学習用テキスト 線形計画法 (3)

シンプレックス法

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2013 年 2 月 9 日

概要

線形計画問題の基本的な解法であるシンプレックス法について解説する．シンプレックス法は，線形計画問題の最適解が存在するならば最適基底解が存在するということから，基底解を生成することにより問題を解く方法である．非常に強力な解法であり，ほとんどの現実の大規模な問題を高速に解くことができる．

本テキストの内容を理解する上で必要な数理的知識としては，例えば文献 [2] で十分である．また，数学記号の使い方も，ほぼ同書 [2] に準じている．

目次

1　基底解

本節では，線形方程式系の基底解を定義・解説したのちに，線形計画問題の基底解を定義・解説する．1.1 節で，いくつかの数値例を使って具体的な計算手順等を示しているので，後の内容を理解するうえで一助になれば幸いである．なお，1.1 節と 1.2 節以降の内容は，それぞれ独立しており，別々に読んでも理解できるはずである．

1.1　基底解の例

ここでは，次節以降に解説する方程式系の基底解，線形計画問題の基底解，双対問題の基底解の例を示す．

1.1.1　方程式系の基底解の例

4 変数からなる方程式系の数値例を

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ &x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \end{aligned} \tag{1}$$

とする．方程式が 2 つなので，4 変数から 2 変数を選び，他の変数を 0 とする．例えば，x_1 と x_2 を選び，他の変数を 0 とすると方程式系

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 = 12 \\ &x_1 + 2x_2 = 8 \end{aligned}$$

が得られる．これは，ただ一つの解 $(x_1, x_2) = (2, 3)$ をもつ．このとき，解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 0, 0)$ を方程式系 (1) の基底解といい．選ばれた変数 x_1 と x_2 を基底変数，選ばれなかった変数 x_3 と x_4 を非基底変数という．

つぎに，2 つの基底変数の候補として x_2 と x_4 を選び，他の変数を 0 とすると，方程式系

$$\begin{aligned} &2x_2 + x_4 = 12 \\ &2x_2 + x_4 = 8 \end{aligned}$$

が得られるが，これは解を持たない．ただ一つの解を持たなかったのは，選ばれた変数 x_2，x_4 の係数ベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が一次独立でなかったからである．したがって，基底解を得るためには，2 つの基底変数を選ぶとき，その係数ベクトルが一次独立となるように選ぶ必要がある．この例では，4

変数から 2 変数を選ぶ組み合わせが 6 通りあるが，x_2 と x_4 の組み合わせ以外では基底解が得られる (演習問題).

演習問題 1.1　方程式系 (1) の基底解をすべて求めよ.

1.1.2　標準形の線形計画問題の基底解の例

標準形の線形計画問題の数値例を

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{2}$$

とする．4 変数で 2 本の等式制約をもつので，この等式制約からなる方程式系の基底解をすべて計算すると，

$$\boldsymbol{x}^1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{x}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}^5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}^6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

という 6 個がえられる (各自確かめよ)．このとき，$\boldsymbol{x}^1$,$\boldsymbol{x}^3$,$\boldsymbol{x}^4$,$\boldsymbol{x}^6$ の 4 個の基底解は線形計画問題 (2) の実行可能基底解であるが，$\boldsymbol{x}^2$ と $\boldsymbol{x}^5$ は実行不能な基底解である.

この問題の実行可能領域

$$F_P = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T | 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0}\}$$

を (x_1, x_2) 平面に射影すると

$$F'_P = \{(x_1, x_2)^T | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 = 4 - 2x_1 - x_2 \geq 0, x_4 = 6 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0\}$$

となり，図 1 の斜線部分のように表示できる．この図には，4 本の直線 $x_1 = 0$，$x_2 = 0$，$x_3 = 4 - 2x_1 - x_2 = 0$，$x_4 = 6 - 2x_1 - 3x_2 = 0$ がある．基底解は，この 4 本の直線のうちの 2 本が交わる点，つまり 4 変数のうち 2 個の変数 (非基底変数) が 0 となる点である．図より，4 個の実行可能基底解は，実行可能領域の頂点となっている.

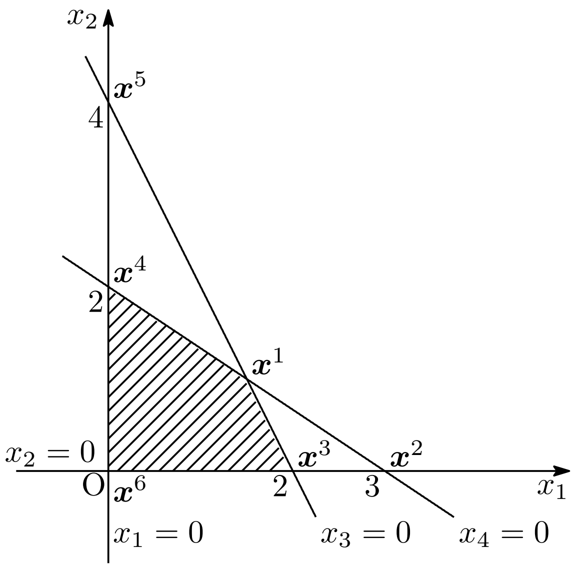

図 1　主問題の実行可能領域と基底解

1.1.3　双対問題の基底解の例

線形計画問題 (2) の双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & 4y_1 + 6y_2 \\
\text{制約条件} & 2y_1 + 2y_2 + z_1 = -3 \\
 & y_1 + 3y_2 + z_2 = -2 \\
 & y_1 + z_3 = 0 \\
 & y_2 + z_4 = 0 \\
 & (z_1, z_2, z_3, z_4)^T \geq \mathbf{0}
\end{array}
\tag{3}
$$

となる．主問題で基底変数として x_1 と x_2 を選んだときには，双対問題では (相補性条件が成り立つように) 対応する z_1 と z_2 を 0 として，等式制約をみたすように他の変数の値を求める．この場合，

$$
y_1 = -\frac{5}{4},\ y_2 = -\frac{1}{4},\ z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ z_3 = \frac{5}{4}, z_4 = \frac{1}{4}
$$

となる．これを双対問題の基底解という．これは実行可能解となっている．同様にして，主問題のその他の基底解に対しても，双対問題の基底解が計算できる．

双対問題の実行可能領域

$$
F_D = \left\{ (y_1, y_2, z_1, z_2, z_3, z_4)^T \mid \begin{array}{l} 2y_1 + 2y_2 + z_1 = -3, y_1 + 3y_2 + z_2 = -2, \\ y_1 + z_3 = 0, y_2 + z_4 = 0, (z_1, z_2, z_3, z_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}
$$

を (y_1, y_2) 平面に射影すると

$$F'_D = \left\{ (y_1, y_2)^T \mid \begin{array}{l} z_1 = -3 - 2y_1 - 2y_2 \geq 0,\ z_2 = -2 - y_1 - 3y_2 \geq 0, \\ z_3 = -y_1 \geq 0,\ z_4 = -y_2 \geq 0 \end{array} \right\}$$

となり，図 2 の斜線部分のように表示できる．この図には，4 本の直線 $z_1 = -3 - 2y_1 - 2y_2 = 0$，$z_2 = -2 - y_1 - 3y_2 = 0$，$z_3 = -y_1 = 0$，$z_4 = -y_2 = 0$ がある．基底解は，この 4 本の直線のうち 2 本が交わる点で，6 つある．6 つの基底解のうち，3 つが実行可能で，他の 3 つが実行不能である．主問題の基底解と双対問題の基底解がともに実行可能となっているのは，x_1 と x_2 を基底変数に選んだときのみであり，このときの基底解が最適解となっている．

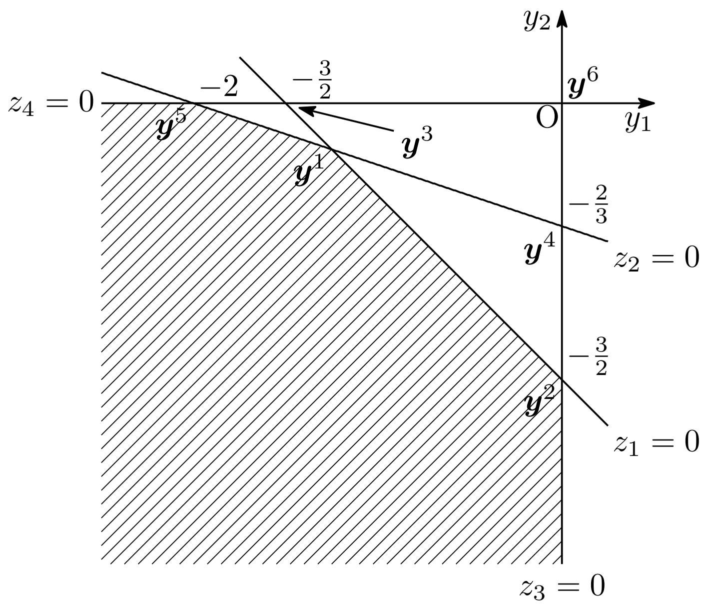

図 2　双対問題の実行可能領域と基底解

1.2　線形方程式系の基底解

n 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ からなる，m 本の線形方程式系を

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{4}$$

とする．ベクトル

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \ (i \in \mathcal{N}_n),\ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

を使うと，線形方程式系 (4) は，

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}$$

とあらわせる．ここで，$\mathcal{N}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ である．n 個の m 次ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \mathcal{N}_n)$ を横に並べた $m \times n$ 行列を $\boldsymbol{A}$ とすれば，この線形方程式系は，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

と記述することもできる．以下，本テキストでは，次の仮定をおく．

仮定 1.2 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m である．

この仮定から，$m \leq n$ である．変数の数 n が等式の数 m 以上であるので，この線形方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ をみたす解は，一般に数多くある．行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m であるという仮定より，n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i \in \mathcal{N}_n)$ から一次独立な m 個の基底ベクトル $\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_m}$ を選ぶことができる．ここで選んだベクトルの添え字の集合を $I_B = \{i_1, i_2, \cdots, i_m\}$ とし，選ばれなかった $n - m$ 個のベクトルの添え字の集合を $I_N = \{i_{m+1}, i_{m+2}, \cdots, i_n\}$ とする．また，

$$\boldsymbol{A}_B = (\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_m}),\ \boldsymbol{A}_N = (\boldsymbol{a}_{i_{m+1}}, \boldsymbol{a}_{i_{m+2}}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_n}),$$

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{pmatrix} x_{i_1} \\ x_{i_2} \\ \vdots \\ x_{i_m} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_N = \begin{pmatrix} x_{i_{m+1}} \\ x_{i_{m+2}} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix}$$

とすれば，線形方程式系 (4) は，

$$\sum_{i \in I_B} x_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{i \in I_N} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b} \tag{5}$$

あるいは

$$\boldsymbol{A}_B \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{A}_N \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

とあらわすことができる．この行列 $\boldsymbol{A}_B$ は，一次独立な m 個の m 次ベクトルを並べた $m \times m$ 行列であるから，正則であり，逆行列をもつ．行列 $\boldsymbol{A}_B$ を**基底行列**あるいは単に**基底**という．(6) より，$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$ は，上の線形方程式系の 1 つの解となる．この解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ を基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における線形方程式系 (4) の**基底解**という．また，$\boldsymbol{x}_B$ の要素となっている x_i $(i \in I_B)$ を**基底変数**，$\boldsymbol{x}_N$ の要素となっている x_i $(i \in I_N)$ を**非基底変数**という．この過程において，一次独立なベクトルの選び方は，n 個から m 個選ぶ組み合わせの数 ${}_nC_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ だけありえるので，基底行列あるいは基底解の数も最大 ${}_nC_m$ 個ある．

補足説明 1.3　ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$ では要素の順が異なっており，ここで等号 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$ は，順に要素が等しいという意味ではなく，それぞれ対応する添え字の要素が等しいという意味で使われている．

演習問題 1.4　方程式系

$$
\begin{array}{l}
3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\
x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\
2x_1 - x_3 + 4x_4 = 4
\end{array}
$$

の基底解をすべて求めよ．

1.3　標準形の線形計画問題の基底解

この節では，標準形の線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\
 & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
\tag{7}
$$

を扱う．方程式系 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における基底解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ は，非負条件 $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ をみたすとき，この線形計画問題の実行可能解であるので，**実行可能基底解**と呼ばれる．さらに，それが線形計画問題の最適解となっているならば，**最適基底解**と呼ばれる．また，$\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ の要素がすべて 0 でないとき**非退化の基底解**といい，0 となっている要素があるとき**退化した基底解**という．すべての基底解が非退化であるとき，その**線形計画問題が非退化**であるという．実行可能基底解あるいは最適基底解の存在について，次の重要な結果が知られている．

定理 1.5　標準形の線形計画問題 (7) において，$m \times n$ 係数行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m であるとき

1. 実行可能解が存在するならば，実行可能基底解が存在する．
2. 最適解が存在するならば，最適基底解が存在する．

証明 ここでの証明は，Luenberger[1] を参考にしている．実行可能解が存在すると仮定する．そのとき，実行可能解の中で正の要素の数が最小となっている解の一つを $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ とし，これが基底解となっていること示す．係数行列 $\boldsymbol{A}$ の i 番目 $(i \in N_n)$ の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とすれば，制約式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は，

$$\sum_{i \in N_n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}$$

と表すことができる．ここで, 正の値となっている変数 x_i の数が k 個で, 他の $n-k$ 個の変数 x_i の値が 0 であるとする．議論を簡単にするため，はじめの k 個の変数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ の値が正であるとしても一般性を失わない．

このとき，ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が一次独立ならば，$k \leq m$ である．もし $k = m$ ならば，この $\boldsymbol{x}$ は基底解である．$k < m$ の場合にも，ベクトル $\boldsymbol{a}_{k+1}, \boldsymbol{a}_{k+2}, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ から $m-k$ 個のベクトルを選び $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ と合わせて一次独立となるようにできる．したがって，$\boldsymbol{x}$ は，これらの一次独立なベクトルに対応する基底解となっている．

ベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が一次従属であると仮定する．このとき，すべてが同時に 0 とはなっていない $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_k$ が存在し，

$$\sum_{i \in N_k} \Delta x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$$

となる．すべての Δx_i に -1 を乗じても上の式をみたすので，Δx_i の中に負のものが存在すると仮定できる．したがって，

$$\alpha' = \max\{\alpha | x_i + \alpha \Delta x_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k\} \tag{8}$$

をみたす α' が存在し，$\alpha' > 0$ となる．また，$\Delta x_i = 0$ $(i = k+1, k+2, \ldots, n)$ として，n 次のベクトル $\boldsymbol{\Delta x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)^T$ を定義すれば，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Delta x} = \boldsymbol{0}$ となる．$\alpha \in [0, \alpha']$ ならば，$\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{\Delta x} \geq 0$ かつ $A(\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b}$ となるので，$\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{\Delta x}$ は実行可能解である．このとき，α' の定義 (8) より，$\boldsymbol{x} + \alpha' \boldsymbol{\Delta x}$ では，はじめの k 個の要素のうち一つが 0 となるので，正の変数の数が k より少ない．これは，$\boldsymbol{x}$ が正の要素の数が最小となっている実行可能解であることに矛盾する．したがって，一次従属であることはない．

2 番目の結果を示すために，最適解が存在すると仮定する．最適解の中で正の要素の数が最小となっている解の一つを $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ とし，これが基底解となっていること示す．上の実行可能解の場合とほとんど同じように証明を進めることができるが，後

半に出てくる $\boldsymbol{x} + \alpha' \Delta \boldsymbol{x}$ が最適解となることを示す必要がある．もしこれが最適解でないとすれば，目的関数値が増加するので $\boldsymbol{c}^T \Delta \boldsymbol{x} > 0$ である．このとき，十分小さな $\epsilon > 0$ に対して，$\boldsymbol{x} - \epsilon \Delta \boldsymbol{x} \geq 0$ が実行可能解であり，その目的関数値が $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$ より小さくなる．これは，$\boldsymbol{x}$ が最適解であることに矛盾する． ▮

演習問題 1.6 等式制約のない標準形の線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

においても，上の定理 1.5 が成立していることを説明せよ．

1.4 双対問題の基底解

標準形の線形計画問題 (7) の双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\
 & \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{0}
\end{array} \tag{9}
$$

となる．行列 $\boldsymbol{A}$ の基底行列を $\boldsymbol{A}_B$ とし，ベクトル $\boldsymbol{c}$ の基底変数に対応する部分ベクトルを $\boldsymbol{c}_B$，非基底変数に対応する部分ベクトルを $\boldsymbol{c}_N$ とし，同様にベクトル $\boldsymbol{z}$ の部分ベクトル $\boldsymbol{z}_B$ と $\boldsymbol{z}_N$ を定義する．このとき，上の双対問題 (9) は，

$$
\begin{array}{ll}
\text{最大化} & \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{A}_B^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}_B = \boldsymbol{c}_B \\
 & \boldsymbol{A}_N^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}_N = \boldsymbol{c}_N \\
 & \boldsymbol{z}_B \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z}_N \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

とあらわすことができる．ここで $\boldsymbol{A}_B$ が正則行列であるので，

$$
\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1} \boldsymbol{c}_B,\ \boldsymbol{z}_B = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z}_N = \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1} \boldsymbol{c}_B
$$

は，問題の中の等式条件 $\boldsymbol{A}_B^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}_B = \boldsymbol{c}_B$ と $\boldsymbol{A}_N^T \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}_N = \boldsymbol{c}_N$ をみたす．この解 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1} \boldsymbol{c}_B$ と $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1} \boldsymbol{c}_B)$ を基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における**双対問題の基底解**という．この解は，実行可能 $(\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1} \boldsymbol{c}_B \geq \boldsymbol{0})$ であれば**実行可能基底解**，さらに最適であれば**最適基底解**と呼ばれる．このとき，ベクトル $\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1} \boldsymbol{c}_B$ の成分がすべて 0 でないならば**非退化の基底解**といい，0 の要素があれば**退化した基底解**という．すべての基底解が非退化であれば**双対問題が非退化**であるという．

同じ基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における主問題の基底解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ と双対問題の基底解 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$，$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B)$ では，

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B = \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y}$$

が成立しているので，それぞれの目的関数値が等しい．したがって，それらが共に実行可能解であるならば，弱双対定理より，それぞれの問題の最適解となる．以上のことから，次の定理が成り立つ．

定理 1.7　標準形の線形計画問題 (7) の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における基底解 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{0})$ は

$$\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B \geq \boldsymbol{0}$$

をみたすならば，(7) の最適解である．このとき，双対問題 (9) の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における基底解 $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B$ と $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T(\boldsymbol{A}_B^T)^{-1}\boldsymbol{c}_B)$ も (9) の最適解となっている．

この定理は基底解が最適解であるための十分条件を示しており，シンプレックス法により生成される基底解が最適解であるかどうかの判定に使うことができる．

演習問題 1.8　線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

について，主問題あるいは双対問題が退化しているかどうか調べよ．

2　線形計画問題の辞書 (基底形式表現)

本節では，線形計画問題の辞書とその更新について解説する．

2.1　辞書の例

線形計画問題の辞書とその更新について，数値例を使って説明する．

2.1.1 標準形の線形計画問題の辞書の例

標準形の線形計画問題 (2) を再掲すると

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{10}$$

である．この問題の実行可能領域と基底解は，図 1 に示されているので，適宜参照していただきたい．x_1 と x_4 を基底変数とし，x_2 と x_3 を非基底変数とする．2 つの等式から x_4 を消去して基底変数 x_1 を非基底変数 x_2 と x_3 の一次式で

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$$

とあらわし，2 つの等式から x_1 を消去して x_4 を x_2 と x_3 の一次式で

$$x_4 = 2 - 2x_2 + x_3$$

とあらわすことができる．これらを目的関数の x_1 と x_4 に代入し，等式制約を上の式に置き換えると

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -6 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\ \text{制約条件} & x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ & x_4 = 2 - 2x_2 + x_3 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{11}$$

を得る．このように，線形計画問題を書き換えて，目的関数を非基底変数の一次式であらわし，等式制約を (基底変数=非基底変数の一次式) とあらわしたものを辞書という．この辞書をみると，すべての非基底変数の値を 0 とした基底解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 0, 0, 2)$ とその時の目的関数値 -6 が簡単に求められる．この基底解は実行可能である．また，目的関数をみると非基底変数 x_2 の係数が負であるので，この非基底変数 x_2 の値を増加させると目的関数値が減少することがわかる．実際，図 1 において，$x_1 = 2, x_2 = 0$ n という基底解から，非基底変数 $x_3 = 4 - 2x_1 - x_2$ を 0 のまま x_2 を増やす方向に動くと，目的関数値が減少することが見て取れる．

演習問題 2.1 線形計画問題 (10) に対して，x_1 と x_3 を基底変数とし，x_2 と x_4 を非基底変数とする辞書を求めよ．

2.1.2 辞書の更新の例

上で計算した辞書 (11) の基底変数と非基底変数をひと組み入れ替えた辞書の計算手順を示す．この場合，どの基底変数と非基底変数の組でも可能であるが，ここでは，非基底変数 x_3 と基底変数 x_4 を入れ替える場合を説明する．2 番目の等式制約から，新しい基底変数 x_3 を左辺，以前の基底変数 x_4 を右辺に移し，x_3 の係数で両辺を割ると

$$x_3 = -2 + 2x_2 + x_4$$

が得られる．2 番目の等式をこれに置き換え，この x_3 の式を目的関数と 1 番目の等式条件に代入すると，辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -9 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_4 \\ \text{制約条件} & x_1 = 3 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 \\ & x_3 = -2 + 2x_2 + x_4 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{12}$$

が得られる．これが，基底変数を x_4 から x_3 に入れ替えた辞書である．このときの基底解は，$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3, 0, -2, 0)$ であり，実行可能ではない．この場合の更新は，図 1 において，$x_1 = 2, x_2 = 0$ という基底解において，$x_3 = 0$ という制約を外し，$x_4 = 0$ という制約をつけ加えることにより，$x_1 = 3, x_2 = 0$ という基底解に移動したことをあらわしている．

2.2 辞書

標準形の線形計画問題 (7) を再掲すると

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

である．行列 $\boldsymbol{A}$ から基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ を選ぶと，(6) のように等式条件 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を

$$\boldsymbol{A}_B\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$$

とあらわすことができる．行列 $\boldsymbol{A}_B$ が正則であるので，この式は

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N$$

と変形できる．これを目的関数に代入すると

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} & = & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N \\ & = & \boldsymbol{c}_B^T(\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N) + \boldsymbol{c}_N^T\boldsymbol{x}_N \\ & = & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{c}_N^T - \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N)\boldsymbol{x}_N \end{array}$$

がえられる．したがって，線形計画問題 (7) は

$$\begin{array}{ll}\text{最小化} & \boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}_N^T-\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N)\boldsymbol{x}_N \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N\boldsymbol{x}_N \\ & \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\end{array} \tag{13}$$

と変形できる．これを，基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における線形計画問題 (7) の**辞書**あるいは**基底形式表現**という．この辞書から主問題の基底解 $(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_N)=(\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{0})$ と，そのときの目的関数値 $\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ を簡単に得ることができる．また，目的関数の係数から，双対問題の基底解の一部 $\boldsymbol{z}_N^T=\boldsymbol{c}_N^T-\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N$ も得られ，そのときの $\boldsymbol{y}^T=\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}$ も計算式の一部にあり，実質的に得られている．そして，定理 1.7 より，次の結果が得られる．

系 2.2 辞書 (13) において，等式右辺の定数項ベクトル $\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b}$ ならびに目的関数における非基底変数の係数ベクトル $(\boldsymbol{c}_N^T-\boldsymbol{c}_B^T\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{A}_N)$ のすべての要素が 0 以上ならば，基底解 $(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_N)=(\boldsymbol{A}_B^{-1}\boldsymbol{b},\boldsymbol{0})$ は，線形計画問題 (7) の最適解である．また，対応する双対問題の基底解も最適解である．

この系の条件をみたすとき，辞書 (13) を主双対最適な辞書と呼ぶ．主双対最適な辞書を見つければ，主問題と双対問題の最適解を同時に求めることができる．シンプレックス法は，主双対最適な辞書を見つける方法である．

2.3 辞書の更新

標準形の線形計画問題 (7) の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における辞書 (13) を実際に計算したところ

$$\begin{array}{lc}\text{最小化} & \omega_0'+c_{i_{m+1}}'x_{i_{m+1}}+\cdots+c_{i_n}'x_{i_n} \\ \text{制約条件} & x_{i_1}=b_{i_1}'-a_{i_1i_{m+1}}'x_{i_{m+1}}-\cdots-a_{i_1i_n}'x_{i_n} \\ & \vdots \\ & x_{i_m}=b_{i_m}'-a_{i_mi_{m+1}}'x_{i_{m+1}}-\cdots-a_{i_mi_n}'x_{i_n} \\ & (x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\geq\boldsymbol{0}.\end{array} \tag{14}$$

となっているとする．ここで，$I_B=\{i_1,i_2,\cdots,i_m\}$ が基底変数の添え字の集合であり，$I_N=\{i_{m+1},i_{m+2},\cdots,i_n\}$ が非基底変数の添え字の集合である．

基底変数の 1 つと非基底変数の 1 つを交換することを考える．すなわち，基底変数 x_r $(r\in I_B)$ と非基底変数 x_s $(s\in I_N)$ をそれぞれ 1 つずつ選んで，x_s を新しく基底変数とし，x_r を非基底変数とする辞書と基底解を求める．

定理 2.3 辞書 (14) において $a_{rs}'\neq 0$ であるならば，基底変数 x_r $(r\in I_B)$ と非基底変数 x_s $(s\in I_N)$ を入れ替えた基底解が存在する．また，$a_{rs}'=0$ であるならば，基底変数

x_r $(r \in I_B)$ と非基底変数 x_s $(s \in I_N)$ を入れ替えた基底解は存在しない（ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{a}_{i_1}, \boldsymbol{a}_{i_2}, \cdots, \boldsymbol{a}_{i_m}\}$ から $\boldsymbol{a}_r$ を除き，$\boldsymbol{a}_s$ を加えると一次従属となる）.

証明 行列 $\boldsymbol{A}$ の i $(i \in \mathcal{N}_n)$ 番目の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i$ とする．このとき，辞書 (13) と辞書 (14) が同じものであることから，x_s の係数を比較すると

$$\begin{pmatrix} a'_{i_1 s} \\ \vdots \\ a'_{i_m s} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_B^{-1} \boldsymbol{a}_s$$

となる．この両辺に左から行列 $\boldsymbol{A}_B$ を乗じ，行列 $\boldsymbol{A}_B$ の列ベクトルが $\boldsymbol{a}_{i_k}$ $(i_k \in I_B)$ であることを使い，左辺を展開すると

$$a'_{i_1 s}\boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots + a'_{rs}\boldsymbol{a}_r + \cdots + a'_{i_m s}\boldsymbol{a}_{i_m} = \boldsymbol{a}_s \tag{15}$$

が得られる．ここで，$a'_{rs} \neq 0$ であるとき，左辺の m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_{i_k}$ $(i_k \in I_B)$ のうち $\boldsymbol{a}_r$ と $\boldsymbol{a}_s$ を入れ替えた m 個のベクトルが一次従属であると仮定すると，上の式と $a'_{rs} \neq 0$ であることから，もとの m 個のベクトル $\boldsymbol{a}_{i_k}$ $(i_k \in I_B)$ も一次従属となり，$\boldsymbol{A}_B$ が基底行列であることに矛盾する．したがって，定理の前半の結果が成り立つ．

また，$a'_{rs} = 0$ ならば，上の式 (15) より，集合 $\{\boldsymbol{a}_{i_k} | i_k \in I_B\}$ から $\boldsymbol{a}_r$ を除き，$\boldsymbol{a}_s$ を加えると，それらは一次従属となる．したがって，基底解は存在しない． ▌

この新しい基底解に対する辞書は，元の線形計画問題から定義に従い計算することも可能である．しかし，その方法では多くの計算量を必要とするので，すでに求められている辞書 (14) から簡単に計算する方法を説明する．辞書 (14) における基底変数 x_r についての等式制約を

$$x_r = b'_r - a'_{ri_{m+1}} x_{i_{m+1}} - \cdots - a'_{rs} x_s - \cdots - a'_{ri_n} x_{i_n} \tag{16}$$

とする．$a'_{rs} \neq 0$ であるので，x_s を含む項を左辺に移動し，x_r の項を右辺に移動した後に，両辺を a'_{rs} で割ることにより

$$x_s = \frac{b'_r}{a'_{rs}} - \frac{a'_{ri_{m+1}}}{a'_{rs}} x_{i_{m+1}} - \cdots - \frac{1}{a'_{rs}} x_r - \cdots - \frac{a'_{ri_n}}{a'_{rs}} x_{i_n} \tag{17}$$

が得られる．辞書 (14) における等式制約 (16) を上の等式制約 (17) に入れ替え，その他の制約式と目的関数の x_s に式 (17) を代入することにより新しい辞書ができる．たとえば，目的関数は

$$\omega'_0 + c'_{i_{m+1}} x_{i_{m+1}} + \cdots + c'_s x_s + \cdots + c'_{i_n} x_{i_n}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\omega'_0 + \frac{c'_s b'_r}{a'_{rs}}\right) + \left(c'_{i_{m+1}} - \frac{c'_s a'_{ri_{m+1}}}{a'_{rs}}\right) x_{i_{m+1}} + \cdots \\
&\quad - \frac{c'_s}{a'_{rs}} x_r + \cdots + \left(c'_{i_n} - \frac{c'_s a'_{ri_n}}{a'_{rs}}\right) x_{i_n}
\end{aligned}
$$

と計算でき，その他の等式制約も同様にできる．この結果，基底変数 x_r $(r \in I_B)$ と非基底変数 x_s $(s \in I_N)$ を入れ替えた基底解における新しい辞書が計算できる．

3 主シンプレックス法

定理 1.5 より，標準形の線形計画問題に最適解が存在するならば，最適基底解が存在する．したがって，最適解を求める一つの方法として，基底解のみを対象として，最適基底解を求めることが考えられる．シンプレックス法はそのような方法であり，基底解の更新の仕方により，いくつかの種類がある．主シンプレックス法は，主問題の実行可能基底解のみを対象として更新することにより，最適基底解を求めようとする方法である．

3.1 主シンプレックス法による例

この節では，初期辞書が得られている場合の主シンプレックス法と得られていない場合の 2 段階シンプレックス法について，数値例を使って，その計算手順を具体的に示す．

3.1.1 初期辞書が得られているときの例

2.1 節で計算した辞書 (11) を再掲すると

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & -6 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 \\
\text{制約条件} & x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\
 & x_4 = 2 - 2x_2 + x_3 \\
 & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

である．主シンプレックス法では，目的関数が減少すような非基底変数，すなわち目的関数において係数が負となっている非基底変数を選ぶ．この場合 x_2 である．次に，非基底変数の中で選んだ変数 x_2 のみを変化させ，その他の非基底変数 (この場合 x_3) を 0 のままにしておくと，制約式の等式条件より，基底変数は

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2 - \tfrac{1}{2}x_2 \\
x_4 &= 2 - 2x_2
\end{aligned}
$$

と変化する．したがって，実行可能であるためには，各基底変数が 0 以上でなければならないので，

$$
\begin{array}{l}
2 - \frac{1}{2}x_2 \geq 0 \\
2 - 2x_2 \geq 0
\end{array}
$$

をみたす必要がある．これらの不等式より，$x_2 \leq 1$ であり，$x_2 = 1$ のときに基底変数 x_4 がゼロとなる．したがって，x_2 を基底に入れる代わりに，この x_4 を基底から出すことにすれば，次に得られる基底解も実行可能であることが保証される．実際，上の辞書から x_2 を基底に入れ，x_4 を基底から出し，2.3 節で説明した計算により辞書を更新すると

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & -\frac{13}{2} + \frac{5}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\
\text{制約条件} & x_1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \\
 & x_2 = 1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\
 & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

が得られる．基底解は $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{3}{2}, 1, 0, 0)$ であり，目的関数値は $-13/2$ である．このとき，目的関数における非基底変数の係数が 5/4 と 1/4 であり，すべて 0 以上であり，目的関数をこれ以上下げられないので，この解は最適解である．

3.1.2　２段階シンプレックス法による例

解きたい線形計画問題を

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\
\text{制約条件} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 6 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\
 & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0}
\end{array}
\tag{18}
$$

とする．この問題の実行可能解が簡単に得られないので，２段階シンプレックス法を適用する．そのために，問題の等式条件に人工変数 x_5 と x_6 をそれぞれ導入し，人工変数の和を目的関数とする人工問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & x_5 + x_6 \\
\text{制約条件} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6 \\
 & 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 10 \\
 & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \geq \mathbf{0}
\end{array}
\tag{19}
$$

を作る．各人工変数が 1 つの等式制約のみに現れるので，人工変数 x_5 と x_6 を基底変数とする辞書

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & 16 - 4x_1 - 4x_2 - 4x_3 \\
\text{制約条件} & x_5 = 6 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 \\
 & x_6 = 10 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 \\
 & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \geq \mathbf{0}
\end{array}
$$

が簡単に得られる．目的関数における係数が負となる非基底変数 x_1, x_2, x_3 のうちの一つ，ここでは x_3 を選ぶ．非基底変数 x_3 のみを 0 から増加させたとき，はじめて 0 になる基底変数，この場合 x_5 を定め，それを基底から出す．基底変数 x_5 と x_3 を入れ替えた辞書は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 8 - \frac{8}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{4}{3}x_5 \\ \text{制約条件} & x_3 = 2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ & x_6 = 8 - \frac{8}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{4}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \geq \mathbf{0} \end{array}$$

となる．目的関数における非基底変数の係数が負となるものが存在するので，そのような非基変数のうちの一つ，ここでは x_4 を選ぶ．等式制約で x_4 の係数が負となっているのは 2 番目のみであるから，x_6 を基底から出す．そのときの新しい辞書は，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x_5 + x_6 \\ \text{制約条件} & x_3 = 4 - x_1 - x_2 - \frac{1}{4}x_5 - \frac{1}{4}x_6 \\ & x_4 = 6 - 2x_1 - x_2 + \frac{1}{4}x_5 - \frac{3}{4}x_6 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \geq \mathbf{0} \end{array}$$

となる．目的関数における非基底変数の係数がすべて 0 以上なので，人工問題 (19) の最適解が得られた．基底に人工変数が含まれていないので，この辞書の等式制約から人工変数 x_5 と x_6 に関する項をすべて消去すると

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - x_1 - x_2 \\ x_4 &= 6 - 2x_1 - x_2 \end{aligned}$$

が得られる．これを元の問題 (18) の目的関数に代入すると

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3x_1 + x_2 + 2(4 - x_1 - x_2) \\ &= 8 + x_1 - x_2 \end{aligned}$$

が得られる．上で求めた目的関数と等式制約を使うと，元の問題 (18) の辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 8 + x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & x_3 = 4 - x_1 - x_2 \\ & x_4 = 6 - 2x_1 - x_2 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array}$$

が得られる．ここまでが，2 段階シンプレックス法の第 1 段階である．

第 2 段階として，上の辞書から主シンプレックス法を適用する．目的関数における x_2 の係数が負であるので，これを基底に入れる．このとき，x_2 のみを 0 から増加させたと

きにはじめて 0 となる基底変数は x_3 である．基底変数 x_3 と x_2 を入れ替え，新しい辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 4+2x_1+x_3 \\ \text{制約条件} & x_2 = 4 - x_1 - x_3 \\ & x_4 = 2 - x_1 + x_3 \\ & (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \geq \mathbf{0} \end{array}$$

を求めることができる．この辞書において，目的関数における非基底変数の係数がすべて 0 以上なので，最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 4, 0, 2)$ と最適値 4 を得る．このようにして，２段階シンプレクス法により，元の線形計画問題 (18) が解ける．

3.2 初期実行可能基底解が得られる場合

線形計画問題に最適解が存在するとき，異なる基底解を次々に生成することができれば，有限回で最適基底解を見つけることができる．しかし，無意味に基底解を生成したのでは，効率よく最適解を求められるとはいえない．そこで，主シンプレックス法では，はじめに一つの実行可能基底解と辞書が求められているとき，各反復で，2.3 節で示したようにひと組の基底変数と非基底変数を入れ替えることにより，新しい基底解と辞書を効率よく計算する．このとき，さらに次の 2 点が保証されるように基底解を更新する．

1. 各反復で生成される基底解は，主問題の実行可能基底解である．
2. 各反復で生成される基底解での主問題の目的関数値が増加しない．

この 2 つの性質が，主シンプレックス法の特徴であり，他のシンプレックス法との違いである．

主シンプレックス法の反復において，標準形の線形計画問題の基底行列 $\boldsymbol{A}_B$ における実行可能基底解とそのときの辞書

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \omega_0' + c_{i_{m+1}}' x_{i_{m+1}} + \cdots + c_{i_n}' x_{i_n} \\ \text{制約条件} & x_{i_1} = b_{i_1}' - a_{i_1 i_{m+1}}' x_{i_{m+1}} - \cdots - a_{i_1 i_n}' x_{i_n} \\ & \vdots \\ & x_{i_m} = b_{i_m}' - a_{i_m i_{m+1}}' x_{i_{m+1}} - \cdots - a_{i_m i_n}' x_{i_n} \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{20}$$

が得られているものとする．基底解が実行可能なので，$b_{i_k}' \geq 0 \ (i_k \in I_B)$ が成り立っている．定理 1.7 より，実行可能基底解において，

$$\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{A}_N^T (\boldsymbol{A}_B^T)^{-1} \boldsymbol{c}_B \geq \mathbf{0}$$

が成り立っていれば，それは最適基底解である．すなわち，上の辞書の目的関数において，非基底変数の係数 c'_{i_k} $(i_k \in I_N)$ がすべて 0 以上ならば，最適基底解が得られる．この場合には，主シンプレックス法を終える．さもなければ，$c'_{i_k} < 0$ となる $i_k \in I_N$ が存在するので，そのような添字 $s \in I_N$ を定める．$c'_s < 0$ であるので，変数 x_s を 0 から増加させれば，目的関数が減少する．実際，上の辞書から，他の非基底変数の値を 0 のまま，x_s のみを変化させると，目的関数値は，

$$\omega'_0 + c'_s x_s$$

と変化し，基底変数は，等式制約 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ をみたすために，

$$\begin{aligned} &x_{i_1} = b'_{i_1} - a'_{i_1 s} x_s \\ &\vdots \\ &x_{i_m} = b'_{i_m} - a'_{i_m s} x_s \end{aligned}$$

と変化する．このように変化させた解が実行可能解であるためには，上の基底変数の値が 0 以上でなければならないので，変数 x_s の値を

$$x^*_s = \sup\left\{x_s | x_{i_k} = b'_{i_k} - a'_{i_k s} x_s \geq 0,\ \forall i_k \in I_B\right\}$$

以下とする必要がある．もしすべての $i \in I_B$ に対して $a'_{is} \leq 0$ であるならば，この $x^*_s = \infty$ となる．すなわち，任意の $x_s \geq 0$ に対して，実行可能解が得られることになり，目的関数値 $\omega'_0 + c'_s x_s$ に下界が存在しないので，問題が非有界であることが判明する．この場合には，主シンプレックス法を終える．さもなければ，$a'_{is} > 0$ となる $i \in I_B$ が存在し，x^*_s の値が有限である．$x_s = x^*_s$ において 0 となる基底変数が存在するので，それを x_r とする，あるいは，同じことであるが

$$\min\left\{\frac{b'_{i_k}}{a'_{i_k s}}\middle| a'_{i_k s} > 0,\ i_k \in I_B\right\}$$

を達成する添字 $i_k \in I_B$ を r とする．このようにして定めた変数 x_r を基底から出すことにより，次に得られる基底解も実行可能となる．

以上のことから，現在の基底変数の集合から，x_s を基底に入れ，x_r を基底から出すことにより，新しい基底変数の集合を定め，2.3 節の方法により辞書を更新する．主シンプレックス法では，最適基底解が求まるか，問題が非有界であることが判明するまで，上記の操作を繰り返す．

アルゴリズム 3.1　初期実行可能基底解が既知の場合の主シンプレックス法は，次のようなステップから成る．

ステップ０　初期実行可能基底解に対して，辞書 (20) を求める．

ステップ１　辞書の目的関数において，非基底変数の係数 c'_{i_k} $(i_k \in I_N)$ がすべて 0 以上ならば，最適基底解が得られているので，終了する．

ステップ２　非基底変数の係数 c'_{i_k} $(i_k \in I_N)$ が負となる変数の添え字 $s \in I_N(c'_s < 0)$ を 1 つ選ぶ．

ステップ３　すべての $i_k \in I_B$ に対して $a'_{i_k s} \leq 0$ であるならば，問題が非有界であるので，終了する．

ステップ４　$a'_{i_k s} > 0$ である添え字 $i_k \in I_B$ のなかで，$\frac{b'_{i_k}}{a'_{i_k s}}$ を最小とする添え字 $r \in I_B$ を定める．

ステップ５　x_s を基底に入れ，x_r を基底から出し，2.3 節の方法により辞書を更新し，ステップ 1 へ戻る．

主シンプレックス法では，次の 3 つの場合が起こりえる．

1. 最適解を得る．
2. 問題が非有界であることが判明する．
3. 無限に繰り返される．

基底変数の組の数は有限であるので，3 番目の場合には，同じ辞書が 2 度以上あらわれる．これを**巡回現象**という．ここで，次の仮定をおく．

仮定 3.2（非退化の仮定）　線形計画問題 (7) の任意の実行可能基底解で基底変数の値が正である (0 でない)．

この仮定のもとでは，主シンプレックス法で基底解を更新するときに，目的関数値が必ず減少する (演習問題)．基底解の数が有限なので，次の結果が得られる．

定理 3.3　仮定 3.2 を満たし，初期実行可能基底解が得られている線形計画問題 (7) に主シンプレックス法を適用すれば，各反復で目的関数値が必ず減少し，有限回の反復で最適解を得るか，非有界であることが判明する．

退化している場合には，巡回現象を起こさない工夫が必要である．

演習問題 3.4　仮定 3.2 が満たされるとき，主シンプレックス法で基底解を更新するときに，目的関数値が必ず減少することを説明せよ．

3.2.1 初期実行可能基底解が簡単に得られる線形計画問題の例

線形計画問題が

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_lx_l \\
\text{制約条件} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1l}x_l \leq b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2l}x_l \leq b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{ml}x_l \leq b_m \\
 & (x_1, x_2, \cdots, x_l)^T \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

とあらわされている場合には，簡単に初期実行可能基底解と辞書を得ることができる．ただし，$b_i \geq 0$ $(i \in \mathcal{N}_m)$ であると仮定する．

上のはじめの m 個の不等式制約にスラック変数 $x_{l+1}, \cdots, x_{l+m}$ を導入して，それを基底変数とすると辞書

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c_1x_1 + \cdots + c_lx_l \\
\text{制約条件} & x_{l+1} = b_1 - a_{11}x_1 - \cdots - a_{1l}x_l \\
 & \vdots \\
 & x_{l+m} = b_m - a_{m1}x_1 - \cdots - a_{ml}x_l \\
 & (x_1, x_2, \cdots, x_l, x_{l+1}, \cdots, x_{l+m})^T \geq \mathbf{0}.
\end{array}
$$

を得ることができる．この辞書の基底解は $(x_1, x_2, \cdots, x_l) = \mathbf{0}^T$，$(x_{l+1}, \cdots, x_{l+m}) = (b_1, \cdots, b_m)$ であり，目的関数値は 0 である．この解を初期解として，シンプレックス法を適用できる．

3.3 2段階シンプレックス法

線形計画問題の初期実行可能基底解が簡単に得られない場合には，次のような第 1 段階と第 2 段階からなる 2 段階シンプレックス法を使う．

第 1 段階 実行可能基底解をもつ人工的な線形計画問題を作成し，それをシンプレックス法で解くことにより，元の線形計画問題が実行不能であることを判定できるか，あるいは実行可能基底解を見つける．

第 2 段階 第 1 段階で見つけた実行可能基底解を初期点として，シンプレックス法により最適解を見つけるか，問題が非有界であることを判定できる．

標準形の線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{制約条件} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq \mathbf{0}.
\end{array}
\tag{21}
$$

を解くための 2 段階シンプレックス法を解説する．すべての $b_i \geq 0$ $(i \in \mathcal{N}_m)$ であると仮定する．もし，ある $b_i < 0$ ならば，その式の両辺に -1 を乗ずる．

第 1 段階において，**人工変数** (artificial variable)$x_{n+1}, \cdots x_{n+m}$ を導入し，次の**人工問題** (artificial problem) を作成する．

$$
\begin{array}{llll}
\text{最小化} & \omega & = & x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+m} \\
\text{制約条件} & x_{n+1} & = & b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n \\
& x_{n+2} & = & b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n \\
& & & \vdots \\
& x_{n+m} & = & b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 \cdots - a_{mn}x_n \\
& & & (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})^T \geq \mathbf{0}
\end{array}
\tag{22}
$$

この問題では，すべての人工変数が 0 となれば，元の問題 (21) の実行可能解が得られるようになっている．目的関数 (ω とおいている) は，人工変数の和になっているので，その値が 0 以上であり，0 ならばすべての人工変数が 0 となる．この目的関数から，等式制約を使って人工変数を消去すると

$$
\omega = \sum_{i=1}^{m} b_i - (\sum_{i=1}^{m} a_{i1})x_1 - (\sum_{i=1}^{m} a_{i2})x_2 - \cdots - (\sum_{i=1}^{m} a_{in})x_n
$$

となる．この目的関数を使うことにより，人工問題は，

$$
\begin{array}{llll}
\text{最小化} & \omega & = & \sum b_i - (\sum a_{i1})x_1 - (\sum a_{i2})x_2 - \cdots - (\sum a_{in})x_n \\
\text{制約条件} & x_{n+1} & = & b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n \\
& x_{n+2} & = & b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \cdots - a_{2n}x_n \\
& & & \vdots \\
& x_{n+m} & = & b_m - a_{m1}x_1 - a_{m2}x_2 \cdots - a_{mn}x_n \\
& & & (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})^T \geq \mathbf{0}.
\end{array}
\tag{23}
$$

となる．この問題 (23) は，次のような特徴を持つ．

1. $x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}$ を基底変数とする辞書となっている．
2. $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m}) = (0, 0, \cdots, 0, b_1, \cdots, b_m)$ は実行可能基底解である．

3. 実行可能でかつ目的関数が下に有界なので，最適解を持つ．また，その最適値は 0 以上である．
4. 元の問題 (21) が実行可能ならば $\omega = 0$ が最適値であり，その逆も成り立つ (演習問題)．任意の最適解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})$ において，$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{n+m} = 0$ である．このとき，人工変数を除いた解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は，元の問題の実行可能解である．
5. 元の問題 (21) が実行不能ならば最適値は正であり，その逆も成り立つ．

上の初期辞書 (23) から，人工問題に主シンプレックス法を適用すると，最適解を持つので，最適基底解が得られる．そのときの辞書を

$$
\begin{array}{lcll}
\text{最小化} & \omega & = & \omega^* + \bar{d}_{j_1} x_{j_1} + \bar{d}_{j_2} x_{j_2} + \cdots + \bar{d}_{j_n} x_{j_n} \\
\text{制約条件} & x_{i_1} & = & \bar{b}_1 - \bar{a}_{1j_1} x_{j_1} - \bar{a}_{1j_2} x_{j_2} - \cdots - \bar{a}_{1j_n} x_{j_n} \\
 & & \vdots & \\
 & x_{i_m} & = & \bar{b}_m - \bar{a}_{mj_1} x_{j_1} - \bar{a}_{mj_2} x_{j_2} - \cdots - \bar{a}_{mj_n} x_{j_n} \\
 & & & (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})^T \geq 0
\end{array}
\tag{24}
$$

とする．辞書より，最適解 $(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*, x_{n+1}^*, \cdots, x_{n+m}^*)$ と最適値 ω^* が得られる．そして，$\omega^* > 0$ ならば元の線形計画問題 (21) は実行不能であり，$\omega^* = 0$ ならば実行可能である．後者の時には，次のように場合分けして処理を行う．

場合 1　辞書 (24) の基底変数 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}$ の中に人工変数が含まれない場合 (人工変数の値がゼロであるので，人工変数は一般に非基底変数となっているが，退化しているときには基底変数になっていることもある) には，この辞書で人工変数にかかわるすべての項を除去する．その後，元の線形計画問題 (21) の目的関数 $\sum c_j x_j$ に辞書 (24) の中で表わされた基底変数 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}$ の式を代入し，目的関数を非基底変数のみで表わす．これにより，元の問題の (実行可能基底解をあらわす) 辞書が得られ，そこから主シンプレックス法を適用することができる．これが，2 段階シンプレックス法の第 2 段階であり，元の問題の最適解を得るか，あるいは非有界であることがわかる．

場合 2　基底変数 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}$ の中に人工変数が含まれる場合には，2.3 節の辞書の更新により，基底変数となっている人工変数を 1 つずつ非基底変数に変換することができる．その結果，すべての基底変数が人工変数でない辞書を得ることができ，上の場合 1 を適用する．

以上のことをまとめると，次のようになる．

アルゴリズム 3.5 2 段階シンプレックス法は，次のステップから成る．

ステップ 1 標準形の線形計画問題に人工変数を導入し，人工的な線形計画問題を作り，初期辞書 (23) を求める．

ステップ 2 その辞書からシンプレックス法を適用することにより人工問題を解き，最適基底解とその時の辞書 (24) を求める．その結果，人工問題の最適値が正 ($\omega^* > 0$) ならば，元の問題 (21) は実行不能であり，終了する．さもなければ，つぎのステップへ進む．

ステップ 3 基底に人工変数が含まれている場合には，人工変数でない非基底変数と入れ換えるなどしたのちに，辞書 (24) から人工変数を削除する．元の問題の目的関数を非基底変数で表わすことにより，元の問題 (21) の辞書を得る．

ステップ 4 ステップ 3 で求めた辞書から，シンプレックス法を適用することにより，最適解を得るか，問題が非有界であることがわかる．

そして，次の結果が得られる．

定理 3.6 標準形の線形計画問題と人工問題 (22) が非退化の仮定 3.2 をみたすとき，2 段階シンプレックス法により有限回の反復で，実行不能である，あるいは非有界であることを判定できるか，さもなければ最適基底解を求めることができる．

演習問題 3.7 標準形の線形計画問題 (21) が実行可能ならば，人工問題 (22) の最適値が 0 となることを説明せよ．また，その逆も成立することを説明せよ．

3.4 演習問題の略解

3.4.1 演習問題 1.1 の略解

方程式系

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\ &x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \end{aligned}$$

のすべての基底解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

の 5 つである．

3.4.2 演習問題 1.4 の略解

方程式系

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 12 \\
&x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\
&2x_1 - x_3 + 4x_4 = 4
\end{aligned}
$$

において，x_1, x_2, x_3 を基底変数とすると，基底解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 0, 0)$ が得られる．次に，x_1, x_2, x_4 を基底変数とすると，同様に基底解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 0, 0)$ が得られる．変数 x_1, x_3, x_4 の係数ベクトルが一次独立ではないので，これらの変数を基底変数として選ぶことはできない．そして，x_2, x_3, x_4 を基底変数とすると，基底解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, 4, 2)$ が得られる．

係数ベクトルが一次従属の場合には基底解が得られないので，この例では，4 変数から 3 つの変数を選ぶ組合せは 4 通りあるが，基底解は 3 つ (異なる基底解は 2 つ) である．また，基底変数として x_1, x_2, x_3 を選んだときの x_3 のように，基底変数の値が 0 となることがあるが，このとき基底解が退化しているという．退化した基底解の場合，異なる基底変数の選び方 (この場合 x_1, x_2, x_3 と x_1, x_2, x_4) に同じ基底解が得られる．

3.4.3 演習問題 1.6 の略解

等式制約のない標準形の線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\
\text{制約条件} & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}
\end{array}
$$

では，基底変数が存在せず，すべての変数が非基底変数であり，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が唯一つの実行可能基底解である．$\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{0}$ ならば，これが最適基底解となる．係数ベクトル $\boldsymbol{c}$ に負のものが存在すれば，対応する変数を大きくすることにより目的関数値がいくらでも小さくなるので，最適解が存在しない．したがって，この場合にも，定理 1.5 が成立している．

3.4.4 演習問題 1.8 の略解

線形計画問題

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & -x_1 - x_2 \\
\text{制約条件} & x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

を主問題とするとき，その双対問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{最小化} & y \\
\text{制約条件} & y + z_1 = -1 \\
& y + z_2 = -1 \\
& y + z_3 = 0 \\
& z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0
\end{array}
$$

となる．x_1 を基底変数とするとき，主問題の基底解と双対問題の基底解は，それぞれ

$$
\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0),\ (y, \boldsymbol{z}^T) = (y, z_1, z_2, z_3) = (-1, 0, 0, 1)
$$

となり，主問題の基底解 $\boldsymbol{x}$ は退化していないが，$z_2 = 0$ より双対問題の基底解 $(y, \boldsymbol{z})$ は退化している．同様に，x_2 を基底変数とするときも，主問題の基底解 $\boldsymbol{x}$ は退化していないが，双対問題の基底解 $(y, \boldsymbol{z})$ は退化している．x_3 を基底変数とするとき，主問題の基底解と双対問題の基底解は，それぞれ

$$\boldsymbol{x}^T = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1),\ (y, \boldsymbol{z}^T) = (y, z_1, z_2, z_3) = (0, -1, -1, 0)$$

となり，ともに退化していない．以上で，すべての基底解を調べたので，主問題は退化していないが，双対問題は退化している．

3.4.5 演習問題 2.1 の略解

2.1.2 節の式 (12) を見よ．

3.4.6 演習問題 3.4 の略解

仮定 3.2 が満たされるとき，任意の実行可能基底解で基底変数の値が正である．主シンプレックス法の反復で得られている辞書を (20) とすると，この仮定より，すべての $b'_{i_k} > 0$ $(i_k \in I_B)$ である．シンプレックス法の反復で，基底に入る非基底変数 x_s と基底から出る変数 x_r が求められているとする．このとき，$a'_{rs} > 0$ であり，上の仮定から基底に入る変数のとる値

$$x_s^* = \frac{b'_r}{a'_{rs}}$$

が正となる．また，$c'_s < 0$ であるので，更新された基底解での目的関数値 $w'_0 + c'_s x_s^*$ は，現在の基底での値 w'_0 より減少する．なお，非退化の仮定が満たされないとき，$b'_r = 0$ すなわち $x_s^* = 0$ となり，目的関数値が変化しない可能性がある．

3.4.7 演習問題 3.7 の略解

ベクトルと行列を使って，標準形の線形計画問題 (21) が

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{25}$$

と表され，人工問題 (22) が

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \omega = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{26}$$

と表されているとする．ここで，人工変数のベクトル $(x_{l+1}, \cdots, x_{l+m})^T$ を $\boldsymbol{y}$ と表している．

問題 (25) が実行可能解 $\boldsymbol{x}'$ を持つとすれば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ は人工問題 (26) の実行可能解であり，このときの目的関数値は $\omega = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{0} = 0$ となる．あきらかに，人工問題の目的関数値が 0 以上であるので，この解は最適解であり，最適値が 0 となる．

次に，人工問題 (26) の最適値が 0 であるとする．そのときの最適解を $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ とする．もし，ベクトル $\boldsymbol{y}^*$ の中に正の要素があるとすると，目的関数値 $\omega = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{y}^*$ が正となるので，矛盾する．

したがって，$\boldsymbol{y}^* = \mathbf{0}$ である．このとき，人工問題 (26) の等式制約より $\mathbf{0} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*$ となる．これは，$\boldsymbol{x}^*$ が問題 (25) の実行可能解となっていることを示している．したがって，問題 (25) は実行可能である．

謝辞：本テキストで使用している図の作成をしていただいた田中未来君 (東工大大学院生) に感謝します．

参考文献

[1] Luenberger, David G. and Ye, Yinyu: *Linear and Nonlinear Programming*, Third Edition, Springer, 2008

[2] 宮川雅巳，水野眞治，矢島安敏：経営工学の数理 I，II，朝倉書店，2004