

が成立することである． $x_2 = A_2 x - b_2$ とすれば，これは

$$\begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & 0 \\ -E & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & A_1^T & A_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ c \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$x_2^T y_2 = 0$$

$$x_2 \geq 0, y_2 \geq 0$$

と書き換えることができる．この問題 (22) は，混合線形相補性問題 (2) となっている．

演習問題 1.10 線形相補性問題 (18) が単調であることを示せ．

演習問題 1.11 混合線形相補性問題 (19) が単調であることを示せ．

演習問題 1.12 混合線形相補性問題 (22) が単調であることを示せ．

1.4 線形相補性問題と内点法

線形相補性問題 (1) を解く内点法について解説するが，混合線形相補性問題 (2) を解く内点法についてもほとんど同様である．線形計画問題とその双対問題を解く主双対内点法を少し変更することにより，線形相補性問題を解く内点法を構築することができる．主双対内点法のほとんどのアルゴリズムが線形相補性問題に適用できるが，ここでは主双対パス追跡法をもとに解説する．はじめに，次の仮定を置く．

仮定 1.13 線形相補性問題 (1) の実行可能な内点，すなわち

$$z^0 = Mx^0 + q, x^0 > 0, z^0 > 0$$

を満たす初期点 (x^0, z^0) が既知である．

パス追跡法を説明するために，線形相補性問題 (1) の解析的中心と中心パスを定義する．定数 $\mu > 0$ に対して，方程式系

$$\begin{aligned} z &= Mx + q \\ Xz &= \mu e \end{aligned} \quad (23)$$

と不等式 $x > 0, z > 0$ を満たす点を解析的中心といい， $(x(\mu), z(\mu))$ とあらわす．仮定 1.13 のもとで，任意の $\mu > 0$ に対して，唯一つの解析的中心 $(x(\mu), z(\mu))$ が存在することが知られている ([3] 参照)．また，解析的中心の集合

$$P = \{(x(\mu), z(\mu)) | \mu > 0\}$$

は、なめらかなパスとなり、中心パスと呼ばれる。

パス追跡法では、点 (x^0, z^0) を初期点として、実行可能な内点の列 $\{(x^k, z^k)\}$ を生成する。第 k 反復における実行可能内点 (x^k, z^k) が得られているとして、次の実行可能内点 (x^{k+1}, z^{k+1}) の求め方を示す。点 (x^k, z^k) が $\mu_k = (x^k)^T z^k / n$ のときの解析的中心 $(x(\mu_k), z(\mu_k))$ の近似点であると仮定し、 $\gamma \in (0, 1)$ に対して、

$$\mu = \gamma \mu_k$$

としたときの解析的中心 $(x(\mu), z(\mu))$ を求めようとする。そのために、点 (x^k, z^k) において、方程式系 (23) にニュートン法を適用し、方向 $(\Delta x, \Delta z)$ を求める。それは、線形方程式系

$$\begin{aligned} \Delta z - M \Delta x &= 0 \\ Z_k \Delta x + X_k \Delta z &= -(X_k z^k - \gamma \mu_k e) \end{aligned} \quad (24)$$

の解である。ここで、 $X_k = \text{diag}(x^k)$ と $Z_k = \text{diag}(z^k)$ は、それぞれベクトル x^k と z^k の要素と対角要素が等しい対角行列を表している。この線形方程式系の解は

$$\begin{aligned} \Delta x &= -(Z_k + X_k M)^{-1} (X_k z^k - \gamma \mu_k e) \\ \Delta z &= M \Delta x \end{aligned}$$

と表すことができる。探索方向 $(\Delta x, \Delta z)$ を求めたら、ステップサイズを α として、次の点を

$$\begin{pmatrix} x^{k+1} \\ z^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k \\ z^k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \end{pmatrix} \quad (25)$$

とする。ただし、次の点を実行可能内点となるように、 $x^{k+1} > 0$ と $z^{k+1} > 0$ を満たすステップサイズ α を定める必要がある。

アルゴリズム 1.14 線形相補性問題 (1) に対する主双対パス追跡法は、次のステップから成る。

ステップ 0 初期実行可能内点を (x^0, z^0) 、 $\gamma \in (0, 1)$ 、 $k = 0$ とする。

ステップ 1 点 (x^k, z^k) において、 $\mu_k = (x^k)^T z^k / n$ 、 $\mu = \gamma \mu_k$ とし、線形方程式系 (24) の解 $(\Delta x, \Delta z)$ を計算する。

ステップ 2 ステップサイズ α を定め、式 (25) により、次の点 (x^{k+1}, z^{k+1}) を求める。反復回数 k を 1 増加し、ステップ 1 へ戻る。

ここで、ステップ 2 におけるステップサイズ α の定め方には、線形計画問題の主双対内点法と同様に、中心パスの近傍を使う方法、あるいは実行可能解であるための最大のス

テップサイズ

$$\hat{\alpha} = \max\{\alpha | \mathbf{x}^k + \alpha \Delta \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{z}^k + \alpha \Delta \mathbf{z} \geq \mathbf{0}\}$$

と定数 $\lambda \in (0, 1)$ を使い, $\alpha = \lambda \hat{\alpha}$ とする方法などがある. 中心パスの近傍を使うことにより, 線形計画問題の場合と同様に, 反復回数を $O(\sqrt{n}L)$ あるいは $O(nL)$ におさえることができる.

1.5 演習問題の略解

1.5.1 演習問題 1.3 の略解

行列 $A = (M - I)$ であるとき, 条件 (4) の仮定より

$$(M - I) \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{z} \end{pmatrix} = M \Delta \mathbf{x} - \Delta \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

である. これより, $\Delta \mathbf{z} = M \Delta \mathbf{x}$ となり, 行列 M が半正定値なので

$$\Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{z} = \Delta \mathbf{x}^T M \Delta \mathbf{x} \geq 0$$

が成立する.

1.5.2 演習問題 1.5 の略解

線形相補性問題 (7) の行列は

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -A^T \\ A & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

である. したがって, 任意の (\mathbf{x}, \mathbf{y}) に対して

$$(\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T) M \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = (\mathbf{y}^T A, -\mathbf{x}^T A^T) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{y}^T A \mathbf{x} - \mathbf{x}^T A^T \mathbf{y} = 0$$

となるので, M は半正定値行列である. これより, 線形相補性問題 (7) は単調である. この行列 M のように, $M^T = -M$ が成立する行列を歪対称行列あるいは交代行列という. 一般に正方行列 B とベクトル \mathbf{x} に対して, $\mathbf{x}^T B \mathbf{x} = \mathbf{x}^T B^T \mathbf{x}$ であるので, B が歪対称行列ならば, 任意の \mathbf{x} に対して, $\mathbf{x}^T B \mathbf{x} = 0$ となる. したがって, 歪対称行列は, 半正定値行列である.

1.5.3 演習問題 1.6 の略解

混合線形相補性問題 (10) の行列

$$A' = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^T & E \end{pmatrix}$$

に対して, ベクトル $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ が

$$A' \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとする. このとき,

$$A\Delta x = 0, \quad A^T \Delta y + \Delta z = 0$$

であるから

$$\Delta x^T \Delta z = -\Delta x^T A^T \Delta y = -0^T \Delta y = 0$$

となる. したがって, 混合線形相補性問題 (10) は単調である.

1.5.4 演習問題 1.7 の略解

混合線形相補性問題 (13) の行列

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & -I & A_{12} & O & O & O \\ A_{21} & O & A_{22} & O & O & O \\ O & O & O & A_{21}^T & I & A_{11}^T \\ O & O & O & A_{22}^T & O & A_{12}^T \end{pmatrix}$$

に対して, ベクトル $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta z_1, \Delta z_2)$ が

$$A \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとする. このとき,

$$\begin{aligned} A_{11}\Delta x_1 - \Delta x_2 + A_{12}\Delta y_1 &= 0 \\ A_{21}\Delta x_1 + A_{22}\Delta y_1 &= 0 \\ A_{21}^T\Delta y_2 + \Delta z_1 + A_{11}^T\Delta z_2 &= 0 \\ A_{22}^T\Delta y_2 + A_{12}^T\Delta z_2 &= 0 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \Delta x_1^T \Delta z_1 + \Delta x_2^T \Delta z_2 &= -\Delta x_1^T (A_{21}^T \Delta y_2 + A_{11}^T \Delta z_2) + (A_{11} \Delta x_1 + A_{12} \Delta y_1)^T \Delta z_2 \\ &= -\Delta x_1^T A_{21}^T \Delta y_2 + \Delta y_1^T A_{12}^T \Delta z_2 \\ &= -(-A_{22} \Delta y_1)^T \Delta y_2 + \Delta y_1^T (-A_{22}^T \Delta y_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. したがって, 混合線形相補性問題 (13) は単調である.

1.5.5 演習問題 1.8 の略解

混合線形相補性問題 (15) の行列

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -I \\ A_{21} & A_{22} & O \end{pmatrix}$$

に対して, ベクトル $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ が

$$A \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとする. このとき,

$$A_{11}\Delta x + A_{12}\Delta y - \Delta z = 0, \quad A_{21}\Delta x + A_{22}\Delta y = 0$$

であるから, 条件式 (14) の $A_{12} = -A_{21}^T$ を使うと

$$\begin{aligned} \Delta x^T \Delta z &= \Delta x^T A_{11} \Delta x + \Delta x^T A_{12} \Delta y \\ &= \Delta x^T A_{11} \Delta x - \Delta x^T A_{21}^T \Delta y \\ &= \Delta x^T A_{11} \Delta x + \Delta y^T A_{22}^T \Delta y \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. したがって, 混合線形相補性問題 (15) は単調である. ここで, 最後の等式は, (14) より行列 A_{11} と A_{22} が歪対称行列であることから, 導かれる.

1.5.6 演習問題 1.10 の略解

線形相補性問題 (18) の行列は

$$M = \begin{pmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

である. Q が半正定値行列なので, 任意の (x, y) に対して

$$(x^T, y^T) M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x^T Q + y^T A, -x^T A^T) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^T Q x + y^T A x - x^T A^T y \geq 0$$

となる. したがって, M は半正定値行列であり, 線形相補性問題 (18) は単調である.

1.5.7 演習問題 1.11 の略解

混合線形相補性問題 (19) の行列

$$A' = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ -Q & A^T & E \end{pmatrix}$$

に対して, ベクトル $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ が

$$A' \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとする. このとき,

$$A\Delta x = 0, \quad -Q\Delta x + A^T\Delta y + \Delta z = 0$$

であるから, Q が半正定値行列であることを使うと

$$\Delta x^T \Delta z = \Delta x^T Q \Delta x - \Delta x^T A^T \Delta y \geq -0^T \Delta y = 0$$

が得られる. したがって, 混合線形相補性問題 (19) は単調である.

1.5.8 演習問題 1.12 の略解

混合線形相補性問題 (22) の行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 & 0 & 0 \\ -E & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & -Q & A_1^T & A_2^T \end{pmatrix}$$

に対して, ベクトル $(\Delta x, \Delta y_1, \Delta y_2, \Delta z)$ が

$$A \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たすとする. このとき,

$$\begin{aligned} A_1 \Delta y_1 &= 0 \\ -\Delta x + A_2 \Delta y_1 &= 0 \\ -Q \Delta y_1 + A_1^T \Delta y_2 + A_2^T \Delta z &= 0 \end{aligned}$$

であるから, Q が半正定値行列であることを使うと

$$\begin{aligned} \Delta x^T \Delta z &= \Delta y_1^T A_2^T \Delta z \\ &= \Delta y_1^T Q \Delta y_1 - \Delta y_1^T A_1^T \Delta y_2 \\ &\geq -0^T \Delta y_2 = 0 \end{aligned}$$

が得られる. したがって, 混合線形相補性問題 (22) は単調である.

参考文献

- [1] Cottle, R. W., Panng, J.-S., and Stone, R. E.: *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, Boston (1992)

- [2] 小島政和: 相補性と不動点, 産業図書 (1981)
- [3] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A.: “An $O(\sqrt{n}L)$ Iteration Potential Reduction Algorithm for Linear Complementarity Problems”, *Mathematical Programming* 50 (1991) 331-342.
- [4] 水野眞治: 学習用テキスト 内点法 (5) 自己双対線形計画問題と内点法, Web 上のテキスト, <http://www.me.titech.ac.jp/~mizu.lab/text/> (2010)