学習・研究用テキスト 内点法 (3B)

主双対ポテンシャル減少法

水野 眞治

東京工業大学 大学院社会理工学研究科 経営工学専攻

http://www.me.titech.ac.jp/~mizu_lab/text/

2010 年 11 月 9 日

概要

線形計画問題の主問題と双対問題を同時に解く主双対ポテンシャル減少法を初期の実行可能内点が既知である場合について解説する．また，問題を解くために必要な反復回数が $O(\sqrt{n}L)$ となることも示す．

目次

1 主双対ポテンシャル減少法

線形計画問題の主問題と双対問題を合わせた主双対問題を述べ，この節を通じて使われる問題に対する仮定を述べる．その後に，主双対ポテンシャル減少法を解説する．

1.1 主双対問題

n 個の非負変数と m 個の等式制約をもつ標準形の線形計画問題は，

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

と表される．これを主問題とするとき，双対問題は

$$\begin{array}{ll} \text{最大化} & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{制約条件} & \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{z}\geq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

となる．$\boldsymbol{x}$ が主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が双対問題の最適解であるならば

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{X}\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0} \end{array} \tag{3}$$

を満たす．ここで，$\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{x})$ である．逆に，ベクトル $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が上記 (3) の条件をすべて満たすならば, $\boldsymbol{x}$ は主問題の最適解であり，$(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ は双対問題の最適解である．ゆえに，(3) を満たす解を求めることにより，線形計画問題の主問題と双対問題を同時に解くことができる．この条件 (3) を満たす $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を求める問題を**主双対問題**と呼び，この条件をすべて満たす $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を**最適解**と呼ぶ．ここで，次の仮定を置く．

仮定 1.1 $m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ のランクが m である．

集合

$$F_{PD}=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{z}\geq\boldsymbol{0}\}$$

を主双対問題の実行可能領域といい，その要素 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ を実行可能解という．仮定 1.1 より，任意の $(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}',\boldsymbol{z}')\in F_{PD}$ に対して，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}'=\boldsymbol{c}$ をみたす $\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{y}'$ のみである．したがって，場合により，$\boldsymbol{y}'$ を除いた $(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{z}')$ も主双対問題の実行可能解ということがある．また，集合

$$F_{PD}^0=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}>\boldsymbol{0},\boldsymbol{z}>\boldsymbol{0}\}$$

の要素 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ あるいはその一部である $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ を主双対問題の実行可能内点という．

仮定 1.2 主双対問題に実行可能内点が存在し，一つの内点 $(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{z}^0)\in F_{PD}^0$ が既知である．

この仮定が成り立つとき，主双対問題 (3) は最適解をもち，最適解の集合が有界となる (演習問題).

演習問題 1.3 仮定 1.2 が成り立つとき，主双対問題 (3) が最適解をもち，最適解の集合が有界となることを示せ.

1.2 アルゴリズム

Kojima, Mizuno, and Yoshise [1] によって提案された主双対問題に対するポテンシャル減少法を解説する．パス追跡法では，中心パスの近傍内に点列を生成することにより，境界に近づかないような点列を生成したが，近傍内にとどまるために，ステップサイズが小さくなりやすいという欠点がある．ポテンシャル減少法では，境界に近づくと発散するが，最適解に近づくと減少するポテンシャル関数を定義し，それが減少するようにステップサイズを決めることにより，点列を生成する．パス追跡法のような近傍を使う必要がないという利点がある．

主双対問題 (3) の実行可能な内点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \in F^0_{PD}$ あるいは $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ におけるポテンシャル関数を，定数 $\nu > 0$ を使って

$$\begin{aligned} f_\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= \nu \log \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} + n \log \frac{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z}}{n} - \textstyle\sum_{i=1}^n \log x_i z_i \\ &= (n+\nu) \log \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} - \textstyle\sum_{i=1}^n (\log x_i + \log z_i) - n \log n \end{aligned} \tag{4}$$

と定義する．これは，**主双対ポテンシャル関数**と呼ばれている．相加相乗平均の不等式から，はじめの式の第 2 項の値は第 3 項の値以上であるので，

$$f_\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \geq \nu \log \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} \tag{5}$$

が成立する．したがって，小さな $\epsilon > 0$ に対して，このポテンシャル関数の値が $\nu \log \epsilon$ 以下になる実行可能解 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ を得ることができれば，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{z} \leq \epsilon$ となるので，主双対問題の近似的な最適解が得られる．ポテンシャル減少法は，初期の実行可能内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ から，各反復においてポテンシャル関数が減少するように内点を更新し，点列 $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ を生成することにより，そのような近似解を求める方法である．k 番目の実行可能内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in F^0_{PD}$ が得られているとして，次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ の求め方を説明する．

実行可能内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in F^0_{PD}$ から近い解析的中心は，パラメータの値が $\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$ のときである．この点を目指すと，パスに近づくことができても，目的関数値 (双対ギャップ) を減少させることができない．そこで，定数 $\gamma \in [0, 1]$ に対して

$$\mu = \gamma \mu_k \tag{6}$$

としたときの解析的中心 $(\boldsymbol{x}(\mu), \boldsymbol{y}(\mu), \boldsymbol{z}(\mu))$ を目標とする．それは，方程式系

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ &\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c} \\ &\boldsymbol{X}\boldsymbol{z} = \gamma\mu_k \boldsymbol{e} \end{aligned} \tag{7}$$

の解であるので，現在の点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ からニュートン法を使い，その解析的中心を目指す．ニュートン方向を $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ とすれば，それは線形方程式系

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}^T & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{Z}_k & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{X}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \gamma\mu_k\boldsymbol{e} - \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k \end{pmatrix} \tag{8}$$

の解である．上の方程式系の解は，順に

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{y} &= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{A}^T)^{-1}(\boldsymbol{b} - \gamma\mu_k\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{e}) \\ \Delta\boldsymbol{z} &= -\boldsymbol{A}^T\Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{x} &= -\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z} + (\gamma\mu_k\boldsymbol{Z}_k^{-1}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{x}^k) \end{aligned} \tag{9}$$

と計算できる．内点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ から，この方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ へステップサイズ α だけ進んだ次の点を

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{k+1} \\ \boldsymbol{y}^{k+1} \\ \boldsymbol{z}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^k \\ \boldsymbol{y}^k \\ \boldsymbol{z}^k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta\boldsymbol{x} \\ \Delta\boldsymbol{y} \\ \Delta\boldsymbol{z} \end{pmatrix} \tag{10}$$

とする．

ここで，パラメータ $\mu = \gamma\mu_k$ の決め方にはさまざまな方法があるが，Kojima, Mizuno, and Yoshise [1] では，$\gamma = \frac{n}{n+\nu}$ としている．また，ステップサイズ α は，ポテンシャル関数

$$f_\nu(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) \tag{11}$$

の値が最小となるよう，一次元探索などを使い近似的に求める．

アルゴリズム 1.4 主双対ポテンシャル減少法は，次のステップから成る．

ステップ 0　初期内点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$，$\gamma \in [0, 1)$，$\nu > 0$，$k = 0$ とする．

ステップ 1　点 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)$ において，$\mu_k = (\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k/n$ とし，式 (9) を使って探索方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を計算する．

ステップ 2　ポテンシャル関数 (11) の値が小さくなるようにステップサイズ $\alpha > 0$ を定め，次の点 $(\boldsymbol{x}^{k+1}, \boldsymbol{y}^{k+1}, \boldsymbol{z}^{k+1})$ を式 (10) により求める．反復回数 k を 1 増加し，ステップ 1 へ戻る．

1.3　主双対ポテンシャル関数

前節までに説明したように，主双対ポテンシャル関数は，主双対問題の実行可能内点の集合

$$F_{PD}^0 = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z} > \boldsymbol{0}\}$$

上の任意の点 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ あるいは $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})$ に対して

$$f_\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = \nu \log \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{z} + n \log \frac{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{z}}{n} - \sum_{i=1}^{n} \log x_i z_i$$

と定義されている．この定義よりすぐに，次のことがわかる．

補題 1.5 主双対問題の実行可能内点の集合 F^0_{PD} 上の収束する任意の点列を $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ とし，その収束先 (極限) を $(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}', \boldsymbol{z}')$ とする．

1. $\boldsymbol{x}'^T \boldsymbol{z}' > 0$ であり，ある $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して $x'_i z'_i = 0$ であるならば，$k \to \infty$ のとき $f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \to \infty$ である．
2. ある $\beta \in (0, 1)$ が存在し，すべての $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \in F^0_{PD}$ が $\boldsymbol{X}_k \boldsymbol{z}^k \geq (1 - \beta) \frac{(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k}{n} \boldsymbol{e}$ をみたし，$\boldsymbol{x}'^T \boldsymbol{z}' = 0$ ならば，$k \to \infty$ のとき $f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \to -\infty$ である．
3. $k \to \infty$ のとき $f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) \to -\infty$ ならば，$\boldsymbol{x}'^T \boldsymbol{z}' = 0$ である．より厳密には，正の $\epsilon > 0$ に対して，$f_\nu(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \leq \nu \log \epsilon$ ならば，$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{z} \leq \epsilon$ である．

演習問題 1.6 補題 1.5 を証明せよ．

上の補題により，ポテンシャル関数値を減少させる内点列 $\{(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k)\}$ をアルゴリズム 1.4 で生成することにより，主双対問題の近似解を得ることができる．次の節では，各反復ごとにポテンシャル関数値が少なくとも 0.2 減少することを示す．

1.4 ポテシャル関数値の減少量とアルゴリズムの反復回数

ポテンシャル関数の値を評価するために，次の初等的な結果を使う．

補題 1.7 $|t| < 1$ ならば $\log(1+t) \leq t$ である．また，$\tau \in (0, 1)$, $|t_i| \leq \tau$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \cdots, t_n)^T$ ならば，

$$\sum_{i=1}^{n} \log(1 + t_i) \geq \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{t} - \frac{\|\boldsymbol{t}\|^2}{2(1 - \tau)}$$

である．

証明 対数関数のテーラ展開より

$$\log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \cdots$$

である．したがって，前者は明らかである．後者は

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \log(1+t_i) &= \sum_{i=1}^{n}(t_i - \frac{t_i^2}{2} + \frac{t_i^3}{3} - \cdots) \\
&\geq \sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{|t_i|^2}{2} + \frac{|t_i|^3}{2} + \cdots\right) \\
&\geq \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{t} - \sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^2}{2}(1+\tau+\cdots) \\
&= \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{t} - \frac{\|\boldsymbol{t}\|^2}{2(1-\tau)}
\end{aligned}
$$

より得られる． ▌

上の補題の結果を使うと，各反復でのポテンシャル関数値の減少量をステップサイズ α の 2 次関数で評価できることを示す.

補題 1.8 定数 $\tau \in (0,1)$ に対して

$$\alpha\|(\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{z})\|_\infty \leq \tau$$

ならば $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) + \alpha(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z}) \in F_{PD}^0$ であり，

$$f_\nu(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) - f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k) \leq \alpha g_1(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{z}) + \alpha^2 g_2(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{z})$$

が成立する．ここで

$$
\begin{aligned}
g_1(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{z}) &= \frac{n+\nu}{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}((\boldsymbol{z}^k)^T\Delta\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}^k)^T\Delta\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{z}) \\
g_2(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{z}) &= \frac{\|\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{z}\|^2}{2(1-\tau)}
\end{aligned}
$$

である.

証明 $(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{z}^k) + \alpha(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z}) \in F_{PD}^0$ となることは，明らかである (演習問題)．ポテンシャル関数 f_ν の定義 (4)，補題 1.7 の結果，ならびに $\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z} = 0$ を使うと

$$
\begin{aligned}
&f_\nu(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) - f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k) \\
&= (n+\nu)\log(\boldsymbol{x}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{x})^T(\boldsymbol{z}^k + \alpha\Delta\boldsymbol{z}) - \sum_{i=1}^{n}(\log(x_i + \alpha\Delta x_i) + \log(z_i + \alpha\Delta z_i)) \\
&\quad -(n+\nu)\log(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k + \sum_{i=1}^{n}(\log x_i + \log z_i)
\end{aligned}
$$

$$= (n+\nu)\log\left(1+\alpha\frac{(\boldsymbol{z}^k)^T\Delta\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x}^k)^T\Delta\boldsymbol{z}}{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}\right)-\sum_{i=1}^n(\log(1+\alpha\frac{\Delta x_i}{x_i^k})+\log(1+\alpha\frac{\Delta z_i}{z_i^k}))$$

$$\leq (n+\nu)\alpha\frac{(\boldsymbol{z}^k)^T\Delta\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{x}^k)^T\Delta\boldsymbol{z}}{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}-\alpha\sum_{i=1}^n\left(\frac{\Delta x_i}{x_i^k}+\frac{\Delta z_i}{z_i^k}\right)$$

$$+\alpha^2\frac{\|\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{z}\|^2}{2(1-\tau)}$$

となるので，補題の結果が得られる． ▌

演習問題 1.9 定数 $\tau\in(0,1)$ に対して

$$\alpha\|(\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{z})\|_\infty\leq\tau$$

ならば $(\boldsymbol{x}^k,\boldsymbol{y}^k,\boldsymbol{z}^k)+\alpha(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y},\Delta\boldsymbol{z})\in F_{PD}^0$ となることを示せ.

補題の中の $g_1(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{z})$ と $g_2(\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{z})$ の大きさを評価する．$\gamma=\frac{n}{n+\nu}$ とすれば，式 (8) より

$$\boldsymbol{Z}_k\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z}=\frac{n\mu_k}{n+\nu}\boldsymbol{e}-\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{z}^k \tag{12}$$

である．ここで,

$$\boldsymbol{V}=(\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{1/2},\ \boldsymbol{v}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{e}=\left(\sqrt{x_1^kz_1^k},\sqrt{x_2^kz_2^k},\cdots,\sqrt{x_n^kz_n^k}\right)^T \tag{13}$$

とする．等式 (12) の両辺に $\boldsymbol{V}^{-1}$ を左から乗ずると

$$\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Z}_k\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z}=\frac{n\mu_k}{n+\nu}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v} \tag{14}$$

が得られる．この等式の各項を左から順に

$$\begin{array}{rcl}\boldsymbol{p}&=&\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{Z}_k\Delta\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{q}&=&\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{r}&=&\frac{n\mu_k}{n+\nu}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e}-\boldsymbol{v}\end{array} \tag{15}$$

とおけば.

$$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q}=\Delta\boldsymbol{x}^T\Delta\boldsymbol{z}=0$$

となる．したがって,

$$\|\boldsymbol{p}\|^2+\|\boldsymbol{q}\|^2=\|\boldsymbol{r}\|^2 \tag{16}$$

が得られる.

補題 1.10 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ を $\gamma = \frac{n}{n+\nu}$ のときの方程式系 (8) の解とし，$\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{r}$ を式 (13) と (15) のように定義する．このとき

$$
\begin{aligned}
&g_1(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{z}) = -\frac{n+\nu}{n\mu_k}\|\boldsymbol{r}\|^2 \\
&g_2(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{z}) \leq \frac{1}{2(1-\tau)}\|\boldsymbol{V}^{-1}\|^2\|\boldsymbol{r}\|^2 \\
&\|\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{z}\|^2 \leq \|\boldsymbol{V}^{-1}\|^2\|\boldsymbol{r}\|^2
\end{aligned}
$$

が成立する．

証明 補題 1.8，式 (12) と $\boldsymbol{r}$ の定義より

$$
\begin{aligned}
g_1(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{z}) &= \frac{n+\nu}{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}((\boldsymbol{z}^k)^T\Delta\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x}^k)^T\Delta\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{e}^T(\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{z}) \\
&= \left(\frac{n+\nu}{(\boldsymbol{x}^k)^T\boldsymbol{z}^k}\boldsymbol{e} - (\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{Z}_k)^{-1}\boldsymbol{e}\right)^T(\boldsymbol{Z}_k\Delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{X}_k\Delta\boldsymbol{z}) \\
&= \left(\frac{n+\nu}{n\mu_k}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{V}^{-2}\boldsymbol{e}\right)^T\left(\frac{n\mu_k}{n+\nu}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{V}^2\boldsymbol{e}\right) \\
&= \left(\frac{n+\nu}{n\mu_k}\boldsymbol{V}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e}\right)^T\left(\frac{n\mu_k}{n+\nu}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{e}\right) \\
&= -\frac{n+\nu}{n\mu_k}\|\boldsymbol{r}\|^2
\end{aligned}
$$

となる．また， 式 (15) と (16) より

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{X}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{Z}_k^{-1}\Delta\boldsymbol{z}\|^2 &= \|\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{p}\|^2 + \|\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{q}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{V}^{-1}\|^2(\|\boldsymbol{p}\|^2 + \|\boldsymbol{q}\|^2) \\
&= \|\boldsymbol{V}^{-1}\|^2\|\boldsymbol{r}\|^2
\end{aligned}
$$

となるので，後の二つの不等式が得られる． ▌

ここで，$v_{min} = \min_i v_i$，$\nu \geq \sqrt{n}$ とすれば，$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} = n\mu^k$，$\boldsymbol{v}^T(\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e} - \frac{1}{\mu_k}\boldsymbol{v}) = 0$，(15) より

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{n+\nu}{n\mu_k}\|\boldsymbol{r}\|\right)^2 &= \|\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e} - \frac{n+\nu}{n\mu_k}\boldsymbol{v}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e} - \frac{1}{\mu_k}\boldsymbol{v} - \frac{\nu}{n\mu_k}\boldsymbol{v}\|^2 \\
&= \|\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{e} - \frac{1}{\mu_k}\boldsymbol{v}\|^2 + \|\frac{\nu}{n\mu_k}\boldsymbol{v}\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \left(\frac{1}{v_{min}} - \frac{1}{\mu_k} v_{min}\right)^2 + \frac{\nu^2}{n\mu_k} \\
&\geq \frac{1}{v_{min}^2} - \frac{2}{\mu_k} + \frac{1}{\mu_k^2} v_{min}^2 + \frac{1}{\mu_k} \\
&= \left(\frac{1}{2v_{min}} - \frac{1}{\mu_k} v_{min}\right)^2 + \frac{3}{4v_{min}^2} \\
&\geq \frac{3}{4v_{min}^2}
\end{aligned}
$$

が成立する．この結果と上の補題から次の定理が得られる．

定理 1.11 $(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{y}, \Delta \boldsymbol{z})$ を $\gamma = \frac{n}{n+\nu}$ のときの方程式系 (8) の解とし，$\nu \geq \sqrt{n}$ とする．ステップサイズを

$$
\alpha = \frac{\tau}{\|\boldsymbol{V}^{-1}\|\|\boldsymbol{r}\|} = \frac{\tau v_{min}}{\|\boldsymbol{r}\|}
$$

とすれば

$$
f_\nu(\boldsymbol{x}^k + \alpha \Delta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^k + \alpha \Delta \boldsymbol{z}) - f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k) \leq -\frac{\sqrt{3}\tau}{2} + \frac{\tau^2}{2(1-\tau)}
$$

が成立する．$\tau = 0.4$ とすれば，上の不等式の右辺の値は -0.2 以下となる．

証明 まず，

$$
\|\boldsymbol{V}^{-1}\| = \max_i \frac{1}{v_i} = \frac{1}{v_{min}}
$$

であることに注意する．次に，補題 1.10 の最後の不等式より

$$
\begin{aligned}
\alpha \|(\boldsymbol{X}_k^{-1} \Delta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{Z}_k^{-1} \Delta \boldsymbol{z})\|_\infty &\leq \alpha (\|\boldsymbol{X}_k^{-1} \Delta \boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{Z}_k^{-1} \Delta \boldsymbol{z}\|^2)^{1/2} \\
&\leq \alpha \|\boldsymbol{V}^{-1}\|\|\boldsymbol{r}\| \\
&= \tau
\end{aligned}
$$

となるので，補題 1.8，1.10 の条件が成立する．補題 1.8，1.10 と定理の上の不等式より

$$
\begin{aligned}
f_\nu(\boldsymbol{x}^k + \alpha \Delta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}^k + \alpha \Delta \boldsymbol{z}) - f_\nu(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{z}^k) &\leq \alpha g_1(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{z}) + \alpha^2 g_2(\Delta \boldsymbol{x}, \Delta \boldsymbol{z}) \\
&\leq -\frac{n+\nu}{n\mu_k} \frac{\tau\|\boldsymbol{r}\|}{\|\boldsymbol{V}^{-1}\|} + \frac{\tau^2}{2(1-\tau)} \\
&\leq -\frac{\sqrt{3}\tau}{2} + \frac{\tau^2}{2(1-\tau)}
\end{aligned}
$$

が成立する．∎

初期点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ において，ポテンシャル関数の値 $f_\nu(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{z}^0)$ が $O(\nu L)$ ならば，ポテンシャル減少法のアルゴリズム 1.4 を使うと，補題 1.5 より，$k = O(\nu L)$ の反復で，$(\boldsymbol{x}^k)^T \boldsymbol{z}^k \leq 2^{-2L}$ をみたす近似解が得られる．たとえば，$\nu = \sqrt{n}$ とすれば，$O(\sqrt{n}L)$ 反復のアルゴリズムとなり，$\nu = n$ とすれば，$O(nL)$ 反復のアルゴリズムとなる．ただし，パラメータ ν の値は，ポテンシャル関数 f_ν の定義だけでなく，$\gamma = \frac{n}{n+\nu}$ であるから，方程式系 (8) の解である探索方向 $(\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\boldsymbol{z})$ にも強く影響を与える．理論的には，$\nu = \sqrt{n}$ のときに反復回数が少ないと言えるが，実際の計算では，ν を n の定数倍程度にした方が，効率よいのではないかと考えられる．

1.5 演習問題の略解

1.5.1 演習問題 1.3 の略解

仮定 1.2 が成り立つならば，双対問題が実行可能なので，弱双対定理より，主問題の目的関数値に下界が存在する．したがって，主問題は，実行可能で下界が存在するので，最適解が存在する．

次に，主双対問題に内点が存在するので，一つの内点を $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{z}^0)$ とする．このとき，主問題の任意の最適解を $\boldsymbol{x}^*$，最適値を ω^* とすれば，

$$(\boldsymbol{z}^0)^T \boldsymbol{x}^* = (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}^0)^T \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^0 = \omega^* - \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^0$$

となるが，$\boldsymbol{z}^0 > \boldsymbol{0}$ であるから，この等式より

$$x_i^* \leq \frac{\omega^* - \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{y}^0}{z_i^0}, \ \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$$

が得られるので，各 x_i^* に上界が存在し，最適解の集合が有界となる．

参考文献

[1] Kojima, M., Mizuno, S. and Yoshise, A.: "An $O(\sqrt{n}L)$ Iteration Potential Reduction Algorithm for Linear Complementarity Problems", *Mathematical Programming* 50 (1991) 331-342.