

学習用テキスト 線形計画法 (1)

線形計画問題

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2013 年 2 月 9 日

概要

社会・企業活動などの場において、さまざまな条件のもとで、ある目的が最適になるように意思決定をするといった問題を数理的に扱うとき、最も基本的なモデルが線形計画問題である。線形計画問題は、その構造が単純であり、大規模でも高速に解けるという特徴があり、非常に実用的で強力な数理モデルである。

本テキストの内容を理解する上で必要な数理的知識としては、例えば文献 [1] で十分である。また、数学記号の使い方も、ほぼ同書 [1] に従っている。

目次

1	線形計画問題の例	2
1.1	生産計画問題	2
1.2	要素による表現とベクトルと行列を使った表現の例	4
2	線形計画問題の形	5
2.1	標準形の線形計画問題	5
2.2	一般形の線形計画問題	7
3	線形計画問題の同値変換	8
3.1	変換の例	8
3.2	同値変換	10
4	実行可能性と最適解の存在	11
4.1	演習問題の略解	13

表 1 製品ごとの原料の使用量と利益

	原料 1 (トン)	原料 2 (トン)	原料 3 (トン)	利益 (万円)
製品 1	1	4	3	5
製品 2	2	4	1	4
使用可能量	80	180	90	

1 線形計画問題の例

生産計画問題を例として、線形計画問題へのモデル化を示す。また、次節以降で扱う内容の一部を数値例を使い説明する。

1.1 生産計画問題

次のような生産計画問題があるとする。

問題 1.1 (生産計画問題) A 社では、3種類の原料(原料 1, 2, 3)を使って、2種類の製品(製品 1, 2)を生産している。製品 1 を 1 トン生産するには、表 1 にあるように原料 1, 2, 3 がそれぞれ 1 トン, 4 トン, 3 トン必要であり、製品 2 を 1 トン生産するには、原料 1, 2, 3 がそれぞれ 2 トン, 4 トン, 1 トン必要である。1 日の原料 1, 2, 3 の使用可能量は、それぞれ 80 トン, 180 トン, 90 トンである。また、製品 1, 2 を生産したときの 1 トンあたりの利益はそれぞれ 5 万円, 4 万円である。1 日あたりの利益を最大にするには、製品 1, 2 をそれぞれ何トンずつ生産すればよいか。

この問題を解くために、1 日当たりの製品 1 と製品 2 の生産量をそれぞれ x_1 トンと x_2 トンとして、モデル化する。製品 1 と 2 をそれぞれ x_1 トンと x_2 トン生産した時の利益の総和は、

$$5x_1 + 4x_2 \tag{1}$$

万円と計算できる。したがって、この式の値が最大となる変数 x_1 と x_2 の値を求めることになる。このとき、1 日当たり原料 1 の使用量が $x_1 + 2x_2$ トンとなるので、1 日当たりの使用可能量が 80 トンであることから、変数 x_1 と x_2 は不等式

$$x_1 + 2x_2 \leq 80 \tag{2}$$

をみたさなければならない。同様に、原料 2, 3 の使用可能量の制限から、変数 x_1 と x_2 は不等式

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 &\leq 180 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 90 \end{aligned} \tag{3}$$

をみたさなければならない。また、変数 x_1 と x_2 は、生産量を表すことから負の値をとることができないので、不等式

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \tag{4}$$

をみたさなければならない。

以上のことから、1 日当たりの利益を最大とする製品 1 と 2 の生産量を求めるためには、線形の不等式であらわされた条件 (2), (3), (4) をみたす変数 x_1, x_2 のなかで、線形関数 (1) をもっと大きくするものを求めればよい。この問題を

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & 5x_1 + 4x_2 \\ \text{制約条件} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 80 \\ & 4x_1 + 4x_2 \leq 180 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 90 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

と表す。この問題は、2 つの変数が線形の不等式をみたすという制約条件のもとで、線形の関数を最大化するようにその変数の値を求める問題であり、線形計画問題となっている。

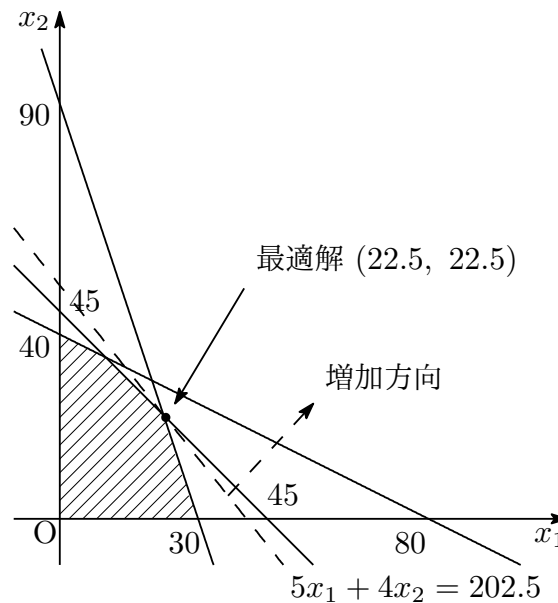


図 1 生産計画問題の実行可能領域と最適解

図 1 は、この問題の実行可能領域、目的関数の等高線 (関数値が等しい点の集合)、ならびにその増加方向を示している。図から、この問題の最適解が $(x_1, x_2) = (22.5, 22.5)$ であることがわかり、そのときの目的関数値が 202.5 となる。したがって、生産計画問題では、1 日当たり製品 1 を 22.5 トン、製品 2 を 22.5 トン生産することにより、最大利益 202.5 万円を得ることができる。このように、線形計画問題にモデル化し、それを解くことにより、生産計画問題の最適生産量が求められる。

演習問題 1.2 図を使わずに、 $(x_1, x_2) = (22.5, 22.5)$ が問題 (5) の最適解となっていることを示せ。

1.2 要素による表現とベクトルと行列を使った表現の例

線形計画問題は、要素を使って表現することにより理解しやすくなるような場合と、ベクトルと行列を使い表現することにより議論が簡単になるような場合がある。そこで、例を使い、同じ問題がどちらでも記述できることを示す。

要素を使って表現した線形計画問題の例として

$$\begin{aligned}
 \text{最小化} \quad & 2x_1 - 4x_2 - x_4 + 3x_5 \\
 \text{制約条件} \quad & 3x_1 + x_3 - 5x_5 \geq 16 \\
 & -2x_1 + 2x_2 + 3x_4 \geq 21 \\
 & 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_5 = 18 \\
 & -x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 9 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{6}$$

がある。これは、5 つの変数と 6 つの制約を持ち、目的関数を最小化する線形計画問題である。この問題には、等式制約と不等式制約が含まれ、値が 0 以上という非負制約がつく変数とつかない変数がともに含まれている。ここで、定数ベクトル

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 16 \\ 21 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

変数ベクトル

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

行列

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

を導入すれば, 上の問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2 \\ \text{制約条件} & \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \\ & \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0} \end{array}$$

とベクトルと行列を使って表すことができる. これは, 後に説明する一般形の線形計画問題となっている.

2 線形計画問題の形

線形計画問題にはいくつかの形があるが, それらを個別に扱うのは大変である. ここでは, 線形計画問題の標準形と一般形を示すが, 後の節で標準形だけを扱えば十分であることを示す.

2.1 標準形の線形計画問題

線形計画問題とは, いくつかの変数が線形の等式と不等式をすべてみたすという条件のもとで, 線形の関数を最適化 (最大化あるいは最小化) するような変数の値をすべて求める問題である. このとき, 最適化する関数を目的関数 (objective function) といい, みたすべき等式あるいは不等式を制約条件 (constraint) という. なお, 本テキストでは, 等号なしの不等式制約 ($\mathbf{a}^T \mathbf{x} < b$ など) を含む場合には, 線形計画問題とは呼ばない.

補足説明 2.1 非線形計画問題, あるいは内点法などで線形計画問題を扱うときには, 等号なしの不等式を含む問題を扱うこともある. しかし, 対象とする問題に等号のない不等式を含む場合には, 線形計画問題とは呼ばない. その理由は, 例えば非常に簡単な問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x_1 + x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 \geq 0, x_2 > 0 \end{array}$$

でも, 目的関数値を 0 に近づけられるが, 0 にはならないので, 最適解が存在しないからである. このように, 等号なしの不等式を含む問題は, 扱いが難しい.

線形計画問題は、自然数 n と m を使って

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{制約条件} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \geq (0, 0, \cdots, 0)^T \end{aligned}$$

と表すことができるとき、標準形 (standard form) と呼ばれる。ここで、添え字の集合 $N_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ と $N_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ を導入すると、 x_i ($i \in N_n$) が変数であり、 b_j ($j \in N_m$)、 c_i ($i \in N_n$)、 a_{ij} ($i \in N_n, j \in N_m$) はデータとして与えられる定数である。標準形の線形計画問題の特徴は、全ての変数に 0 以上という非負条件 (nonnegative constraint) がつき、その他の制約が (不等式ではなく) 線形の等式であらわされ、線形の目的関数を最小化するところにある。

補足説明 2.2 上の問題の最後のベクトルとベクトルの不等式は、ベクトルのそれぞれの要素が不等式をみたすこと、すなわち、 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$ をあらわしている。

ベクトル

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を使うと、標準形の線形計画問題は

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{7}$$

と表される。線形計画問題では、制約条件をすべてみたすベクトル \mathbf{x} を実行可能解 (feasible solution) といい、実行可能解の中で目的関数を最適にするものを最適解 (optimal solution) といい、そのときの目的関数の値を最適値 (optimal value) という。また、実行可能解の集合

$$F = \{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mid \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

を実行可能領域 (feasible region) という. $F \neq \emptyset$ のとき, 線形計画問題が実行可能であるといい, $F = \emptyset$ のとき実行不能であるという.

補足説明 2.3 本テキストでは, ベクトルを英小文字のボールド体 (\mathbf{a} など), 行列を英大文字のボールド体 (\mathbf{A} など) であらわすことが多い. また, ベクトル \mathbf{a} は列ベクトル (縦ベクトル) を表し, 行ベクトル (横ベクトル) は転置を使って \mathbf{a}^T とあらわす. 行ベクトル $\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ と列ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ の積 $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ は, 内積 $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$ をあらわす. すべての要素が 0 であるゼロベクトルを $\mathbf{0}$ であらわし, その次元について, 前後の文脈あるいは式から明らかな場合には, 説明しないことがある. 例えば, n 次元ベクトル \mathbf{a} に対して, $\mathbf{a} \geq \mathbf{0}$ となっていれば, このベクトル $\mathbf{0}$ の次元は n である. また, ベクトルの次元について説明がなくとも, $m \times n$ 行列 \mathbf{A} に対して, ベクトル \mathbf{x} が $\mathbf{A}\mathbf{x}$ という形にあらわれれば, \mathbf{x} の次元は n であり, ベクトル \mathbf{y} が $\mathbf{y}^T \mathbf{A}$ という形にあらわれれば, \mathbf{y} の次元は m である. そして, m 次の列ベクトル \mathbf{a} の下に n 次の列ベクトル \mathbf{b} を合わせた $(m+n)$ 次の列ベクトルを \mathbf{c} とするとき, 本来ならば

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$$

あるいは $\mathbf{c}^T = (\mathbf{a}^T, \mathbf{b}^T)$ とあらわすべきであるが, 本テキストでは簡単に $\mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ と表すことがよくある.

2.2 一般形の線形計画問題

線形計画問題の目的関数, 制約条件, 変数には, 次のような場合がありうる.

1. 目的関数を最大化する場合と最小化する場合
2. 制約に含まれる各条件式が, 線形の等式 $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ の場合, 左辺が右辺以下という不等式 $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ の場合, あるいは左辺が右辺以上という不等式 $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$ の場合
3. 各変数に 0 以上という非負条件が付く場合と付かない場合

これらすべての場合を考えると, 多くの形の線形計画問題を扱う必要がある. しかし, 線形計画問題において, 目的関数 $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ を最小化する最適解を求めることと, その符号を変えた目的関数 $-\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ を最大化する最適解を求めることは, 実質的に同じである. また, 左辺が右辺以下という不等式 $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ は, 両辺に -1 を乗じることにより左辺が右辺以上という不等式 $-\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq -b$ に簡単に変換できる. そこで, 本テキストでは, 目的関数を最小化し, 制約条件が等式または左辺 \geq 右辺という不等式であり, 0 以上という条件がつく

変数と付かない変数を持つ問題

$$\begin{aligned}
 & \text{最小化} && \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2 \\
 & \text{制約条件} && \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{x}_2 \geq \mathbf{b}_1 \\
 & && \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2 \\
 & && \mathbf{x}_1 \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{8}$$

を一般形の線形計画問題という。ここで、不等式制約の数を m_1 、等式制約の数を m_2 、0 以上という非負条件が付く変数の数を n_1 、付かない変数の数を n_2 とすれば、 \mathbf{A}_{11} 、 \mathbf{A}_{12} 、 \mathbf{A}_{21} 、 \mathbf{A}_{22} はそれぞれ $m_1 \times n_1$ 行列、 $m_1 \times n_2$ 行列、 $m_2 \times n_1$ 行列、 $m_2 \times n_2$ 行列であり、ベクトル \mathbf{b}_1 、 \mathbf{c}_1 、 \mathbf{x}_1 等の次元も同様である。 \mathbf{x}_1 の各成分のように 0 以上という制約の付く変数を非負変数、 \mathbf{x}_2 の各成分のように非負制約の付かない変数を自由変数という。

上記の議論より、任意の線形計画問題は、この一般形で表すことが可能である。また、標準形の線形計画問題 (7) は、線形計画問題 (8) において $m_1 = 0$ 、 $m_2 = m$ 、 $n_1 = n$ 、 $n_2 = 0$ となっている場合とみなすことができる。

演習問題 2.4 線形計画問題

$$\begin{aligned}
 & \text{最大化} && -2x_1 + 4x_2 + x_4 - 3x_5 \\
 & \text{制約条件} && -3x_1 - x_3 + 5x_5 \leq -16 \\
 & && 2x_1 - 2x_2 - 3x_4 \leq -21 \\
 & && 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_5 = 18 \\
 & && -x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 9 \\
 & && x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

を一般形で表せ。

3 線形計画問題の同値変換

線形計画問題には、様々な形があるが、問題の性質あるいは解法を論じるときは、標準形だけ扱えば十分であることを示す。

3.1 変換の例

数値例を使い、線形計画問題が変換できることを示す。

3.1.1 標準形の線形計画問題へ変換する例

モデル化した線形計画問題が

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & x_1 + x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & -x_1 + x_2 \geq -2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \quad (9)$$

となっていたとする。この問題を同値な標準形の線形計画問題に変換できることを示す。ここで、同値な問題とは、その変換した問題を解くことにより元の問題が解け、その逆も成り立つことをいう。

目的関数を最大化しているが、それに -1 を乗じた $-(x_1 + x_2)$ を最小化する問題を解いても、同じ最適解が得られる。1 番目の不等式制約

$$2x_1 + 3x_2 \leq 12$$

は、 $12 - 2x_1 - 3x_2 \geq 0$ と変形して、この左辺の式を新しい変数 x_3 に等しいとおくことにより、等式条件と変数の非負条件

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, x_3 \geq 0$$

に変換できる。同様に、2 番目の不等式制約

$$-x_1 + x_2 \geq -2$$

は、 $-x_1 + x_2 + 2 \geq 0$ と変形して、この左辺の式を新しい変数 x_4 に等しいとおくことにより、等式条件と変数の非負条件

$$-x_1 + x_2 - x_4 = -2, x_4 \geq 0$$

に変換できる。以上のことから、上の問題を次の同値な標準形の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12 \\ & -x_1 + x_2 - x_4 = -2 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \end{array} \quad (10)$$

に変換できる。この問題を解くと最適解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (18/5, 8/5, 0, 0)$ が得られ、その一部である $(x_1, x_2) = (18/5, 8/5)$ が元の問題の最適解になっている。したがって、線形計画問題 (10) は、問題 (9) と同値である。

3.1.2 自由変数を含む線形計画問題を変換する例

次の線形計画問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & x_1 + x_2 \\ \text{制約条件} & 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ & x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

は, x_1 が非負制約のない自由変数であるので, 標準形の線形計画問題ではない. 自由変数 x_1 が正の値も負の値も取れるので, それを2つの非負変数 u_1 と v_1 の差であらわして,

$$x_1 = u_1 - v_1, u_1 \geq 0, v_1 \geq 0$$

とする. これを代入することにより, x_1 を消去した問題

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & u_1 - v_1 + x_2 \\ \text{制約条件} & 2u_1 - 2v_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ & u_1 \geq 0, v_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

が得られる. これは, 標準形の線形計画問題である. この問題を解いて, 最適解 $(u_1, v_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0, 0)$ が求められるとすれば, それから元問題の最適解 $(x_1, x_2, x_3) = (2, 0, 0)$ がすぐに得られる. したがって, 上の2つの線形計画問題は, 同値である.

3.2 同値変換

2つの線形計画問題は, 一方を解くことより他方も解くことができ, その逆も成り立つとき, 同値であるという. 線形計画問題は, 次のような変換を加えても, 得られる線形計画問題と同値である. 本テキストではこのような変換を同値変換と呼ぶ.

1. 目的関数に正の実数を乗ずる, あるいは実数を加える.
2. 最大化問題の目的関数に -1 を乗じて, 最小化問題とする. 逆に, 最小化問題の目的関数に -1 を乗じて, 最大化問題とする.
3. 等式制約の両辺に 0 でない同じ実数を乗ずる, あるいは同じ実数または式を加える.
4. 不等式制約の両辺に同じ正の実数を乗ずる, あるいは同じ実数または式を加える.
5. 不等式制約の両辺に -1 を乗じて不等号の向きを逆にする.
6. 不等式制約 $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b$ を $\mathbf{a}^T \mathbf{x} + u = b, u \geq 0$ に置き換える, あるいは不等式制約 $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$ を $\mathbf{a}^T \mathbf{x} - u = b, u \geq 0$ に置き換える. このときの変数 u をスラック変数という.

7. 等式制約 $\mathbf{a}^T \mathbf{x} = b$ を 2 つの不等式制約 $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b, \mathbf{a}^T \mathbf{x} \geq b$ に置き換える, あるいはその逆を行う.
8. 自由変数 x に対して, 2 つの非負変数を使って $x = u - v$ とし, それをすべての x に代入して x を消去し, 非負制約 $u \geq 0, v \geq 0$ を加える. 逆に, $u - v$ という形でのみ現れる 2 つの非負変数 u, v に対して, 自由変数 x を使って $u - v = x$ を代入して u と v を消去する.
9. 目的関数あるいは制約式の一部に現れる線形関数 $\mathbf{a}^T \mathbf{x}$ を新しい変数 t で置き換え, 制約条件に $\mathbf{a}^T \mathbf{x} - t = 0$ を加える.
10. 等式制約からひとつの変数を他の変数で表し, それをすべての式に代入することにより変数をひとつ消去する.

標準形の線形計画問題 (7) が一般形の線形計画問題 (8) のひとつの形であることをすでに示したが, ここでは一般形の線形計画問題 (8) が上の同値変換を使って標準形の線形計画問題 (7) に変換できることを示す. 線形計画問題 (8) において, 自由変数 \mathbf{x}_2 の各成分 x_{2i} ($i = 1, 2, \dots, n_2$) を 2 つの非負変数 u_{2i} と v_{2i} の差で表し, j ($j = 1, 2, \dots, m_1$) 番目の不等式制約にスラック変数 z_j を導入することにより, 次の問題

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T \mathbf{u}_2 - \mathbf{c}_2^T \mathbf{v}_2 \\ \text{制約条件} \quad & \mathbf{A}_{11} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{12} \mathbf{u}_2 - \mathbf{A}_{12} \mathbf{v}_2 - \mathbf{z} = \mathbf{b}_1 \\ & \mathbf{A}_{21} \mathbf{x}_1 + \mathbf{A}_{22} \mathbf{u}_2 - \mathbf{A}_{22} \mathbf{v}_2 = \mathbf{b}_2 \\ & (\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{z}) \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

に同値変換できる. ここで, $\mathbf{u}_2 = (u_{21}, u_{22}, \dots, u_{2n_2})^T$, $\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2n_2})^T$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{m_1})^T$ である. 上の問題は, 標準形の線形計画問題である. 以上のことから, 次の定理が成り立つ.

定理 3.1 すべての線形計画問題は, 同値変換により, 標準形の線形計画問題にできる.

この定理より, 線形計画問題の性質あるいは解法を議論するときに, 理論的には標準形だけ扱えば十分である.

演習問題 3.2 線形計画問題 (6) を同値変換により標準形で表せ.

4 実行可能性と最適解の存在

ここでは, 線形計画問題の実行可能性と最適解に関する, 重要で基本的な事柄を解説する.

問題 (8) の実行可能領域を F とし、目的関数の取る値の集合

$$V = \{z \mid z = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2, (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in F\} \quad (11)$$

を定義する。ここで、 V は実数の集合であるが、次の 3 つの場合がある。

1. V は空集合である。
2. V は空集合ではなく、 V に下界が存在しない。
3. V は空集合ではなく、 V に下界が存在する。

1 番目の場合には、 F も空集合なので、問題 (8) が実行不能な場合である。2 番目の場合には、実行可能であるが、最小化問題において目的関数値がいくらでも小さくなる実行可能解が存在するので、最適解が存在しない場合である。このとき、線形計画問題が非有界である、あるいは無限解をもつという。3 番目の場合には、次の定理で示されるように、最適解が存在する。

定理 4.1 線形計画問題 (8) は、実行可能でかつ目的関数値に下界が存在するならば、最適解と最適値をもつ。

証明 問題 (8) のすべての実行可能解における目的関数値の集合 V を (11) により定義する。線形変換により多面体を写した像は多面体となるので、 V はユークリッド空間 \mathcal{R} の多面体であり、閉集合である。定理の仮定より、 V は空ではなく、下界が存在するので、下限 z^* が存在する。 V は閉集合であるので、その下限は V に属し、ある $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*) \in F$ に対して、 $z^* = \mathbf{c}_1^T \mathbf{x}_1^* + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x}_2^*$ となる。この z^* と $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*)$ は、それぞれ問題 (8) の最適値と最適解である。 ■

補足説明 4.2 n 次元ユークリッド空間において、1 つの線形の等式をみたす点の集合 $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b\}$ を超平面、線形の不等式をみたす点の集合 $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq b\}$ を半空間といい、これらは閉集合である。有限個の超平面と半空間の共通部分、すなわち、上の F のように、いくつかの線形の等式と不等式をみたす点の集合を多面体あるいは多面集合という。また、 V のように、多面体を一部の変数の空間に射影した集合も多面体となる。閉集合と閉集合の共通部分は閉集合なので、多面体も閉集合となる。

上の定理から、線形計画問題には 3 つの場合、すなわち

1. 実行不能な場合
2. 実行可能であるが、非有界であるため最適解が存在しない場合

3. 実行可能であり，最適解が存在する場合

があり，その他の場合 (実行可能で目的関数値に下界が存在するが，最適解が存在しない場合) は起こりえない．線形計画問題を解くということは，その問題が3つ場合のいずれであるか判定し，最適解を持つ場合には少なくとも1つの最適解を求める必要がある．

演習問題 4.3 実行不能な線形計画問題，実行可能であるが最適解が存在しない線形計画問題，実行可能であり最適解が存在する線形計画問題の例をそれぞれ1つ示せ．

4.1 演習問題の略解

4.1.1 演習問題 1.2 の略解

問題 (5) の 2 番目の不等式を 7 倍し，3 番目の不等式を 4 倍すると

$$\begin{aligned} 28x_1 + 28x_2 &\leq 1260 \\ 12x_1 + 4x_2 &\leq 360 \end{aligned}$$

が得られる．この両辺をそれぞれ加えると，不等式 $40x_1 + 32x_2 \leq 1620$ が得られる．この両辺を 8 で割ると

$$5x_1 + 4x_2 \leq 202.5$$

が得られるので，目的関数値は 202.5 以下である．一方， $(x_1, x_2) = (22.5, 22.5)$ は，すべての制約式を満たし，そのときの目的関数値が 202.5 である．したがって， $(x_1, x_2) = (22.5, 22.5)$ は，問題 (5) の最適解である．

4.1.2 演習問題 2.4 の略解

この線形計画問題を一般形で表すと，問題 (6) のようになる．

4.1.3 演習問題 3.2 の略解

問題 (6) を同値変換により標準形であらわすと

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & 2x_1 - 4x_2 - u_4 + v_4 + 3u_5 - 3v_5 \\ \text{制約条件} \quad & 3x_1 + u_3 - v_3 - 5u_5 + 5v_5 - z_1 = 16 \\ & -2x_1 + 2x_2 + 3u_4 - 3v_4 - z_2 = 21 \\ & 4x_1 - 2x_2 + u_3 - v_3 - 3u_5 + 3v_5 = 18 \\ & -x_2 + 3u_4 - 3v_4 + 2u_5 - 2v_5 = 9 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, u_3 \geq 0, v_3 \geq 0, u_4 \geq 0, v_4 \geq 0, u_5 \geq 0, v_5 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

となる．

4.1.4 演習問題 4.3 の略解

実行不能な線形計画問題の例

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & 2x_1 - 4x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + x_2 = -1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{array}$$

実行可能であるが最適解が存在しない線形計画問題の例

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 - x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \end{array}$$

実行可能であり最適解が存在する線形計画問題の例

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & -x_1 - 2x_2 \\ \text{制約条件} & x_1 + x_2 = 1 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array}$$

となる。

謝辞：本テキストで使用している図の作成をしていただいた田中未来君（東工大大学院生）に感謝します。

参考文献

[1] 宮川雅巳，水野眞治，矢島安敏：経営工学の数理 I, II, 朝倉書店，2004